

نماذج إحصائية خطية تطبيقية

انحدار ، تحليل تباين وتصاميم تجريبية

الجزء الثاني

(تحليل تباين وتصاميم تجريبية)

تأليف

جون نتر

ويليام وازرمان

ميخائيل كتنر

ترجمة

أ.د. أنيس إسماعيل كنحو

أ.د. عبد الحميد بن عبد الله الويد

د. إبراهيم بن عبد العزيز الواصل

د. الحسيني عبد البر راضي

النشر العلمي و المطابع

جامعة الملك سعود





نماذج إحصائية خطية تطبيقية

انحدار، تحليل تباين وتصاميم تجريبية

الجزء الثاني (تحليل تباين وتصاميم تجريبية)

تأليف

ميخائيل كتر

جامعة لكوري

ويليام وازرمان

جامعة سيراكاس

جون نر

جامعة جورجيا

ترجمة

أ. د. أنيس إسماعيل كنحو - أ. د. عبد الحميد عبد الله الزيد

د. إبراهيم بن عبد العزيز الواسل - د. الحسيني عبد البر راضي

قسم الإحصاء وبحوث العمليات - كلية العلوم - جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

س.ب. ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية



ج) جامعة الملك سعود، ١٤٢١هـ (٢٠٠٠م)

هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب:

Applied Linear Statistical Models: Regression, Analysis of Variance and Experimental Designs (Third Edition)

By: John Neter, William Wasserman & Michael Kutner

© 1990, Richard D. Irwin, Inc.

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

نر، جون

نماذج إحصائية خطية تطبيقية: انحدار، تحليل تباين وتصاميم تجريبية: الجزء الثاني (تحليل تباين وتصاميم تجريبية)/جون نر، ويليام وازرمان وميخائيل كتنر؛ ترجمة أنيس اسماعيل كنجو [وآخرون] - الرياض

٨٩٨ ص: ١٧ سم × ٢٥ سم

ردملك ٩-١٣٧-٣٧-٩٩٦٠ (مجموعة)

٧-١٣٨-٣٧-٩٩٦٠ (ج-٢)

(الجزء الثاني: تحليل تباين وتصاميم تجريبية)

١- الجبر الخطي ٢- المعادلات الخطية ٣- الإحصاء الرياضي

أ- وازرمان، وليام (م. مشارك) ب- كتنر، ميخائيل (م. مشارك) ج- كنجو، أنيس اسماعيل (مترجم)

د- العنوان

ديوي ٥١٢,٥ ٢١/١٠٦٥

رقم الإيداع: ٢١/١٠٦٥

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره في اجتماعه الثالث عشر للعام الدراسي ١٤١٦/١٤١٧هـ الموافق بتاريخ ١٢/١١/١٤١٦هـ الموافق ٢١/٣/١٩٩٦م.

جامعة الملك سعود ١٤٢١هـ

مقدمة المترجم

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، سيدنا محمد بن عبد الله الهادي الأمين والمرسل بلسان عربي مبين، وبعد فقد وقع اختيارنا على كتاب نماذج إحصائية خطية تطبيقية لأسباب عدة نوجزها فيما يلي:

١ - يتطرق الكتاب لتشكيلة واسعة من التطبيقات الإحصائية تتناول بصورة شاملة تقريباً تحليل الانحدار وأهم ما يحتاجه الباحث والدارس من تطبيقات تحليل التباين وتصميم التجارب، ويعرج في هذه الرحلة الطويلة في دنيا الطرائقية الإحصائية على بعض من تطبيقات السلاسل الزمنية والإحصاء اللامعلمي.

٢ - يتميز الكتاب بعرض واضح وميسر لأساسيات الطرق الإحصائية، وللمفاهيم الرئيسية التي تشكل خلفيتها النظرية، مما يرفع بشكل ملحوظ من قدرة الدارس على التطبيق السليم، وتجنب الشطط والاستخدام المضلل للإحصاء، ويعينه على فهم النتائج التي يحصل عليها، وتفسيرها تفسيراً صحيحاً، وعرضها بدقة وإحكام، وكان ذلك لمرّة تعاون ثلاثة مؤلفين ممن برعوا في مجال الإحصاء التطبيقي بالإضافة إلى خبرة عدد وافر من المراجعين، وحصوله سنوات طويلة من الخبرة الميدانية الواسعة.

٣ - يتميز الكتاب بتشكيلة فريدة من المسائل الميدانية المأخوذة، من تطبيقات واقعية في مجالات شتى، شملت العلوم الاجتماعية والأحيائية وعلوم الإدارة والاقتصاد والصناعة وغيرها، وهو بما يحتويه من الأمثلة والمسائل والتمارين والمشاريع والبيانات الإحصائية الواقعية، يشكل من حيث الكم والكيف مرجعاً لا غنى عنه لقاعدة واسعة من الباحثين والدارسين والمستفيدين.

٤ - وإلى جانب شمولية العرض يتميز الكتاب بمحدثات العرض، وإذا خرجت آخر طبعة للكتاب، وهي الطبعة الثالثة، في التسعينات فقد احتوت عدداً من التقنيات الحديثة التي ظهرت للمرة الأولى في السبعينات والثمانينات، لاسيما في مجال التشخيص لعلّة أو علل

يعاني منها البيان الإحصائي، والتدابير العلاجية لها، ثم التحقق من صلاحية النموذج الإحصائي المستخدم لتحليل البيان، وأفاق الاستفادة منه في مجالات التقدير أو التنبؤ أو السيطرة. وكان لا بد للكاتب، وقد ارتدى ثوب الحداثة هذا، أن يعتمد بقوة على استخدام الحاسب الآلي، ويتجنب القصور في صيغ الحسابات اليدوية التقليدية التي تستهلك جزءا غير قليل من الكتب الطرائقية التقليدية.

٥ - نجح الكاتب في عرض ثلاثة مواضيع متفرقة هي تحليل الانحدار، وتحليل التباين، وتحليل التجارب المصممة، في إطار موحد هو إطار النماذج الخطية التطبيقية، مما يسمح إضافة إلى الفوائد النظرية، بالاستفادة من أفضل ما تضمنته الحزم الإحصائية الحديثة، ويمكن من الاستخدام الأمثل للحاسوب في التحليل الإحصائي.

ونظرا لوفرة المواد التي يقدمها الكتاب، فقد تقرر، بعد موافقة الناشر، إصدار الترجمة هذه في جزئين، يتضمن الجزء الأول الفصول الثلاثة عشر الأولى وهي تشمل تحليل الانحدار، ويتضمن الجزء الثاني الفصول الستة عشر الباقية وهي في تحليل التباين وتصميم التجارب وتحليلها، وكانت مساهمات المترجمين أحد عشر فصلا للدكتور أنيس كنجو وستة فصول لكل من الدكتور عبد الحميد الزيد والدكتور إبراهيم الواصل والدكتور الحسين راضي، كما قام الدكتور أنيس كنجو بمهمة المراجعة العلمية واللغوية للكتاب مما أضفى على أسلوب العرض وحدة لا تخفى، وأدى إلى انسجام العبارة عبر الكتاب بأكمله.

وكانت مسألة المصطلح العلمي تحديا نرجو أن نكون قد وُفِّقنا في مواجهته، خاصة وأن العديد من المصطلحات يظهر في العربية، في حدود معلوماتنا، للمرة الأولى، وبالطبع نرحب بأية مقترحات يتفضل بها الزملاء والقراء سواء تناولت مصطلحا أو تعميما.

وكما أشارت مقدمة المؤلفين، فقد صُمِّمت الطبعة الثالثة بحيث تغطي مقررات من مستوى المرحلة الجامعية الأولى ومن مستوى الدراسات العليا. فضلا عن استخدامه كمرجع لباحثين في ميادين الإدارة والاقتصاد والعلوم الاجتماعية والصحية والأحيائية. وأملنا كبير في أن يسهل هذا الكتاب مجزأه ثغرة في المكتبة الإحصائية العربية، وما أحوجنا إلى سد الثغرات في

المكتبة العلمية العربية بجميع فروعها وأجنحتها وليس في الإحصائية منها ، فقط . فالعربية لفتنا الجميلة هي كما يصفها المرحوم الأستاذ الدكتور "محمد المبارك" : "غنية من حيث الأبنية والصيغ غنى لا تضارعها فيه لغة أخرى من اللغات الراقية التي تفي بمحاجات الإنسان في مثل هذا العصر الذي غن فيه ، وتدل مفردات اللغة العربية دلالة قاطعة على أن العرب صنعوا الوجود تصنيفا شاملا دقيقا منطقيا يدعو إلى الدهشة والتعجب ويدل على مستوى فكري قلما وصلت إليه الأمم في مثل ذلك الطور المبكر من تاريخ حياتها".

إن التأمل من الأساندة والمفكرين العرب في مردود التعليم الجامعي في بلادنا العربية ترتد إليه تأملاته يوافر من الحسرة والألم وشعور قد يصل حد الإحباط . وهو فوق هذا وكرجل استوعب واقع العصر واستشعر آفاق التقدم الحضاري ووثيقته ينظر إلى قومه بين الأقوام التي انتظمها ركب الحضارة المعاصر فيفتقد لهم ، ويجيل الطرف من حوله يستشف ساعة الفجر فيجدها ، ضمن واقعنا العلمي السائد ، بعيدة النال . لا بل يجد الهوة الكبيرة بينه وبين نظيره في العالم المتقدم علميا تزداد اتساعا وعمقا كل يوم وكل ساعة .

إن بناء المكتبة العلمية العربية واجب على كل مستطيع ، فما الذي يمنعنا عن إغناء العربية لتصبح لغة علم تدخر بالمصطلح من كل صنف ، وتتميز مكتباتها بلحسب من المراجع العلمية المعدة بلغة الضاد؟ ثم كيف يمكن لنا تلمس الطريق إلى هذا الهدف إذا بقي التعليم الجامعي بلغة أجنبية؟ هل نكتب ونترجم لتوضع جهودنا على الرفوف ، أم ليتخذها جمهور الطلبة سبيلا ميسرا إلى المعرفة؟ إن ثوب العورة الذي ترتديه لا يؤهلنا لأكثر من أدوار التمثيل ، فالملكات المبدعة تنمو في حضن العربية ، ولا يمكن لها أن تزدهر إلا في حماتها ، ولن ننطلق في بناء مستقبلنا الحضاري ونأمل في استعادة موقع حضاري يليق بقرائنا المرموق إلا عندما تيسر المعرفة لكل عربي بلغته الأم .

ولما كانت الأعمال بالنيات ، وكان لكل امرئ ما نوى ، وكانت نوايانا ، فيما اخترناه وفيما بذلناه من جهود ، خدمة لغة القرآن المجيد وتقديم زاد علمي مفيد ، لكل قارئ بالعربية ، فאלله سبحانه وتعالى نسأل أن يتقبل منا هذه الترجمة عملا صالحا ، فهو من وراء القصد ، وهو الهادي إلى سواء السبيل .

المرحوم

مقدمة المؤلفين

تستخدم النماذج الإحصائية الخطية الخاصة بالانحدار، تحليل التباين، والتصاميم التجريبية، اليوم استخداما واسعا في إدارة الأعمال، الاقتصاد، والعلوم الاجتماعية، الصحية والأحيائية. ونحتاج التطبيقات الناجحة لهذه النماذج إلى فهم سليم لكل من الخلفية النظرية والمسائل العملية التي نواجهها عند استخدام النماذج في حالات من واقع الحياة. وبينما تشكل الطبيعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية، في الأساس، كتابا تطبيقيا، إلا أنها تهدف إلى خلط النظري والتطبيقات بصورة فعالة، متجنبين الشطط سواء في تقديم النظري بصورة منعزلة أو في طرح عناصر من التطبيقات دون الحاجة إلى فهم أسسها النظرية.

وتختلف الطبيعة الثالثة عن الطبيعة الثانية في عدد من النواحي المهمة.

١- أضفنا فصلا جديدا في تصاميم القياسات المكررة نظرا لأهميتها الكبرى في العلوم السلوكية وعلوم الحياة. وبالنسبة للقارئ، يشكّل الفصل الثامن والعشرون المضاف مدخلا إلى تصاميم القياسات المكررة مع المتابعة في تصاميم القياسات المكررة ذات العامل الواحد، وفي التصاميم ذات العاملين مع قياسات مكررة لأحد العاملين أو لهما معا، وفي تصاميم الوحدة للتقسمة.

وبالإضافة إلى ذلك فإن الفصل الثاني عشر حول بناء نموذج انحدار قد أعيدت صياغته إلى حد كبير وأوسع كثيرا. وتطور، في هذا الفصل، بالتفصيل عملية بناء نموذج بحيث يستوعب العديد من عناصر هذه العملية، التي نوقشت في فصول سابقة. وتعرض، أيضا، لمعالجة موسّعة جدا للتحقق من نماذج الانحدار.

٢- توسعنا كثيرا في مناقشة تشخيصات تحليل الانحدار وتحليل التباين وذلك عبر الكتاب بأكمله. ففي ميدان تحليل الانحدار نتابع الآن، من بين التدابير التشخيصية المدروسة، تدابير PRESS، DFFITS، DFBETAS، كما أضفنا، أيضا، رسومات الانحدار الجزئي، كما ندرس تحويل بوكس - كوكس كتدبير علاجي.

وقد ازدادنا ، أيضا ، من التأكيد على التشخيصات في تحليل التباين وتصميم التعارب ، إذ نقدم عددا أكبر بكثير من الرسومات التشخيصية ، كما أضفنا مناقشة رسوم احتمالات طبيعي للتأثيرات الرئيسة المقدرة للعوامل.

٣- وقد توسعنا في عدد من المواضيع وأعدنا تنظيمها . ففي ميدان تحليل الانحدار وُحِّدَت الآن مناقشة المربعات الدنيا المرححة ودرست في سياق الانحدار المتعدد . وقد أعيد تنظيم مناقشة نماذج الانحدار المعيارية ، كما دُعِمَ عرض كل من مجاميع المربعات الإضافية والخطية المتعددة من خلال إعادة تنظيم شاملة لها ، كما توسعنا في الفصل الثالث عشر وهو فصل الارتباط الذاتي ، بأن درسنا طريقة هيلدريث - لو (Hildreth - Lu) في تقديم معلمة الارتباط الذاتي ، وأضفنا فقرة تتعلق بفترات تنبؤ عند التنبؤ بمشاهدة جديدة . وأضفنا ، أيضا ، مناقشة موجزة لطرائقية سطح الاستجابة في الفصل التاسع المتعلق بانحدار كثورات الحدود .

وفي ميدان تحليل التباين والتصاميم التجريبية ، توسّعنا كثيرا في شرح نماذج التحاين ، خاصة ماتعلق منها بنماذج التأثيرات العشوائية المختلطة لتصاميم القطاع العشوائي ، التصاميم الحاضنة ، تصاميم القياسات المكررة ، وتصاميم المربع اللاتيني . وعلى وجه الخصوص أكّدنا على التقابل بين نموذج تحاين والبنية الارتباطية للملاحظات . وبالإضافة إلى ذلك ، فقد عززنا مناقشة مفهوم القوة وتخطيط بحرم العينات من منظور العلاقات الوثيقة بين هذين الموضوعين .

وقد اتسعت ، أيضا ، مناقشة التحاين متعدد العوامل وذلك عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية .

٤- وقد عززنا ، عبر الكتاب ، التكامل بين التصاميم التجريبية ودراسات المشاهدة ، مبتدئين بمناقشة الحصول على بيانات لتحليل الانحدار في الفصل الثاني .

٥- وقمنا ، عبر الكتاب ، بتتبع شامل في العرض مستنديين إلى الخبرة الميدانية ضمن الفصل الدراسي ، وذلك بغية المزيد من الوضوح فيما تقدمه .

وقد نُشرت الفصول الثلاثة عشر الأولى من الطبعة الثالثة لـ "نماذج إحصائية خطية تطبيقية" في كتاب منفصل تحت عنوان "نماذج المخاطر الخطية تطبيقية"، طبعة ثانية. ويتضمن الكتاب الأخير هذا ثلاثة فصول إضافية هي تحليل الارتباط (الفصل ١٤)، الانحدار غير الخطي (الفصل ١٥) وتقنيات الانحدار عندما يكون المتغير المستقل ثنائيا (الفصل ١٦).

وإحدى الميزات الرئيسة للطبعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية هو الأسلوب الموحد لتطبيق نماذج إحصائية خطية في الانحدار، وفي تحليل التباين، وفي التصميم التجريبي. وبدلا من معالجة هذه الميادين بصورة منعزلة فإننا نسعى إلى تبيان العلاقات الضمنية بينها واستخدام رموز مشتركة في الانحدار، من جهة، وفي تحليل التباين والتصميم التجريبي من جهة أخرى، يسهّل النظرة الموحدة لها جميعا. وقد نُقلت فكرة النموذج الإحصائي الخطي العام، والتي تبرز بصورة طبيعية في سياق نماذج الانحدار، إلى نماذج تحليل التباين ونماذج التصميم التجريبي، كما تُظهر علاقتها بنماذج الانحدار. ولهذا الأسلوب الموحد، أيضا، ميزة البساطة في العرض.

ولم يشتمل هذا الكتاب فقط على المواضيع الأكثر تقليدية في الانحدار وتحليل التباين والتصميم التجريبي الأساسية، ولكنه تطرق أيضا لمواضيع، كثيرا ما استُغفرت مع أنها مهمة في الممارسة العملية. وهكذا فقد كرسنا فصلا بكامله (الفصل العاشر) لمتفاوتات مؤشرة مستقلة. وينتري فصل آخر (الفصل ١٢) إلى عملية بناء نموذج انحدار، بما في ذلك طرق اختيار بمساعدة الحاسوب لتحديد مجموعات جزئية "جيدة" من المتغيرات المستقلة وتحليلها تحليلًا شاملا قبل القيام بالاختيار النهائي لنموذج الانحدار، ومن ثمّ التحقق من صحة نموذج الانحدار المختار. واستخدام تحليل الراسب وتشخيصات أخرى لفحص مصداقية نموذج انحدار هو إيقاع متواتر عبر هذا الكتاب. وكذلك الأمر بالنسبة لاستخدام تدابير علاجية يمكن أن تكون مفيدة عندما لا يكون النموذج مناسبًا. ونؤكد، في تحليل نتائج دراسة، على استخدام طرق التقدير أكثر من اختبارات المعنوية، لأن التقدير، في الغالب، أكثر مغزى في الممارسة العملية. وبما أنه من النادر أن تُعنى المسائل التطبيقية بتقدير بمفرده فقد أكدنا، أيضا، على استخدام طرق التقدير المتزامن.

وقد قُتِمت الأفكار النظرية إلى الدرجة التي نحتاجها من أجل فهم رشيد عند القيام بتطبيقات سليمة. وأعطيت الراعين في ظروف نشر معها أنها تخدم في إيضاح طريقة عمل. وجرى التأكيد على فهم شامل للنماذج، وعلى وجه الخصوص فهم معنى معالم النموذج. ذلك لأن مثل هذا الفهم أمر أساسي لسلامة التطبيقات. ويتضمن الكتاب تشكيلة واسعة من الأمثلة الواقعية وذلك لتوضيح استخدام المبادئ النظرية، ولبيان التنوع العظيم لتطبيقات النماذج الإحصائية الخطية، ولإظهار كيفية القيام التحاليل في المسائل المختلفة. ونستخدم فقرات تحت عنوان " ملاحظات " أو " تعليقات " في كل فصل لتقديم مناقشة إضافية ومسائل تتصل بالمحرر الرئيس لتطور النقاش، وبهذه الطريقة يبقى تقديم الأفكار الأساسية في الفصل تقديمًا يتلاقى التفاصيل والمنطقات التي قد تصرف القارئ عن الفكرة الأساسية.

وكثيرا ما تتطلب تطبيقات النماذج الإحصائية الخطية حسابات مستفيضة. وننتقل من موقع أن الحاسوب متوفر في معظم العمل التطبيقي، فضلا عن ذلك ففي متناول كل مستخدم للحاسوب أنواع مختلفة من الحزم البرمجية الخاصة بتحليل الانحدار وتحليل التباين. وبالتالي فإننا نشرح الخطوات الرياضية الأساسية في توفيق نموذج إحصائي خطي دون الإسهاب في التفاصيل الحسابية. ويسمح لنا هذا الأسلوب بتجنب العديد من الصيغ المعقدة، ونستطيع معه التركيز على المبادئ الأساسية. ونستخدم في هذا الكتاب المدرسي قدرات الحاسوب على إنجاز الحسابات استعمالا واسعا، ونوضح تشكيلة من مخرجات الحاسوب شارحين كيفية استخدامها في التحليل.

وفي نهاية كل فصل (باستثناء الفصل الأول) تقدم مختارات من المسائل. ويمكن للقارئ هنا أن يبرز فهمه للطرائق ويستخدم المفاهيم التي تعلمها في تحليل البيانات. وقد حرصنا على تقديم مسائل تحليل بيانات تمثل تطبيقات أصيلة. وأفضل طريقة للقيام بالحسابات في معظم المسائل هي استخدام حاسب يدوي أو حاسب آلي (حاسوب).

ونفرض أن قارئ الطبعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية قد اجتاز مقررا، يشكّل مدخلا إلى الاستقراء الإحصائي، ويغطي المادة التي أوجزناها في الفصل الأول.

وحساب التفاضل والتكامل غير مطلوب لقراءة نماذج إحصائية خطية تطبيقية ونستخدم أحيانا حساب التفاضل والتكامل لبيان كيفية الحصول على بعض النتائج المهمة، إلا أن هذه الإثباتات مقصورة على التعليقات أو الملاحظات الإضافية ويمكن حذفها دون أية خسارة في استمرارية دراسة الكتاب. وسيجد القراء ذوو المعرفة بحساب التفاضل

والتكامل هذه التعليقات والملاحظات في تسلسلها الطبيعي بحيث يحصلون على فوائد المعاملات الرياضية في سياقها المباشر وفي النماذج الخطية بصورة عامة، وفي الانحدار المتعدد على وجه الخصوص، نحتاج إلى بعض العناصر الأساسية من جبر المصفوفات ويقدم الفصل السادس هذه العناصر من جبر المصفوفات في سياق الانحدار البسيط تسهيلا لتعلمها.

والطبعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية مصممة لاستخدامها في مقررات في النماذج الإحصائية الخطية من مستوى المرحلة الجامعية الأولى ومن مستوى الدراسات العليا، ومقررات ثانية في الإحصاء التطبيقي. ويعتمد مدى استخدام المادة المقدمة في هذا الكتاب المدرسي في مقر معين على مقدار الوقت المتوفر وعلى أهداف المقرر. وبعض من المقررات الممكنة تشمل:

١- مقرر لفصلين دراسيين، كل منهما نصف سنوي، أو لفصلين دراسيين كل منهما ثلث سنوي، في الانحدار، تحليل التباين والتصاميم التجريبية الأساسية يمكن أن يبنى على الفصول التالية:

الانحدار: ٢، ٣، ٤، ٥ (الفقرات من ٥،١ إلى ٥،٣)، ٦، ٧، ٨، ١٠ (الفقرات من ١٠،١ إلى ١٠،٤)، ١١ (الفقرات من ١١،١ إلى ١١،٦)، ١٢.

تحليل التباين: ١٤، ١٥، ١٦، ١٨، ١٩، ٢٠.

تصاميم تجريبية: ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٩.

٢- يمكن أن يبنى مقرر، لفصل ثلثي (Quarter) أو لفصل نصف (Term)، في تحليل الانحدار على الفصول التالية ٢، ٣، ٤، ٥ (الفقرات من ٥،١ إلى ٥،٣)، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ (الفقرات من ١٠،١ إلى ١٠،٤)، ١١ (مواضيع مختارة)، ١٢، ١٣.

٣- يمكن أن يبنى مقرر، لفصل ثلثي أو لفصل نصف، في تحليل التباين على الفصول التالية: ١٤، ١٦، ١٧ (مواضيع مختارة)، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١ (مواضيع مختارة)، ٢٢، ٢٣.

٤- يمكن أن يُبنى مقرر، لفصل ثلثي أو لفصل نصف، في الانحدار وتحليل التباين على الفصول التالية:

الانحدار: ٥،٤،٣،٢ (الفقرات من ٥،١ إلى ٥،٣)، ١٠،٨،٦،٧ (الفقرات من ١٠،١ إلى ١٠،٤).

تحليل التباين: ١٤، ١٥، ١٦، ١٨، ١٩.

٥- يمكن أن يُبنى مقرر، لفصل ثلثي أو لفصل نصف، في التصميم التحريية الأساسية على الفصول التالية: ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩.

وبالقدر الذي يسمح به الوقت يمكن للمدرس أن يغطي مواضيع إضافية من الكتاب. ويمكن استخدام هذا الكتاب، أيضاً، في دراسة شخصية لأشخاص يهتمون بمبادئ إدارة الأعمال، الاقتصاد، والعلوم الاجتماعية، الصحية والأحيائية، ممن يرغبون في تحصيل كفاءة في تطبيق النماذج الإحصائية الخطية.

ويمكن للمدرسين الحصول على كتيّب الحلول من الناشر، إروين (Irwin). ويتضمن هذا الكتيّب، على قرص (ديسك)، البيانات لجميع المسائل والتمارين والمشاريع، ومجموعات البيانات في الملحق.

وليمكن تأليف كتاب كهذا دون مساعدة كبيرة من آخرين. ونحن مدينون للعديد ممن ساهموا في تطوير النظرية والتطبيقات التي توثقت في هذا الكتاب. ونحب، أيضاً، التنويه بإعجابنا بطلابنا الذين ساعدونا بمختلف الطرق على تحديث طريقة العرض في هذا الكتاب. وممتنون للعديد من مستخدمي نماذج إحصائية خطية تطبيقية ونماذج انحدار خطية تطبيقية الذين زودونا بتعليقاتهم ومقترحاتهم النابعة من تدريسهم لهذه الكتاين. ونحن مدينون، أيضاً، للأساتذة جيمس هولستاين (James E. Holstein) جامعة ميسوري (Missouri)، وديفيد شيري (David L. Sherry) جامعة غرب فلوريدا (West Florida)، لمراجعتهم الطيبة الأولى لنماذج إحصائية خطية تطبيقية، وللأساتذة صموئيل كوتز (Samuel Kotz) جامعة ميريلاند (MaryLand)، رالف روسو (Ralph P. Russo) جامعة أيووا (Iowa)، ويسر نال

(Peter F. Thall) جامعة جورج واشنطن (George Washington) مراجعتهم كتاب نماذج انحدار خطية تطبيقية، وللأساتذة جون شيو (John S. Y. Chin) جامعة واشنطن، وجيمس كالفين (James A. Calvin) جامعة ابووا، وميخائيل دريسكول (Michael F. Oriscoll)، جامعة ولاية أريزونا (Arizona State) مراجعتهم الطبعة الثانية من نماذج احصائية خطية تطبيقية. ولقد قدم هؤلاء المراجعون العديد من المقترحات المهمة، التي تستحق جزيل امتناننا.

وقد ساعدنا جورج كوتسونيس (George Cotsonis)، مارجريت كولشاك (Margaret S. Kolczak) وآلفين رامبي (Alvin H. Rampey) بشكل متقن في تدقيق المخطوطة، وفي إعداد الرسوم باستخدام الحاسوب، وبطرق أخرى. أما جون ديزني (June Disney) وساندرا جون هاتفيلد (Sandra June Hatfield) فقد قامتا بجميع الجهد الطباعي تقريبا، ونصدنا بمقدرة لتهيئة مخطوطة صعبة. ونحن نمتنون جدا هؤلاء الأشخاص جميعا لمجهودهم ومساعدتهم.

وأخيرا فقد تحملت عائلتنا بصبر، الضغوط التي سببها التزامنا باستكمال هذه النسخة المنقحة، ونحن مقلّبون لتساعهم.

المؤلفون

المحتويات

مقدمة المراجعين.....

مقدمة المؤلفين.....

الفصل الرابع عشر: نموذج تخمين وحيد العامل واختبارات

١ - ١٤) العلاقة بين الانحدار وتحليل التباين..... ١

٢ - ١٤) الدراسات التحريية ودراسات الملاحظة، العوامل والمعالجات..... ٥

٣ - ١٤) تصميم دراسات تحليل التباين..... ٩

٤ - ١٤) استخدامات نماذج تحليل التباين..... ١٢

٥ - ١٤) نموذج تخمين I - مستويات مثبتة للعامل..... ١٣

٦ - ١٤) توفيق نموذج تخمين..... ٢٠

٧ - ١٤) تحليل التباين..... ٢٦

٨ - ١٤) اختبار F لتساوي متوسطات مستويات عامل..... ٣٨

٩ - ١٤) مَدْعَلات ومُخَرَّجات الحاسب الآلي لحزم التباين..... ٤٢

١٠ - ١٤) صياغة بديلة للنموذج I..... ٤٥

١١ - ١٤) تحليل التباين أحادي العامل بأسلوب الانحدار..... ٤٩

الفصل الخامس عشر: تحليل تأثيرات مستويات عامل

١ - ١٥) الرسوم بيانية لمتوسطات مستويات العامل للقلّة..... ٧٢

٢ - ١٥) تقديم تأثيرات مستويات عامل..... ٧٩

- ٨٧ (١٥ - ٣) طريقة توكي للمقارنات المتعددة
- ٩٣ (١٥ - ٤) طريقة شيفه للمقارنات المتعددة
- ٩٧ (١٥ - ٥) طريقة المقارنات للمتعددة ليونفرون
- ٩٩ (١٥ - ٦) اختبارات بلرجة واحدة من الحرية
- ١٠٥ (١٥ - ٧) تحليل تأثيرات عامل عندما يكون كمياً
- (١٥ - ٨) نموذج انحدار بخطأ طبيعي

الفصل السادس عشر : تشخيصات وتدابير علاجية - III

- ١٢٨ (١٦ - ١) تحليل الرواسب
- ١٣٦ (١٦ - ٢) اختبارات لتساوي التباينات
- ١٤٤ (١٦ - ٣) تحويلات
- ١٤٨ (١٦ - ٤) تأثيرات الجيود عن النموذج

الفصل السابع عشر: تخطيط لحجوم العينات، اختبارات لا معلمية ونموذج تحاين عشوائي

- ١٦٣ (١٧ - ١) التخطيط لحجوم العينات بأسلوب القوة
- ١٧٢ (١٧ - ٢) التخطيط لحجوم العينات عن طريق التقدير
- ١٧٤ (١٧ - ٣) تخطيط لحجوم العينات لإيجاد "أفضل" معالجة
- ١٧٦ (KRUSKAL - WALLIS) (١٧ - ٤) اختبارات الرتب لكروسكال - والاس
- ١٨٢ (١٧ - ٥) اختبار الوسيط
- ١٨٤ (١٧ - ٦) نموذج تحاين III - مستويات العامل عشوائية

الفصل الثامن عشر: تحليل التباين ثنائي العامل لحجوم متساوية للعينات

- ٢١٧ (١٨ - ١) دراسات متعددة العوامل
- ٢٢٣ (١٨ - ٢) معنى عناصر النموذج
- ٢٤٢ (١٨ - ٣) نموذج I للدراسات ثنائية العامل (مستويات مثبتة للعوامل)
- ٢٤٧ (١٨ - ٤) تحليل التباين
- ٢٦٠ (١٨ - ٥) تقويم مصلقية نموذج تحاين
- ٢٦٢ (١٨ - ٦) اختبارات F

- ٢٦٨ مُدخلات ومُخرجات الحاسب الآلي (١٨ - ٧)
- ٢٦٨ أسلوب الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل (١٨ - ٨)
- ٢٧٤ أساليب أخرى لتحليل التباين (١٨ - ٩)

الفصل التاسع عشر: تحليل وتخطيط دراسات ثنائية العامل بحجوم متساوية العينات

- ٢٩٧ استراتيجيات التحليل (١٩ - ١)
- ٢٩٩ تحليل تأثيرات العوامل عندما لا يتفاعل العاملان (١٩ - ٢)
- ٣٠٧ تحليل تأثيرات العوامل عندما تكون التفاعلات مهمة (١٩ - ٣)
- ٣١٤ التحليل عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية (١٩ - ٤)
- ٣١٦ التحليل عندما يكون أحد العاملين أو كلاهما كميًا (١٩ - ٥)
- ٣٢٢ تخطيط حجوم العينات (١٩ - ٦)

الفصل العشرون: حجوم عينات غير متساوية في دراسات ثنائية العامل

- ٣٣٧ حجوم عينات غير متساوية (٢٠ - ١)
- ٣٣٨ استخدام أسلوب الانحدار لاختبار تأثيرات العوامل (٢٠ - ٢)
- ٣٣٨ عندما تكون حجوم العينات غير متساوية (٢٠ - ٣)
- ٣٤٧ تقدير تأثيرات العوامل عندما تكون حجوم العينات غير متساوية (٢٠ - ٣)
- ٣٥٣ خلايا فارغة في دراسات ثنائية العامل (٢٠ - ٤)
- ٣٥٦ حزم الحسابات الإحصائية (٢٠ - ٥)

الفصل الحادي والعشرون: نماذج تأثيرات عشوائية ومختلطة للدراسات تتناول عاملين

ومواضيع أخرى في تحليل التباين (التحسين)

- ٣٦٩ مشاهدة واحدة لكل معالجة (٢١ - ١)
- ٣٧٧ اختبار توكي من أجل التجميعية (٢١ - ٢)
- ٣٨١ اختبارات التحسين عندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها (٢١ - ٣)
- ٣٨١ الأهمية نفسها (٢١ - ٣)
- ٣٩١ نماذج II (مستويات عامل عشوائية) و III (مستويات عامل مختلطة) للدراسات تتضمن عاملين (٢١ - ٤)
- ٣٩٥ اختبارات تحليل التباين للنموذجين II و III (٢١ - ٥)

٢١-٦) تقدير تأثيرات عامل في النموذجين II و III ٤٠١

الفصل الثاني والعشرون: دراسات متعددة العوامل

٢٢-١) نموذج I (مستويات العامل مثبتة) لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل ٤١٧

٢٢-٢) تحليل التباين ٤٢٧

٢٢-٣) تقويم مصداقية نموذج التحاين ٤٣٧

٢٢-٤) تحليل تأثيرات العوامل ٤٣٨

٢٢-٥) مثال عن دراسة تتضمن ثلاثة عوامل ٤٤١

٢٢-٦) تخطيط أحجام العينات ٤٤٨

٢٢-٧) أحجام عينات غير متساوية في دراسات متعددة العوامل ٤٥١

٢٢-٨) النموذجان II و III لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل ٤٥٣

الفصل الثالث والعشرون: تحليل التغاير

٢٣-١) أفكار أساسية ٤٧٣

٢٣-٢) نموذج تغاير وحيد العامل ٤٧٨

٢٣-٣) مثال تحليل تغاير وحيد العامل ٤٨٥

٢٣-٤) تحليل التغاير وحيد العامل كتعديل لتحليل التباين ٤٩٥

٢٣-٥) دراسات متعددة العوامل ٥٠٨

٢٣-٦) اعتبارات إضافية في استخدام تحليل التغاير ٥١٦

الفصل الرابع والعشرون: تصميم القطاعات العشوائية - I

٢٤-١) تصميم تجارب ٥٣٣

٢٤-٢) إسهامات الإحصاء في عملية التجريب ٥٣٥

٢٤-٣) عناصر تصميم القطاع العشوائي ٥٤٢

٢٤-٤) نموذج تصميم القطاع العشوائي التام ٥٤٩

٢٤-٥) تحليل التباين والاعتبارات ٥٥٠

٢٤-٦) تقويم مصداقية نموذج قطاع عشوائي ٥٥٤

٢٤-٧) تحليل تأثيرات المعالجات ٥٥٩

٢٤-٨) معالجات عاملية ٥٦٢

٢٤-٩) تخطيط تجارب قطاع عشوائي ٥٦٥

٢٤-١٠) أسلوب الانحدار لتصميم قطاع عشوائي ٥٦٩

٥٧١ (٢٤-١١) تحليل التباين لتصاميم قطاع عشوائي

الفصل الخامس والعشرون: تصاميم القطاع العشوائي - II

٥٨٧ (٢٥-١) الاستجابات الثنائية للمتغير التابع

٥٩٠ (٢٥-٢) اختيار الرتبة لفريلمان

٥٩٣ (٢٥-٣) المشاهدات المفقودة

٥٩٧ (٢٥-٤) تأثيرات قطاع عشوائي

٦٠٦ (٢٥-٥) تصاميم قطاع عشوائي معمة

٦١٠ (٢٥-٦) استخدام أكثر من متغير لجميع في قطاعات

الفصل السادس والعشرون: التصاميم الحاضنة والمعالجة الجزئية

٦٢١ (٢٦-١) التمييز بين العوامل المتحاضنة والمتصلية

٦٢٥ (٢٦-٢) تصاميم حاضنة ثنائية العامل

٦٢٩ (٢٦-٣) تحليل التباين لتصاميم حاضنة ثنائية العامل

٦٣٩ (٢٦-٤) تقويم مصداقية نموذج تصميم حاضن

٦٤١ (٢٦-٥) تحليل تأثيرات العوامل في تصاميم حاضنة ثنائية العامل

٦٤٦ (٢٦-٦) التحضين غير المتساوي والتكرارات في تصاميم حاضنة ثنائية

٦٤٥ العامل

٦٤٨ (٢٦-٧) المعالجة الجزئية في دراسة أحادية العامل بتصميم تام العشوائية

٦٥٧ (٢٦-٨) المعالجة الجزئية للبحث في ثلاث مراحل

الفصل السابع والعشرون: قواعد تطوير نماذج تخمين وجدول لتصاميم الموازية

٦٧٥ (٢٧-١) قاعدة لتطوير نموذج

٦٧٦ (٢٧-٢) قاعدة لإيجاد مجاميع المربعات ودرجات حرية

٦٨١ (٢٧-٣) قاعدة لإيجاد توقع متوسط المربعات

٦٨٨ (٢٧-٤) دراسة متصلة ثنائية العامل - تأثيرات عامل مختلطة

٦٩٠ (٢٧-٥) دراسة متصلة حاضنة ثلاثية العامل - تأثيرات عامل مختلطة

٦٩٨ (٢٧-٦) عدم وجود تكرارات و/أو بعض التفاعلات مساوية للصفر

الفصل الثامن والعشرون: القياسات المتكررة والتصاميم ذات الصلة

٧٠٧ (٢٨-١) عناصر تصاميم القياسات المتكررة

- ٧١٠-٢٨) تجارب أحادية العامل مع قياسات متكررة لجميع المعالجات ٧١٠
 ٧٢٤-٢٨) تجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة لكل من العاملين ٧٢٤
 ٧٣٤-٢٨) تجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة على عامل واحد ٧٣٤
 ٧٤٦-٢٨) تصميم الوحدة المنشقة للدراسات ثنائية العامل ٧٤٦

الفصل التاسع والعشرون: المربع اللاتيني والتصاميم ذات العجلة

- ٧٧٣-٢٩) عناصر رئيسية ٧٧٣
 ٧٨٤-٢٩) نموذج للمربع اللاتيني ٧٨٤
 ٧٨٤-٢٩) تحليل تباين واختبارات ٧٨٤
 ٧٩٠-٢٩) تقويم مصداقية نموذج مربع لاتيني ٧٩٠
 ٧٩٣-٢٩) تحليل تأثيرات المعالجات ٧٩٣
 ٧٩٤-٢٩) معالجات عملية ٧٩٤
 ٧٩٦-٢٩) تخطيط تجارب المربع اللاتيني ٧٩٦
 ٧٩٨-٢٩) أسلوب الانحدار في تصميم المربع اللاتيني ٧٩٨
 ٨٠٠-٢٩) مشاهدات مفقودة ٨٠٠
 ٨٠١-٢٩) تكرارات إضافية لتصميم للمربعات اللاتينية ٨٠١
 ٨١٣-٢٩) تأثيرات عشوائية لتفوي جميع ٨١٣
 ٨١٥-٢٩) مربعات يودين واللاتيني الإغريقي ٨١٥

الملاحق

- ٨٢٧-ملحق (أ) ٨٢٧
 ٨٥٧-ملحق (ب) ٨٥٧
 ٨٧١-ملحق (ج) ٨٧١

ثبت المصطلحات

- ٨٧٧-أولاً: عربي - انجليزي ٨٧٧
 ٨٨٤-ثانياً: انجليزي - عربي ٨٨٤
 ٨٩١-كشف الموضوعات ٨٩١

نموذج تحليل وحيد العامل واختبارات

نماذج تحليل التباين (التحايين) هي أدوات إحصائية تستخدم بكثرة لدراسة العلاقة بين متغير تابع ومتغير واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة. وهي لا تتطلب وضع أية افتراضات حول طبيعة العلاقة الإحصائية كما لا تتطلب أن تكون المتغيرات المستقلة كمية.

وفي هذا الفصل سوف نتطرق أولاً إلى العلاقة بين تحليل التباين والانحدار ومن ثم ستابع العناصر الأساسية لنماذج تحليل التباين وحيدة العامل وهي نماذج مناسبة عند دراسة متغير مستقل واحد. فيما تبقى من القسم III من الكتاب (وهو القسم الأول من الجزء الثاني) سنستمر في مناقشة نماذج تحليل التباين وحيدة العامل. أما في القسم IV (أو القسم الثاني من الجزء الثاني) فسوف ندرس نماذج تحليل تباين متعددة العوامل حيث يتناول البحث اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

(١٤-١) العلاقة بين الانحدار وتحليل التباين

كما سبق ورأينا فإن نموذج تحليل الانحدار يشرح العلاقة الإحصائية بين متغير مستقل أو أكثر ومتغير تابع. وفي نماذج الانحدار العادية تكون كل من المتغيرات المستقلة و المتغير التابع متغيرات كمية (في مناقشتنا هذه ندع جانبا موضوع استخدام المتغيرات المؤشرة في نموذج تحليل الانحدار والتي تناولناها بالبحث في الفصل العاشر). إن دالة الانحدار تصف طبيعة العلاقة الإحصائية بين متوسط الاستجابة ومستوى (مستويات) المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة).

لقد تطرقنا إلى تحليل التباين عندما تناولنا بالبحث موضوع الانحدار. وقد كان استخدامنا له يتعلق باختبارات متنوعة حول معاملات الانحدار، وحول توفيق نموذج انحدار، وما شابه ذلك. وفي الواقع فإن تحليل التباين أعم بكثير من الاستخدام الذي أشرنا إليه في نماذج الانحدار. فنماذج تحليل التباين تهتم بالعلاقة الإحصائية بين متغير تابع ومتغير واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة. وهي مناسبة لبيانات الملاحظة والبيانات الناتجة عن تجارب مصممة مثلها في ذلك مثل نماذج الانحدار. وكما في نماذج الانحدار للمعادلة تماماً فإن المتغير التابع لا بد أن يكون متغيراً كمياً.

وتختلف نماذج تحليل التباين عن نماذج الانحدار العادية في ناحيتين رئيسيتين، هما:

١- في نماذج تحليل التباين يمكن أن تكون المتغيرات المستقلة نوعية (مثلاً: الجنس موقع جغرافي، مناوبة العمل في مصنع).

٢- عندما تكون المتغيرات المستقلة كمية، فإننا لا نضع أية افتراضات عن طبيعة العلاقة الإحصائية بين هذه المتغيرات والمتغير التابع. وهكذا فإن ما نواجهه من حاجة لتحديد طبيعة دالة الانحدار في تحليل الانحدار العادي لا تبرز في نماذج تحليل التباين.

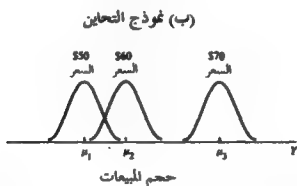
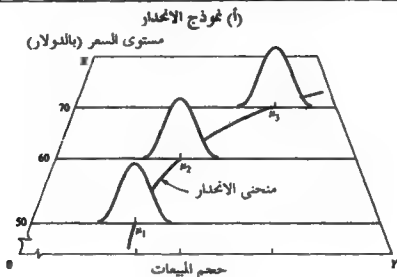
توصيفات

ويوضح الشكل (١-١٤) الاختلافات الجوهرية بين نماذج تحليل التباين ونماذج الانحدار في حالة كون المتغير المستقل متغيراً كمياً. ففي الشكل (١-١٤)أ، نبين نموذج تحليل الانحدار للدراسة تحديد سعر تتضمن ثلاثة مستويات مختلفة للأسعار $X = \$50, \$60, \$70$ ، لاحظ أنه قد تم تلوير المستوى XY من وضعه المعتاد بحيث يصبح المحور Y في مواجهة المراقب. ولكل مستوى من مستويات المتغير المستقل هناك توزيع احتمالي لحجم المبيعات وتقع متوسطات هذه التوزيعات الاحتمالية على منحني الانحدار الذي يصف العلاقة الإحصائية بين مستوى السعر ومتوسط حجم المبيعات.

ويوضح الشكل (١-١٤)ب نموذج تحليل التباين للدراسة نفسها، ونلاحظ هنا أنه تم اعتبار المستويات الثلاثة للأسعار كمجموعات مختلفة، كل منها يقود إلى توزيع

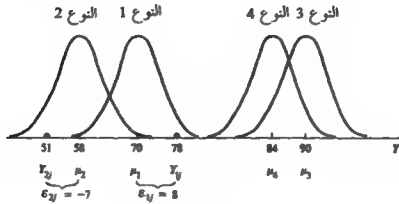
احتمالي لحجم المبيعات. ولا يأخذ نموذج تحليل التباين، في الاعتبار، الفروق الكمية في مستويات الأسعار الثلاثة وكذلك علاقتها الإحصائية بمتوسط حجم المبيعات.

شكل (١٤ - ١) العلاقة بين نماذج تحليل الانحدار والتخمين



ويوضح الشكل (١٤-٢) نموذج تحليل التباين لدراسة تأثير أربعة أنواع من أنظمة الحوافز التشجيعية على إنتاجية المستخدمين. وفي هذه الحالة يقابل كل نوع من أنظمة الحوافز بمتنوع مختلف، ويرتبط بكل متنوع منها توزيع احتمالي لإنتاجية المستخدمين. وبما أن نوع نظام الحافز التشجيعي هو متغير نوعي فإن الشكل (١٤-٢) لا يحتوي على التمثيل المقابل لنموذج انحدار.

شكل (١٤ - ٢) تمثيل تحليل التباين لنموذج أنظمة الحوافز التشجيعية



إنتاجية الموظف

الاختبار بين نوعين من النماذج

عندما تكون المتغيرات المستقلة متغيرات نوعية، فليس هناك في الأساس اختبار بين نماذج تحليل الانحدار وتحليل التباين. ولكن الوضع يختلف عندما يكون المتغير المستقل كمياً. ففي هذه الحالة ينطوي الاختبار من جهة على تحليل لا يتطلب تحديداً لطبيعة العلاقة الإحصائية (تحليل التباين) ومن جهة أخرى ينطوي على تحليل يتطلب مثل ذلك التحديد (تحليل الانحدار).

وإذا كان هناك شك كبير حول طبيعة العلاقة الإحصائية، فإن الاستراتيجيات المتبع أحياناً، هو أن نستخدم أولاً نموذج تحليل التباين لدراسة تأثيرات المتغيرات المستقلة على المتغير التابع، من غير أية فرضيات مقيدة حول طبيعة العلاقة الإحصائية. وتكون الخطوة التالية عندئذ هي العودة إلى تحليل الانحدار للاستفادة من الميزة الكمية للمتغيرات المستقلة.

ملاحظة

إن كُنْتُ قد درست الفصل العاشر، فستعلم أن تحليل الانحدار الذي يستخدم المتغيرات المؤشرة يمكن أن يتناول متغيرات مستقلة نوعية كما يمكنه وبالطرق نفسها تناول متغيرات كمية دون وضع افتراضات حول طبيعة العلاقة الإحصائية. ومع استخدام كهذا للمتغيرات المؤشرة في نماذج الانحدار نحصل على النتائج نفسها التي نحصل عليها من نماذج تحليل التباين. وسبب استخدام نماذج تحليل التباين كطريقة إحصائية متميزة هو أن بنية المتغيرات المؤشرة المستقلة تسمح لحسابات مبسطة يمكن ملاحظتها بشكل واضح في الطرق الإحصائية لتحليل التباين.

(١٤-٢) الدراسات التجريبية ودراسات الملاحظة، العوامل والمعالجات

كما ذكرنا سابقاً، يمكن استخدام نماذج تحليل التباين مثلها مثل نماذج تحليل الانحدار في كل من البيانات التجريبية وبيانات الملاحظة. وبصورة مماثلة، فإن نماذج تحليل التباين مصممة لتطبيقات يكون موضع الاهتمام فيها تأثيراً واحداً أو أكثر من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع. ولكن تختلف، في الغالب، المصطلحات المستخدمة في نماذج تحليل التباين، ففي نماذج تحليل التباين مثلاً تدعى المتغيرات المستقلة عوامل أو معالجات. وستطرق الآن إلى دور الدراسات التجريبية ودراسات الملاحظة في تحليل التباين وإلى التقابل بين العوامل والمعالجات في تحليل التباين، وبين المتغيرات المستقلة في تحليل الانحدار.

الدراسات التجريبية ودراسات الملاحظة

إن نماذج تحليل التباين مفيدة للبيانات التي تأتي من كل من الدراسات التجريبية ودراسات الملاحظة.

مثال ١. دُرِس تأثير أربع مستويات لدرجة حرارة الطبخ على انتفاخ عجة يبيض معدة من خليط، وذلك بتخصيص خمس علب من الخليط عشوائياً لكل مستوى من مستويات درجة حرارة الطبخ. وتعتبر هذه الدراسة تجريبية إذ يتم التحكم في المتغير المستقل الذي يعيننا (درجة حرارة الطبخ) من قبل المحرّب. والوحدات التجريبية هنا

هي علب الخليط العشرين. والتصميم التجريبي المستخدم هو التصميم تام العشوائية، حيث تم التخصيص العشوائي للعشرين علية من الخليط على درجات حرارة الطبخ الأربعة وفق الطريقة التي شرحت في الفصل الثاني.

مثال ٢. في دراسة لآثار مستوى التعليم للباعة ونوع خبزتهم على حجم مبيعاتهم تم اختيار عينة عشوائية من الباعة العاملين حاليا لدى الشركة من ٢٠٠ الحصول على معلومات عن أعلى شهادة، نوع الخبزة، وحجم المبيعات لكل من الباعة الذين اختيروا. هذه دراسة مشاهدة إذ تم الحصول على البيانات دون التحكم في المتغيرات المستقلة ذات العلاقة (التعليم ونوع الخبزة).

العامل

العامل هو متغير مستقل يراد دراسته في أي بحث ما. مثلا في بحث لدراسة تأثير السعر على مبيعات بضاعة ثمينة، نريد دراسة السعر كعامل، وبصورة مشابهة نجد في دراسة لمقارنة مدى شعبية أربعة برامج تلفزيون أن العامل هنا هو نوع برنامج التلفزيون. وفي مثال انتفاخ عجة البيض، العامل هو درجة حرارة الطبخ.

مستوى العامل

مستوى عامل هو شكل معين لذلك العامل ففي دراسة الأسعار في الشكل (١٤-١)، اعتمدنا ثلاثة أسعار هي \$50, \$60, \$70. وكل من هذه الأسعار هو مستوى للعامل المدروس، ونقول إن لعامل السعر ثلاثة مستويات في هذه الدراسة. وكذلك آخر، في دراسة مدى تأثير لون ورقة الاستبيان على معدل الاستجابة في مسح بريدي، نجد أن لون الورقة هو العامل تحت الدراسة وكل لون مختلف جرى استخدامه هو مستوى لذلك العامل. وفي مثال انتفاخ عجة البيض، كل درجة حرارة للطبخ هي مستوى عامل.

دراسات وحيدة العامل ومتعددة العوامل

تختلف الدراسات باختلاف عدد العوامل المدروسة فبعضها دراسات وحيدة العامل وذلك عندما ينحصر الاهتمام بعامل واحد، فقط. وعلى سبيل المثال فإن دراسة جاذبية أربعة برامج تلفزيون المذكورة آنفا هي مثال على دراسة وحيدة العامل، وفي

الدراسات متعددة العوامل تتم دراسة عاملين أو أكثر في الوقت نفسه. وكمثال على بحث متعدد العوامل نذكر دراسة لتأثيرات درجة الحرارة ودرجة تركيز مادة مذابة على الانتاج في عملية كيميائية معينة.

في هذه الحالة تجرى دراسة عاملين - درجة الحرارة والتركيز - في الوقت نفسه وذلك للحصول على معلومات عن تأثيراتها. وبصورة مماثلة ففي مثال حجم المبيعات المذكور سابقا تمت دراسة عاملين في الوقت نفسه هما مستوى التعليم ونوع الخبرة. وسنتناقش الدراسات متعددة العوامل في القسم IV أما الآن فسوف نركز على دراسات وحيدة العامل.

عوامل تصنيفية وتجريبية

يمكن تصنيف العامل وفقا لما إذا كان عاملا تجريبيا أو عاملا تصنيفيا. وفي أي دراسة تعتمد على بيان مشاهدات تكون العوامل تحت الدراسة عوامل تصنيفية. ويتعلق عامل التصنيف بخصائص الوحدات التجريبية المدروسة ولا يخضع لتحكم الباحث. وعلى سبيل المثال نجد في مثال حجم المبيعات أن شكل مستوى التعليم ونوع الخبرة هما عاملا تصنيف لأنهما يشيران إلى خصائص الباعة في الدراسة ولم يتم التحكم فيهما تجريبيا ومن جهة أخرى، فإن العامل التجريبي هو عامل يتم تخصيص مستوياته عشوائيا إلى الوحدات التجريبية. وكمثال نذكر عامل درجة حرارة الطبخ في مثال انتفاخ عجة البيض.

لقد أشرنا من قبل إلى أن البيانات التجريبية تقدم أساسات للنتائج أكثر ثباتا مما هو الحال في بيانات المشاهدات. وإذا كانت العوامل التجريبية ستظهر، فقط، في الدراسات التجريبية وتظهر العوامل التصنيفية في دراسات للمشاهدة فقد لا تكون هناك حاجة للتمييز بين هذين النوعين من العوامل. ولكن عوامل التصنيف يمكن أن تظهر في الدراسات التجريبية ولذلك فمن المهم أن نعرفها على هذا الأسس إذ سوف لا تكون الاستقرايات المتعلقة بهذه العوامل واضحة وضوح الاستقرايات الخاصة بالعوامل التجريبية.

مثال. أحد صانعي الأجهزة المنزلية يدير ثلاثة مراكز للتدريب في الولايات المتحدة وذلك لتدريب ميكانيكيين على صيانة منتجات الشركة. وفي كل مركز يتم دراسة

برنامجين مختلفين للتدريب، ويتم تخصيص للتدريين عشوائيا لكل من هذين البرنامجين. يمكن اعتبار هذه الدراسة ذات عاملين هما برنامج التدريب ومركز التدريب. فإذا كان أحد هذين البرنامجين أفضل من الآخر في المراكز الثلاثة، فإن الدليل يكون واضحا تماما فيما يتعلق بتأثيرات برنامجي التدريب، لأن للتدريين في كل مركز قد خصصوا عشوائيا إلى البرنامجين.

ومن جهة أخرى، فإن الفروق بين المراكز الثلاثة لا يمكن تفسيرها بالوضوح نفسه لأن مركز التدريب هو عامل تصنيف. ويمكن أن يتفوق أحد المراكز كنتيجة لأي مجموعة من الأسباب، من ذلك مثلا أن المدرسين لديه يعملون بشكل أفضل، أو أن لديه إمكانيات أفضل أو بسبب أن للتدريين الذين خصصوا له يتمون إلى منطقة جغرافية مستوى التعليم فيها أفضل. وقد نحتاج إلى بيئة خارجية حول ما إذا كان مستوى التعليم للتدريين هو نفسه في المراكز الثلاثة، أو كون الإمكانيات المادية متساوية، وما شابه، وذلك قبل الوصول إلى فهم واضح لأسباب الفروق بين مراكز التدريب.

العوامل الكمية والنوعية

في النهاية يلزمنا التفريق بين العوامل الكمية والعوامل النوعية. فالعامل النوعي هو عامل تختلف مستوياته وفقا لصفة نوعية. ومن الأمثلة على هذا نوع الإعلان أو صنف من أصناف مانع للصدأ. وعلى الوجه الآخر، فإن العامل الكمي هو عامل يوصف كل مستوى من مستوياته بقيمة عددية على تدريج أو سلم قياس والأمثلة على هذا قياس حرارة بالدرجة المئوية، أو عمر بالسنوات أو سعر بالدولارات.

المعالجات

في الدراسات وحيدة العامل تقابل المعالجة مستوى العامل. وهكذا يشكل كل إعلان من خمسة أنواع من الإعلانات معالجة. أما في دراسات متعددة العوامل، فإن المعالجة هي تركيبة من مستويات العوامل. وهكذا ففي دراسة لتأثير لون التغليف (أحمر، أزرق) والسعر (\$25، \$29) على حجم المبيعات، يعتبر كل تركيبة، مثلا، لون التغليف أحمر والسعر \$25. وتحتوي هذه الدراسة بالذات على أربع

معالجات إذ يوجد أربع تركيبات مختلفة من لون التغليف والسعر.

(١٤-٣) تصميم دراسات تحليل التباين

سوف نناقش الآن باختصار بعض الاعتبارات المهمة في تصميم دراسات تحليل التباين وبعض هذه الاعتبارات ملائم، على وجه الخصوص، للدراسات التجريبية، بينما يناسب بعضها الآخر كلا من الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة.

اختيار المعالجات

إن اختيار المعالجات التي تدخل في أي دراسة هو في الأساس مسألة تخص الباحث. ولكن قد يكون من المناسب هنا إيراد بعض التعليقات العامة. ففي أي دراسة علمية ينبغي أن تكون المعالجات قادرة على تقديم شيء من التبصر بالآلية التي تقف خلف الظاهرة المدروسة. وينبغي ألا تحاول الدراسات الأولية تفحص هذه الآلية بتفصيل تام، بل المفضل أن تهدف إلى إيجاد العوامل الأساسية التي تنطوي عليها هذه الدراسة، وتحصل على مؤشرات عن حجم تأثيراتها. ويمكن عندئذ إجراء دراسات لاحقة للحصول على نتائج أكثر تفصيلاً.

وحتى لو لم تكن الدراسة ذات اهتمامات علمية وإنما عملية فمن المفضل غالباً إدخال معالجات تزودنا ببعض التفسير للنتائج. إقراض مثلاً أن شركة ما تخطط لشراء نوع جديد من آلات التحفيز من مصنع جديد، وترغب في مقارنة هذا النوع الجديد مع الآلات الحالية عن طريق إجراء تجربة. ولأن حجم الآلات الجديدة أكبر بكثير من الآلات الحالية، فإن الشركة ترغب في إدخال نوع ثالث من الآلات في التجربة، وهي آلات لها نفس حجم الآلات الحالية ولكنها من المصنع الجديد. وبهذه الطريقة، فإن الشركة ستحصل على معلومات عما إذا كان يمكن نسبة أية فروقات نلاحظها بين الآلات الحالية والآلات الجديدة، إلى المصنع أو إلى حجم الآلة أو إليهما معاً.

تعريف المعالجة. يمكن أن يشكل تعريف المعالجة مسألة صعبة. اعتبر تجربة لدراسة ما إذا كان الفورتران أو الباسكال هي لغة برمجة أفضل للتدريس في مقرر ابتدائي في

الحاسب. بعض المدرسين سيفضلون الفورتران، بينما البعض الآخر سيفضلون الباسكال. فهل ينبغي أن نعرفّ المعالجات على أنها لغة البرمجة التي درّسها الموجهون الذين يفضلون تلك اللغة؟ ولو كان الأمر كذلك، فإن الفروقات في النتائج ربما تكون بسبب الفروقات بين مجموعتي الموجهين. هل ينبغي أن لا يتضمن تعريف المعالجة الموجه، فيتم تخصيص الموجهين عشوائيا وبحيث يجبر بعض منهم على تدريس لغة برمجة لا يفضلونها؟ أم هل ينبغي أن تكون رغبة الموجه عاملا آخر بحيث يقوم كل موجه بتدريس كلا اللغتين؟ إن المشاكل من هذا النوع تحتاج إلى حل متأن بحيث تكون نتائج الدراسة مفيدة.

معالجة حيادية. نحتاج لمعالجة حيادية في بعض التجارب ولكنه ليس في كل التجارب. تتألف المعالجة الحيادية من تطبيق الاجراءات ذاتها على الوحدات التجريبية المستخدمة في المعالجات الأخرى، باستثناء ما يتعلق منها بالتأثيرات تحت الدراسة. فعلى سبيل المثال، في دراسة على أطعمة مضافة يمكن أن تتألف المعالجة من قطعة من نوع من الخضار محتوية على مادة مضافة وتقدم إلى شخص ما في إطار تجربة في معمل. والمعالجة الحيادية هنا يمكن أن تكون قطعة من نوع الخضار نفسه وفي إطار التجربة ذاته فيما عدا أنه لا يضاف للقطعة أية مواد.

وهناك حاجة لاستخدام معالجة حيادية عندما يكون التأثير العام للمعالجات المدروسة غير معروف أو عندما يكون التأثير العام للمعالجات المدروسة معروفا ولكنه غير متسق تحت كل الظروف. ففي مثال الطعام المضاف يفرض أنه من المعلوم أن للإضافة الطعمية A فعالية عالية في تحسين مذاق الخضار. ويراد معرفة ما إذا كان للإضافات B و C الفعالية نفسها أو ما إذا كانت فعاليتها أفضل، ففي هذه الحالة، يوجد معيار للمقارنة ولا يحتاج إلى معالجة حيادية. وعلى الوجه الآخر، افترض أنه ليس لدينا معلومات عن التأثير العام للمواد المضافة الثلاث وأنتا حصلنا على النتائج التالية (درجات التصنيف تراوح بين 0 و 60):

الإضافة	متوسط درجة التصنيف
A	39
B	37
C	41

افترض أن أحجام العينات كبيرة بحيث يكون متوسط درجات التصنيف دقيقاً جداً. فمع غياب معيار للمقارنة، لا يمكن معرفة ما إذا كان كل من المواد المضافة فعالاً أو ما إذا لم يكن أي منها فعالاً.

إنه لأمر حاسم أن يتم تطبيق المعالجة الحيادية في ظروف تجريبية مطابقة للمعالجات الأخرى. ففي مثال المواد المضافة للطعام، على سبيل المثال، فإن القيام بمسح للمستهلكين في المنازل بحيث يُطلب من الأشخاص أن يصنفوا مذاق العام للخضار (بدون أي إضافات) تصنيفاً كمياً يتخذ السلم نفسه المستخدم في التجربة، هذا المسح لا يتمتع بموهلات المعالجة الحيادية إذ يمكن لمثل هذا المسح أن يعطي متوسط درجات تصنيف 22، مما يقترح أن المواد الثلاث المضافة تزيد بشكل كبير في مذاق الخضار ولكن هذا الاستنتاج يمكن أن يكون مضللاً تماماً. فلو أن المعالجة الحيادية أدخلت في التجربة بحيث يُعطى للمستهلكين قطع من الخضار بدون إضافات في سياق التجربة القائمة في العمل، فإن متوسط الدرجات للمعالجة الحيادية يمكن أن يكون 40. وهذه النتيجة ستضمن أن أيا من المواد المضافة غير فعال في تحسين مذاق الخضار. والسبب وراء ارتفاع متوسط الدرجات في التجربة العملية يمكن أن يكون بتأثير عوامل شخصية مرتبطة بالإجراءات التجريبية. فربما كان الطعام مقدماً في التجربة العملية أفضل مذاقاً منه مقدماً في المنزل، أو ربما يكون المستهلكون بمحامين بإعطاء درجات أعلى عندما يشاركون في دراسة تجريبية. وهكذا فإن المعالجة الحيادية المستوعبة ضمن التجربة، فقط يمكن لها أن تخدم كمعيار مناسب للمقارنة.

الوحدة الأساسية للدراسة

قضية مهمة أخرى في كل من الدراسات التجريبية ودراسات الملاحظة هي كيف تُحدد الوحدة الأساسية للدراسة. اعتبر، على سبيل المثال، دراسة تجريبية عن نظامين

من أنظمة المكافأة التشجيعية. فهل ينبغي أن تكون وحدة الدراسة مستخدما مفردة، أم فترة عمل، أم مصنعا؟ وفي الغالب علمي الاعتبار الفنية اختيار حجم وحدة الدراسة. وعلى سبيل المثال، قد تعوق اعتبارات أخلاقية استخدام أنظمة مكافأة تشجيعية مختلفة في المصنع نفسه.

ويظهر وجه مختلف من أوجه تعريف الوحدة الأساسية للدراسة في مباحث المبيعات وما شابهها من الظواهر. فلنفترض أننا مهتمون بقياس فعالية حملة أنواع مختلفة من الدعايات التلفازية على المبيعات خلال فترة من الزمن بعد عرضها. فهل ينبغي أن تكون الفترة الزمنية اسبوعا واحدا أو اسبوعين أو شهرا أو فترة زمنية أخرى؟ من الواضح أن أهداف الدراسة هي التي يجب أن تحكم طول الفترة الزمنية والتي تشكل هنا الوحدة الأساسية للدراسة.

اعتبار آخر مهم عند تصميم دراسات تحليل التباين هو كون وحدات الدراسة ممثلة لما يُراد دراسته. اعتبر دراسة عن السلوك الإداري مع شبكات اتصال مختلفة. ونظرا لسهولة الحصول على الطلاب فقد يُفرض هذا باحثا جامعيا على استخدام الطلاب كعناصر للدراسة. ولكن لو كانت المعلومات مطلوبة عن السلوك الإداري لرجال أعمال، فإن الطلاب سوف لا يشكلون وحدات تجريبية ممثلة. ولعلنا في غنى عن الحاجة للقول أنه يجب على الباحث أن يبتذل قصارى جهده للحصول على وحدات دراسة ممثلة. والعكس صحيح، فيجب أن نكون حذرين من تعميم نتائج دراسة ما على مجموعات تكون وحدات الدراسة فيها غير ممثلة. وهكذا لو أن دراسة شبكات الاتصال التي ذكرناها أنفا استخدمت الطلاب، فلا ينبغي أن نفرض آليا أن النتائج ستكون مناسبة لرجال أعمال.

(١٤-٤) استخدامات نماذج تحليل التباين

نُستخدم نماذج تحليل التباين في الأساس لتحليل تأثيرات المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) قيد الدراسة على المتغير التابع. وعلى وجه التحديد. تستخدم الدراسات وحيدة العامل لمقارنة تأثيرات مستويات مختلفة للعامل وذلك للتعرف على

"أفضل مستوى عامل" وما شابه ذلك. وفي الدراسات متعددة العوامل تستخدم نماذج تحليل التباين لمعرفة ما إذا كانت العوامل المختلفة متفاعلة، ما هي العوامل المهمة، وما هي "أفضل" تركيبات للعوامل، وهكذا سنوضح هذه النقاط بثلاثة أمثلة.

مثال ١

يستخدم مستشفى ما نوعاً قياسياً من المداواة لعلاج مشكلة طبية. وقد تم حديثاً اقتراح نوعين جديدين للمداواة. ولهذا استخدم نموذج تحليل التباين لتحديد ما إذا كان أي من النوعين الجديدين للمداواة أفضل من النوع الحالي، وإذا كان الأمر كذلك، فأى منهما هو الأفضل.

مثال ٢

تمت دراسة أربعة أنواع من الآلات وذلك بالنسبة لأقطار الكرات التي تنتجها. والفرض من استخدام نموذج تحليل التباين في هذه الدراسة هو تحديد ما إذا كانت توجد فروق جوهرية بين الآلات. وإذا كان الأمر كذلك فسنحتاج إلى معايير الآلات.

مثال ٣

في دراسة عينة عشوائية من مستعملي منظمة ما، تم تحليل معدلات الاستخدام وفقاً للقدم في الوظيفة، الجنس، الحالة الاجتماعية، ونوع الوظيفة. وتم استخدام نموذج تحليل التباين في هذه الدراسة متعددة العوامل لتحديد ما إذا كانت تأثيرات هذه المتغيرات المستقلة يتفاعل في علاقته الإحصائية بصورة مهمة، وأي من هذه المتغيرات المستقلة يتفوق في علاقته الإحصائية بالمتغير التابع.

(٥-١٤) نموذج تخمين I - مستويات متجة للعامل

التمييز بين نموذجي التخمين I و II

سنأخذ بعين الاعتبار نموذجين من نماذج تحليل التباين أحادية العامل وللإختصار سنرمز لهما بنموذجي تخمين I و II. ويُطبق نموذج التخمين I، الذي ستتطرق إليه هنا في حالات مثل مقارنة خمسة أنواع مختلفة من الإعلانات أو مقارنة أربعة أنواع من

مانع الصدا، حيث أن الاستجابات تتعلق، فقط، بمستويات العامل التي تضمنتها الدراسة. بينما يطبق نموذج التحالين III، الذي سنبقى في الفصل السابع عشر، في نوع مختلف من الحالات تُعمم فيها النتائج إلى مجتمع من مستويات العامل وتُعتبر المستويات المدروسة عينة منه. نأخذ، على سبيل المثال، شركة تملك عدة معات من محلات بيع التبرزة، في الولايات المتحدة الأمريكية، وقد اختبرت سبعة محلات منها عشوائياً ثم أخذت بعد ذلك عينة من عمال كل من هذه المحلات وتم سؤالهم في مقابلة سرية لتقويم إدارة المحل. تُعتبر المحلات السبعة في هذه الدراسة المستويات السبعة للعامل تحت الدراسة أي محلات بيع التبرزة، وفي هذه الحالة، على أي حال، لا ترغب الإدارة في معرفة نتائج المحلات السبعة، فقط، وإنما تريد تعميم نتائج الدراسة إلى كل المحلات التي تملكها. ومثال آخر لتطبيق نموذج التحالين III هو عند الاختيار العشوائي لثلاث آلات من بين خمس وسبعين آلة في مصنع ما. ويتم رصد إنتاجها اليومي لمدة عشرة أيام. وتشكل الآلات الثلاث مستويات العامل في هذه الدراسة ولكن الاهتمام هنا لا ينصب، فقط، على الآلات الثلاث وإنما على آلات المصنع كلها.

وهكذا فإن الفرق الجوهرى بين الحالات التي تُطبق فيها نماذج التحالين I و II هو أن النموذج I يكون مناسباً عندما يكون اختيار مستويات العامل بسبب الاهتمام الخاص بها (مثلاً خمسة أنواع من الإعلان) ولا تُعتبر للمستويات عينة من مجتمع أكبر من للمستويات. بينما يُعتبر نموذج التحالين II مناسباً عندما تشكل مستويات العامل عينة من مجتمع أكبر (مثلاً ثلاث آلات من خمس وسبعين) والاهتمام ينصب على هذا المجتمع الأكبر.

الآثار الأساسية

العناصر الأساسية لنموذج التحالين I في الدراسة وحيدة العامل بسيطة تماماً فلكل مستوى من مستويات العامل يوجد توزيع احتمالي من الاستجابات. وعلى سبيل المثال، في دراسة تأثير أربعة أنواع من الحوافز التشجيعية على إنتاجية المستخدم يوجد توزيع احتمالي من الإنتاجية وذلك لكل نوع من أنواع الحوافز. ويفترض نموذج التحالين I ما يلي:

- ١- تتبع التوزيعات الاحتمالية التوزيع الطبيعي.
 - ٢- لكل توزيع احتمالي التباين (الاغراف المعياري) نفسه.
 - ٣- تعتبر المشاهدات لكل مستوى عامل مشاهدات عشوائية من التوزيع الاحتمالي المقابل وهي مستقلة عن المشاهدات لأي مستوى عامل آخر.
- ويوضح الشكل (١٤-٢) هذه الشروط. لاحظ أن التوزيعات الاحتمالية تتبع التوزيع الطبيعي، وكذلك ثبات تباين هذه التوزيعات. وتختلف هذه التوزيعات الاحتمالية، فقط، في متوسطاتها. ولذلك، فإن الاختلاف في المتوسطات يعكس التأثيرات الجوهرية لمستويات العامل، ولهذا السبب فإن تحليل التباين يركز على متوسط الاستجابة لمستويات العامل المختلفة. وعادة يتم تحليل عينة البيانات من التوزيعات الاحتمالية لمستويات العامل المختلفة على عيشتين :

- ١- تحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا.
- ٢- وإذا كانت مستويات العامل غير متساوية فحص أوجه الاختلاف وما هي الأمور المقربة على هذه الاختلافات.

ستتطرق في هذا الفصل إلى الخطوة ١، أي كيفية القيام باختيار لتحديد ما إذا كانت مستويات العامل متساوية أم لا. وستتطرق في الفصل التالي إلى تحليل تأثيرات مستويات العامل عندما تكون المتوسطات غير متساوية.

نموذج التحاليل II - نموذج متوسطات الخلايا

نحتاج إلى تطوير بعض الرموز قبل أن نبدأ في سرد نموذج التحاليل للدراسات وحيدة العامل. لنرمز بـ r لعدد مستويات العامل تحت الدراسة (مثلاً $r = 4$ في مثال أربعة أنواع من الحوافز التشجيعية). وسنرمز لأي من هذه المستويات بالرمز i حيث $(i=1, \dots, r)$. ونرمز لعدد المشاهدات الخاصة بمستوى العامل بالرمز n_i والعدد الكلي من المشاهدات يُرمز له بالرمز n_T ، حيث :

$$n_T = \sum_{i=1}^r n_i \quad (14.1)$$

ويختلف هذا الترميز عما استخدم سابقاً في نماذج الانحدار حيث يرمز الدليل إلى

مشاهدة أو تكرار.

وستستخدم في نماذج تحليل التباين الدليل الأعمر دائما ليرمز إلى الملاحظة أو المحاولة لأي مستوى عامل معطى أو معالجة. وهنا سنستخدم الرمز الملحق i ليدل على مشاهدة معينة أو محاولة معينة لمستوى عامل بالذات. وبالإضافة إلى ذلك لتكن Y_{ij} رمزا للمشاهدة رقم j للمتغير التابع، أو متغير الاستجابة الخاص بالمستوى i للعامل، فتلد Y_{ij} على سبيل المثال، على إنتاجية المستخدم رقم j في المصنع رقم i أو حجم المبيعات للمحل j الذي يستخدم النوع i من رفوف العرض. وبما أن n_j يرمز إلى عدد المشاهدات أو المحاولات لمستويات العامل فإن $j = 1, \dots, n_j$.

ويمكن عرض نموذج التحليل I، الآن، كما يلي :

$$Y_{ij} = \mu_j + e_{ij} \quad (14.2)$$

حيث:

Y_{ij} قيمة متغير الاستجابة في المحاولة j لمستوى العامل أو للمعالجة i .

μ_j هي معالم

e_{ij} متغيرات مستقلة تتبع $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, n_j$

ولأسباب سوف تفصل بعد قليل، فإن هذا النموذج يسمى نموذج متوسطات الخلايا. ويمكن استخدام هذا النموذج لبيانات من دراسات مشاهدة، أو لبيانات من دراسات تجريبية مبنية على تصميم تام التمشية.

مزايما مهمة للنموذج

١- القيمة المُشاهدة Y_{ij} في المحاولة j لمستوى العامل أو للمعالجة i عبارة عن مجموع

مركبتين هما : (أ) حد ثابت μ_j و (ب) حد خطأ عشوائي e_{ij} .

٢- بما أن $E\{e_{ij}\} = 0$ فلدينا:

$$E(Y_{ij}) = \mu_j \quad (14.3)$$

وهكذا، فإن لكل المشاهدات الخاصة بمستوى العامل i التوقع نفسه μ_j .

٣- بما أن μ_j عدد ثابت فستنتج من (1.16هـ) أن:

$$\sigma^2(Y_{ij}) = \sigma^2(e_{ij}) = \sigma^2 \quad (14.4)$$

ولذلك، فإن لكل من المشاهدات الثابتين نفسه. وذلك بغض النظر عن مستوى العامل.
 ٤- بما أن كل y_{ij} يتبع التوزيع الطبيعي، فكل ذلك كل y_{ij} . وهذا ناتج عن (1.33) لأن y_{ij} دالة خطية في y_{ij} .

٥- نفترض أن حدود الخطأ مستقلة. وبالتالي، فليس لحد الخطأ الخاص بأية محاولة تأثير على حد الخطأ لأي محاولة أخرى سواء كانت للمستوى نفسه أو لمستوى آخر من مستويات العامل. وبما أن المتغيرات y_{ij} مستقلة، فكل ذلك تكون المشاهدات y_{ij} .

٦- في ظل هذه المزايا يمكن إعادة عرض نموذج التخمين (14.2) كما يلي:

$$y_{ij} \text{ مستقلة وتتبع } N(\mu_{ij}) \quad (14.5)$$

تعليقات

١- يعتبر نموذج التخمين (14.2) نموذجاً خطياً، وذلك لأنه يمكن التعبير عنه في صيغة مصفوفية على الشكل (7.18)، أي على الشكل $Y = X\beta + \varepsilon$. ونضرب مثلاً على ذلك بدراسة تتضمن $r = 3$ معالجات، حيث أخذنا لكل معالجة مشاهدتين.

ولذلك فإن $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ ونعرف Y و X و β و ε كما يلي:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \\ y_{32} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} \quad (14.6)$$

لاحظ ببساطة تركيب المصفوفة X وأن المتجه β يحوي المتوسطات μ_i .

وللتحقق من أن هذه المصفوفات تعطي نموذج التخمين (14.2)، تذكر من

$$(7.18a) \quad \text{أن متجه القيم المتوقعة } E\{y_{ij}\} \text{ معطى بـ } E\{Y\} = X\beta.$$

وهكذا نحصل على:

$$E\{Y\} = \begin{bmatrix} E\{Y_{11}\} \\ E\{Y_{12}\} \\ E\{Y_{21}\} \\ E\{Y_{22}\} \\ E\{Y_{31}\} \\ E\{Y_{32}\} \end{bmatrix} = X\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

وهي تشرح بصورة سليمة إلى أن $\mu_4 = E\{Y_4\}$. ولهذا فإن نموذج التحاين

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (14.2)$$

في شكل مصفوفي معطى :- $Y_4 = \mu_4 + \varepsilon_4$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \end{bmatrix} = X\beta + \varepsilon = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

٢- ويدعى نموذج التحاين (14.2) نموذج متوسطات الخلايا لأن المتجه β يحوي

متوسطات "الخلايا" - والخلايا هنا مستويات عامل. وستناقش في الفقرة (١٤-١٠)

نموذج تحاين مكاليه ويسمى نموذج تأثيرات العامل، حيث يحتوي للمتجه β مركبات من متوسطات مستويات العامل.

مثال

نفترض أن نموذج التحاين (14.2) صالح للتطبيق في دراسة أنظمة الحوافز

التشجيعية المذكورة آنفا وأن قيم المعالم هي كما يلي:

$$\mu_1 = 70 \quad \mu_2 = 58 \quad \mu_3 = 90 \quad \mu_4 = 84 \quad \sigma = 4$$

ويتضمن الشكل (١٤-٢) تمثيلاً لهذا النموذج. لاحظ أنه وفقاً لهذا النموذج تتبع

إنتاجية المستعلمين لنظام الحوافز التشجيعية ١ التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_1 = 70$

وانحراف معياري $\sigma = 4$.

نفترض أن الإنتاجية للمشاهدة للمحاولة ٢ في نظام الحوافز التشجيعية ١ هي

$Y_U = 78$. ففي هذه الحالة تكون قيمة حد الخطأ هي $s_U = 8$ ، وذلك لأن:

$$s_U = Y_U - \mu_1 = 78 - 70 = 8$$

ويوضح الشكل (١٤-٢) الملاحظة Y_U . لاحظ أن انحراف Y_U عن المتوسط μ يمثل حد الخطأ s_U . ويوضح هذا الشكل، أيضاً، الملاحظة $Y_D = 51$ وقيمة حد الخطأ فيها هو $s_D = -7$.

تفسير متوسطات مستويات العامل

بيانات الملاحظة. تدل متوسطات مستويات العامل μ في دراسات الملاحظة على متوسطات مجتمعات مستويات العامل المختلفة. وعلى سبيل المثال، في دراسة إنتاجية المستخدمين في كل من فترات العمل الثلاث في مصنع ما، تكون المجتمعات هي إنتاجية المستخدمين لكل فترة عمل. ويكون متوسط المجتمع μ هو متوسط الإنتاجية للمستخدمين في الفترة ١، ويمكن تفسير μ_D و μ_U بالطريقة نفسها. ويشير الثباين σ إلى تشتت إنتاجية المستخدمين داخل فترة العمل.

البيانات التجريبية. تدل متوسطات مستويات العامل μ في الدراسات التجريبية على متوسط الاستجابة الذي كان يمكن الحصول عليه لو أن المعالجة i طبقت على كل الوحدات في مجتمع الوحدات التجريبية الذي يُراد استقراؤه إحصائياً. وبالمثل، يشير الثباين σ إلى تشتت الاستجابات لو طبقت أي معالجة تجريبية بالذات على مجتمع الوحدات التجريبية بكامله. وعلى سبيل المثال، في تصميم تام التعشية لدراسة تأثير ثلاثة برامج تدريب مختلفة على إنتاجية المستخدم، وشارك فيها تسعون مستخدماً تم تخصيص ثلثهم عشوائياً لكل من البرامج الثلاثة. ويشير المتوسط μ هنا إلى متوسط الإنتاجية لو أن برنامج التدريب ١ أعطي لكل مستخدم في مجتمع الوحدات التجريبية، ويتم تفسير المتوسطات μ_D و μ_U بالطريقة نفسها. ويدل الثباين σ على التشتت في الإنتاجية لو أن أياً من برامج التدريب أعطي لكل مستخدم في مجتمع الوحدات التجريبية.

تعليقات

- ١- كما هو الحال في أي نموذج إحصائي ليس من المتوقع أن يتحقق نموذج التحاين I بالضبط في تطبيقات الحياة الواقعية. إلا أنه سيكون، على أي حال، متحققاً على وجه التقريب في كثير من الحالات. وكما سنشاهد لاحقاً، فإن الطرق الإحصائية المبنية على نموذج التحاين II منبئة بشكل جيد بحيث أنه حتى لو كانت الشروط الحقيقية للحالة موضع الدراسة مختلفة بشكل كبير عن شروط نموذج التحاين I، فمن الممكن أن يقدم التحليل الإحصائي تقريباً مناسباً.
- ٢- في بعض الأحيان، تعطي كل المعالجات المدروسة لكل وحدة من وحدات الدراسة. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يطلب من شخص ما أن يستخدم معجون الأسنان A لمدة أسبوع ثم يعطيه درجة تصنيف وبعد ذلك يطلب منه أن يستخدم معجون الأسنان B و C كل لمدة أسبوع. وفي مثل هذه الحالات، فإن نموذج التحاين I لا يكون مناسباً، وذلك لأن الاستجابات المتعددة للشخص نفسه للمعالجات المختلفة تحت الدراسة ستكون في الغالب مرتبطة. وعلى سبيل المثال، لو أن شخصاً ما يفضل بوردرة الأسنان على معجون الأسنان، فإن درجة تفرجه لمعاجين الأسنان المختلفة ستكون في الغالب منخفضة. وفي الفصل ٢٨ ستطرق لنماذج خاصة بهذه الحالة.

(١٤-٦) توليف نموذج تحاين

للعالم في نموذج التحاين (14.2) غير معروفة عادة، ويجب تقديرها من بيانات: العينة. وكما هو الحال في الانحدار، فإننا نستخدم طريقة للربعات الدنيا لتوليف نموذج تحاين وإيجاد مقدرات للعالم النموذج. ولكن، قبل الالتفات إلى هذه المقدرات، سنصنف مثلاً نستخدمه عبر ما تبقى من هذا الفصل، وسنطور أية رموز إضافية نحتاجها.

مثال

ترغب شركة كتون للأغذية أن تختار أربعة أنواع من تصاميم الشلاف وذلك لنوع جديد من حبوب الإفطار. وتم اختيار عشرة محلات لها تقريبا حجم المبيعات نفسه لتكون الوحدات التجريبية. وتم تخصيص أحد التصميمات لكل محل عشوائيا، بحيث أعطى كل من اثنين من التصميمات ثلاث محلات وأعطى التصميمان الباقيان كل منهما لمحلين. وفيما عدا تصميم الشلاف، فإن الشروط الأخرى مثل الأسعار ومقدار وموقع الحيز المخصص للعرض، والجهود الترويجية الخاصة نُبتت في جميع المحلات في التجربة. وتم رصد عدد القطع المباعة في فترة الدراسة ووضعت النتائج في الجدول (١٤-١)أ. ولجعل الحسابات التوضيحية أقل ما يمكن، أخذنا حجم العينة صغيرا جدا. بينما يجري في التطبيقات الواقعية اختيار أحجام عينات أكبر للحصول على نتائج أقوى وأكثر إحكاما. وكذلك في التطبيقات من هذا النوع، سيبدو أكثر منطقية في الغالب، تخصيص عدد متساوٍ من المحلات لكل تصميم، إذ كثيرا ما تكون هناك اهتمامات متساوية بكل معالجة من المعالجات وقد استعملنا أحجام عينات غير متساوية لتوضيح الطرق التحليلية في تمام عموميتها.

رموز

يبين جدول (١٤-١)ب العلامات الرمزية لبيانات شركة كتون للأغذية الموضحة في جدول (١٤-١)أ، وكما أسلفنا من قبل فإن Y_i تمثل مشاهدة في وحدة العينة i لمستوى العامل i ، وهنا Y_i تمثل عدد القطع المباعة بواسطة المحل i المخصص إلى تصميم الشلاف i . وعلى سبيل المثال تمثل Y_{11} مبيعات المحل الأول المخصص إلى تصميم الشلاف ١. وفي مثالنا هنا $Y_{11} = 12$ علة. وبالطريقة نفسها، فإن مبيعات المحل الثاني المخصص إلى تصميم الشلاف ٣ هي $Y_{32} = 17$ علة. ويرمز لمجموع المشاهدات لمستوى i بـ Y_i :

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad (14.9)$$

جدول (١٤-١) أعداد العلب المباعية في كل محل لكل من التصميمات الأربعة مثال شركة كتون للأغذية

(أ) بيانات العينة						
تصميم غلاف	محل رقم			مجموع	متوسط	عدد المحلات
	1	2	3			
1	12	18		30	15	2
2	14	12	13	39	13	3
3	19	17	21	57	19	3
4	24	30		54	27	2
جميع التصميمات						
				180	18	10

(ب) البيانات بالرموز						
وحدة عينة (i)						
مستوى عامل i	1	2	3	مجموع	متوسط	عدد وحدات العينة
1	Y_{11}	Y_{12}		$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$	n_1
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$	n_2
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	$Y_{3.}$	$\bar{Y}_{3.}$	n_3
4	Y_{41}	Y_{42}		$Y_{4.}$	$\bar{Y}_{4.}$	n_4
جميع مستويات العامل						
				$\bar{Y}_{..}$	$\bar{Y}_{..}$	n_T

وهكذا، فإن النقطة Y_i تدل على التجميع فوق الرمز i ، وفي مثالنا هنا التجميع فوق كل المحلات المخصصة إلى تصميم الغلاف i ، وعلى سبيل المثال وفقاً للجدول (١٤-١)، فإن كون مجموع المبيعات لجميع المحلات المخصصة إلى تصميم الغلاف 1

هو $Y_1 = 30$ علة. وبطريقة مشابهة، فإن مجموع المبيعات لجميع المحلات المخصصة إلى تصميم الغلاف 4 هو $Y_4 = 54$ علة. ويرمز للمتوسط العينة عند مستوى العامل i بالرمز \bar{Y}_i :

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i} = \frac{Y_{.i}}{n_i} \quad (14.10)$$

وفي مثالنا هنا، فإن متوسط عدد العلب المباعة في المحلات المخصصة لتصميم الغلاف 1 هو $\bar{Y}_1 = \frac{30}{2} = 15$. وهكذا فإن النقطة في الدليل الملحق تشير إلى أن حساب المتوسط كان فوق (المحلات).

ويرمز للمجموع الكلي للملاحظات في الدراسة بـ $Y_{..}$:

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad (14.11)$$

حيث تدل النقطتان على التجميع فوق كل من الدليلين i و j (وفي مثالنا هنا، فوق كل المحلات المخصصة لتصميم ثم فوق جميع التصميمات).

وأخيرا، يُرمز للمتوسط الكلي لجميع البيانات بالرمز $\bar{Y}_{..}$:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij}}{n_r} = \frac{Y_{..}}{n_r} \quad (14.12)$$

حيث تدل النقطتان هنا على أن حساب المتوسط كان فوق كل من i و j . وفي مثالنا

$$\bar{Y}_{..} = \frac{180}{10} = 18 \text{ أن } 1-4 \text{ نجد من الجدول}$$

مقدرات المربعات الدنيا

وفقا لمقياس المربعات الدنيا، فإنه يجب جعل مجموع مربعات انحرافات المشاهدات حول

قيمها المتوقعة أصغر ما يمكن بالنسبة للمعالم. ولنموذج التحاين (14.2) لدينا من (14.3):

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_i$$

وهكذا، فإن الكمية التي يجب جعلها أصغر ما يمكن هي:

$$Q = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu_i)^2$$

ويمكن كتابة (14.13) كما يلي:

$$Q = \sum_j (Y_{1j} - \mu_1)^2 + \sum_j (Y_{2j} - \mu_2)^2 + \dots + \sum_j (Y_{ij} - \mu_i)^2 \quad (14.13a)$$

لاحظ أن كل معلمة تظهر في واحد، فقط، من مركبات المجموع في (14.13a). ولذلك يمكن تصغير Q بتصغير كل من هذه المركبات على حدة. ومن المعلوم جيداً أن متوسط العينة يصغر مجموع مربعات الانحرافات. وهكذا، فإن مقدار المربعات الدنيا لـ μ ويُرمز له بالرمز $\hat{\mu}$ هو:

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i. \quad (14.14)$$

وهكذا، فإن القيمة التوفيقية للملاحظة Y_{ij} وقد رمزنا لها، تماماً كما في نماذج الانحدار، بـ \hat{Y}_{ij} هي هنا ببساطة متوسط العينة لمستوى العامل المقابل :

$$\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_i. \quad (14.15)$$

مثال : في مثال شركة كتنون للأغذية، تكون تقديرات المربعات الدنيا لمعالم النموذج، وفقاً للجدول (١٤-١) كما يلي:

معلمة	تقدير المربعات الدنيا
μ_1	$\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_1 = 15$
μ_2	$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}_2 = 13$
μ_3	$\hat{\mu}_3 = \bar{Y}_3 = 19$
μ_4	$\hat{\mu}_4 = \bar{Y}_4 = 27$

وهكذا، نقدر متوسط مبيعات المحل الواحد في حالة تصميم الغلاف 1 بـ 15 علبة وذلك بالنسبة لمجتمع المحلات المدروسة والقيمتان التوفيقيتان للملاحظات الخاصتين بتصميم الغلاف 1 ، هما $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{12} = \hat{Y}_1 = 15$. وبصورة مشابهة، نقدر متوسط مبيعات المحل في حالة تصميم الغلاف 2 بـ 13 علبة للمحل الواحد. والقيم التوفيقية للملاحظات الثلاث لتصميم الغلاف هذا، هي $\hat{Y}_{2j} = \bar{Y}_2 = 13$

تعليقات

١- إن مقدرات المربعات الدنيا في (14.14) هي، أيضاً، مقدرات الإمكانية العظمى نفسها لنموذج تحمين الخطأ الطبيعي (14.2). وتبعاً لذلك فإنها تمتلك كافة الخصائص المرغوبة لمقدرات الانحدار المذكورة في الفصل الثاني. وعلى سبيل المثال، فهي مقدرات غير منحازة ذات تباين أصغري.

٢- لاستنباط مقدر المربعات الدنيا لـ μ_i نحتاج إلى تصغير المركبة i لمجموع المربعات في (14.13a) بالنسبة لـ μ_i :

$$Q_i = \sum_j (Y_{ij} - \mu_i) \quad (14.16)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ μ_i نحصل على:

$$\frac{dQ_i}{d\mu_i} = \sum_j 2(Y_{ij} - \mu_i)$$

وعند مساواة هذه المشتقة بالصفر واستبدال المعلمة μ_i بمقدر المربعات الدنيا، $\hat{\mu}_i$ نجد النتيجة في (14.14):

$$\begin{aligned} -2 \sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \hat{\mu}_i) &= 0 \\ \sum_j Y_{ij} &= n_i \hat{\mu}_i \\ \hat{\mu}_i &= \bar{Y}_i \end{aligned}$$

الرواسب

الرواسب مفيدة للغاية لتفحص مصداقية نماذج التحاين. ويتم تعريفها، تماماً كما فعلنا في نماذج الانحدار، بالفرق بين القيمتين الملحوظة والتوقعية:

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i \quad (14.17)$$

وهكذا، فإن الراسب يمثل هنا انحراف قيمة ملحوظة عن تقدير متوسط مستوى العامل الموافق.

مثال. يوضح جدول (٢-١٤) الرواسب لمشال شركة كنتون للأغذية. فعلى سبيل المثال نجد من جدول (١-١٤) مايلي:

$$e_{11} = Y_{11} - \bar{Y}_1 = 12 - 15 = -3$$

$$e_{21} = Y_{21} - \bar{Y}_2 = 14 - 13 = +1$$

ولاحظ من جدول (٢-١٤) أن مجموع الرواسب يساوي الصفر وذلك لكل مستوى عامل. وهذا يوضح خاصية مهمة من خواص الرواسب لنموذج التحاين (14.2) وهي أن مجموعها يساوي الصفر لكل مستوى عامل i :

$$\sum_j e_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (14.18)$$

جدول (١٤-٢) الرواسب في مثال شركة كتون للأغذية

مجموع	عمل (i)			تصميم غلاف
	3	2	1	i
0		+3	-3	1
0	0	-1	+1	2
0	+2	-2	0	3
0		+3	-3	4
0				
0				جميع التصميم

وستشرح استخدام الرواسب لفحص مصداقية نموذج تخمين في الفصل السادس عشر.

(١٤-٧) تحليل التباين

وكما يقسم تحليل التباين لنموذج الانحدار بمجموع المربعات الكلية إلى مجموع مربعات الانحدار ومجموع مربعات الخطأ فيها، فهناك تقسيم مقابل في حالة نموذج التحاين (14.2).

تجزئة SSTO

يقاس التشتت الإجمالي للملاحظات y_{ij} ، مع عدم استخدام أية معلومات عن مستويات العامل، بدلالة انحراف كل مشاهدة y_{ij} عن المتوسط الإجمالي $\bar{y}_{..}$:

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} \quad (14.19)$$

وعند الاستفادة من المعلومات حول مستويات العامل، فإن الانحرافات التي تعكس ما بقي من الرية في البيانات هي انحرافات كل مشاهدة y_{ij} عن المتوسط المقتر مستوى العامل المقابل $\bar{y}_{i.}$:

$$y_{ij} - \bar{y}_{i.} \quad (14.20)$$

والفرق بين الانحرافات في (14.19) و(14.20) يعكس الفرق بين المتوسط المقتر مستوى العامل والمتوسط الإجمالي:

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}) - (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} \quad (14.21)$$

لاحظ من (14.21) أنه يمكن تفكيك الانحراف الكلي $Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$ إلى مركبتين:

$$\underbrace{Y_{ij} - \bar{Y}_{..}} = \underbrace{\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}} + \underbrace{Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}} \quad (14.22)$$

الانحراف عن المتوسط المقدر انحراف المتوسط انحراف كلي
المستوى عامل المقدر لمستوى عامل
عن المتوسط المقدر

وهكذا، فإنه يمكن النظر إلى الانحراف الكلي على أنه مجموع مركبتين:

١- انحراف المتوسط المقدر لمستوى العامل حول المتوسط الإجمالي.

٢- انحراف Y_{ij} حول المتوسط المقدر لمستوى العامل. ووفقاً لـ (14.17) فإن هذا الانحراف

هو، ببساطة، الراسب e_{ij} .

ويوضح الشكل (١٤-٣) هذا التفكيك لمثال شركة ككتون للأغذية. وعندما

نربع (14.22) ومن ثم نجمع تسقط الحدود الجداية في الطرف الأيمن لنجد:

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (14.23)$$

ويقاس الحد من الطرف الأيسر التشتت الكلي للملاحظات ويرمز له، كما في

حالة الانحدار، بـ الرمز $SSTO$ وهو يعني مجموع المربعات الكلي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (14.24)$$

وسنرمز للحد الأول من الطرف الأيمن من (14.23) بالرمز $SSTR$ وهو يعني

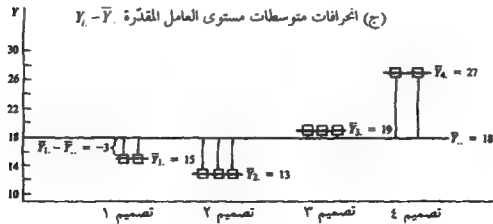
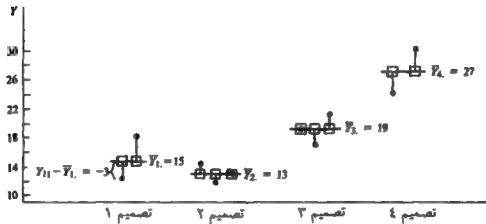
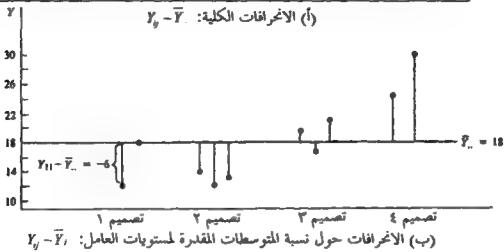
مجموع مربعات المعالجات:

$$SSTR = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (14.25)$$

أما الحد الثاني في الطرف الأيمن من (14.23) فنسرمز له بالرمز SSE وهو يعني

مجموع مربعات الخطأ:

$$SSE = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = \sum \sum e_{ij}^2 \quad (16.26)$$

شكل (١٤-٣) تجزئة الانحرافات الكلية $y_{ij} - \bar{y}_{..}$ لمثال شركة كتون للأغذية

وهكذا، فإنه يمكن كتابة (14.23) بالصورة المكافئة:

$$SSTO = SSTR + SSE \quad (14.27)$$

ويتضح بسهولة هنا التقابل بين هذا التفكيك وتفكيك الانحدار في (3.48a). وهكذا

يتألف مجموع المربعات الكلي لنموذج تحليل التباين من هاتين المركبتين :

١- SSE وهو قياس للتغير العشوائي للبيانات حول المتوسطات لمستويات العامل المقابلة. فكلما قل التشتت بين المشاهدات عند كل مستوى عامل ، كلما صغر SSE . وإذا كان $SSE = 0$ فهذا يعني أن المشاهدات عند كل مستوى عامل متساوية ويصحّ هذا لمستويات العامل كافة. وكلما اختلفت المشاهدات بعضها عن بعض عند كل مستوى عامل كلما كان SSE أكبر.

٢- $SSTR$ وهو قياس لمقدار الفروق بين متوسطات مستويات العامل المقدرّة وبينى على انحرافات متوسطات مستويات العامل المقدرّة \bar{Y}_i عن المتوسط الإجمالي \bar{Y} . وعندما تكون متوسطات مستويات العامل المقدرّة \bar{Y}_i متساوية، فإن $SSTR = 0$. والزيد من الاختلاف بين متوسطات مستويات العامل المقدرّة سيجعل $SSTR$ أكبر.

تعليقات

١- لإثبات (14.23)، نبدأ باعتبار (14.22):

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + 2(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

ولو قمنا بالتجميع فوق كل مشاهدات العينة في الدراسة (أي فوق كل من i و j)،

نحصل على:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 &= \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \\ &\quad + \sum_i \sum_j 2(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) \end{aligned} \quad (14.28)$$

ويساوي الحد الأول في الطرف الأيمن من (14.28):

$$\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (14.29)$$

وبما أن الحد $(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$ يبقى ثابتاً عند التجميع فوق i ، فإننا نحصل من التجميع فوق j

على n_i حداً.

ويكون الحد الثالث في الطرف الأيمن من (14.28) مساوياً للصفر:

$$\sum_i \sum_j 2(\bar{Y}_i - \bar{Y})(Y_{ij} - \bar{Y}_i) = 2 \sum_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}) \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i) = 0 \quad (14.30)$$

ذلك لأن $\bar{Y}_i - \bar{Y}$ يبقى ثابتاً عند الجمع فوق j وبالتالي يمكن إخراجه خارج إشارة المجموع فوق j . وبالإضافة إلى ذلك، فإن $\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i) = 0$ باعتبار أن المجموع الجبري للانحرافات حول المتوسط الحسابي يساوي الصفر. وهكذا نحصل (14.28) إلى (14.23).

٢- توزن مربعات انحرافات متوسطات مستويات العامل المقدر $(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$ في $SSTR$ من (14.25) بعدد المشاهدات n_i عند ذلك المستوى للعامل. وسبب ذلك، كما يوضح الشكل (١٤-٣ ج)، أن مركبة الانحراف $\bar{Y}_i - \bar{Y}$ تبقى نفسها لكل مشاهدة عند المستوى i للعامل.

صيغ حسابية. لأغراض الحساب اليدوي فإن المعادلات التي ذكرناها من قبل لحساب $SSTO$ و $SSTR$ و SSE لن تكون سهلة الاستعمال. بينما المعادلات التالية ستكون مفيدة وسهلة الحساب يدوياً وهي في الوقت نفسه مكافئة جبرياً للمعادلات السابقة:

$$SSTO = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_i^2}{n_i} \quad (14.31a)$$

$$SSTR = \sum_i \frac{Y_i^2}{n_i} - \frac{Y^2}{n_T} \quad (14.31b)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_i^2}{n_i} \quad (14.31c)$$

مثال. باستخدام الصيغ الحسابية في (14.31) يمكن الحصول على تفكيك تحليل التباين لمجموع المربعات الكلي في مثال شركة كتون للأغذية الجدول (١٤-١) كالتالي:

$$SSTO = (12)^2 + (18)^2 + (14)^2 + \dots + (30)^2 - \frac{(180)^2}{10} = 3,544 - 3,240 = 304$$

$$SSTR = \frac{(30)^2}{2} + \frac{(39)^2}{3} + \frac{(57)^2}{3} + \frac{(54)^2}{2} - \frac{(180)^2}{10} = 3,498 - 3,240 = 258$$

$$SSE = 3,544 - 3,498 = 46$$

وهكذا، فإن تفكيك $SSTO$ هو :

$$304 = 258 + 46$$

$$SSTO = SSTR + SSE$$

لاحظ أن كثيرا من التغير الكلي في المشاهدات مقترن بالتغير بين متوسطات مستويات العامل المقدر.

تفكيك درجات الحرية

وفقا لتفكيك مجموع المربعات الكلي، فإنه يمكننا، أيضا، الحصول على تفكيك لدرجات الحرية المصاحبة.

يقترن بـ $SSTO$ عدد من درجات الحرية يساوي $n_T - 1$ حيث يوجد في الإجمال n_T من الانحرافات $\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}$ ، ولكن تُفقد درجة حرية واحدة لأن الانحرافات غير مستقلة بمعنى أن مجموعها لابد أن يساوي الصفر أي $\sum (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}) = 0$.

وعدد درجات الحرية المصاحبة لـ $SSTR$ هو $r - 1$ ، فهناك r من انحرافات متوسطات مستويات العامل المقدر $\bar{Y}_i - \bar{Y}$ ، ولكن تُفقد درجة حرية واحدة لأن الانحرافات غير مستقلة، بمعنى أن المجموع الموزون يجب أن يساوي الصفر، أي أن $\sum n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}) = 0$.

وعدد درجات الحرية المصاحبة لـ SSE هو $n_T - r$. ويمكن ملاحظة هذا مباشرة بالنظر إلى مركبة SSE الموافقة للمستوى i من مستويات العامل:

$$\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad (14.32)$$

نكافيء العبارة في (14.32) مجموع المربعات الكلي معترين فقط المستوى i للعامل. وبالتالي فإنه يوجد $n_i - 1$ من درجات الحرية المصاحبة لمجموع المربعات هذا. وبما أن SSE يتكون من مجموع مركبات مجاميع كذلك الموجودة في (14.32)، فإن عدد درجات الحرية المصاحبة لـ SSE هو درجات الحرية للمركبات :

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_r - 1) = n_T - r \quad (14.33)$$

مثال. نجد في مثال شركة كتون للأغذية حيث $n_T = 10$ و $r = 4$ ، فإن عدد درجات الحرية المصاحبة لمجموع المربعات الثلاثة هي:

<i>df</i>	<i>SS</i>
10 - 1 = 9	<i>SSTO</i>
4 - 1 = 3	<i>SSTR</i>
10 - 4 = 6	<i>SSE</i>

لاحظ أن درجات الحرية تجميعية مثلها في ذلك مثل مجاميع المربعات تماماً:

$$9 = 3 + 6$$

متوسطات المربعات

يمكن الحصول على متوسط المربعات، كما هو المعتاد، بقسمة كل مجموع

مربعات على عدد درجات الحرية المقترنة به. ولذلك نحصل على:

$$MSTR = \frac{SSTR}{r - 1} \quad (14.34a)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n_T - 1} \quad (14.34b)$$

وبدل *MSTR* هنا على متوسط مربعات المعالجات، ويرمز *MSE*، كما سبق، لمتوسط مربعات الخطأ.

مثال. في مثال شركة كتون للأغذية نحصل من النتائج السابقة، على:

$$MSTR = \frac{258}{3} = 86$$

$$MSE = \frac{46}{6} = 7.67$$

لاحظ أن حاصل جمع متوسطي المربعات لا يساوي $340/9 = 37.8$. ولذلك فإن متوسطات المربعات هنا، وكما هو الحال في الانحدار ليست تجميعية.

جدول تحليل التباين

يمكن وضع مركبات المجموع الكلي للمربعات وعدد درجات الحرية المقابلة لها

بالإضافة إلى متوسطات المربعات الناتجة عنها في جدول نسميه جدول تحاين

(ANOVA) كالجدول (١٤-٣).

جدول التحاين لمثال شركة كتون للأغذية مقدم من الجدول (١٤-٤).

جدول (٣-١٤) جدول تحاين للدراسة وحيدة العامل

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
بين المعالجات	$SSTR = \sum n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$	$r - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{r-1}$	$\sigma^2 + \frac{1}{r-1} \sum n_i (\mu_i - \mu)^2$
الخطأ (ضمن المعالجات)	$SSE = \sum \sum (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$n_T - r$	$MSE = \frac{SSE}{n_T - r}$	σ^2
المجموع الكلي	$SSTO = \sum \sum (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y})^2$	$n_T - 1$		

جدول (٤-١٤) جدول تحاين لخال شركة كتون للأغذية

مصدر التغير	SS	df	MS
بين التصاميم	258	3	86
الخطأ	46	6	7.67
المجموع الكلي	304	9	

توقع متوسط المربعات

يمكن إثبات أن القيم المتوقعة لـ MSE و $MSTR$ هي كما يلي:

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \quad (14.35a)$$

$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + \frac{\sum n_i (\mu_i - \mu)^2}{r-1} \quad (14.35b)$$

حيث:

$$\mu = \frac{\sum n_i \mu_i}{n_T} \quad (14.35c)$$

هذه القيم المتوقعة موضحة في العمود $E\{MS\}$ من الجدول (١٤-٣). وتوجد خاصيتان مهمتان من خواص توقع متوسط المربعات تستحقان الانتباه هما:

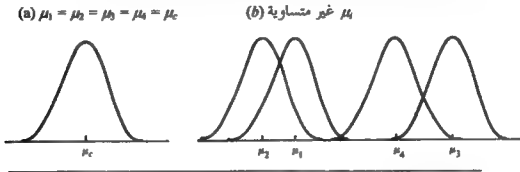
١- يُعتبر MSE مقدراً غير منحاز لتباين حدود الخطأ e_i سواء كانت متوسطات مستويات العامل μ متساوية أم لا. وهذا في الحقيقة أمر منطقي بدهة لأن تشتت المشاهدات داخل كل مستوى عامل لا يتأثر بمقادير متوسطات العامل المقدرة للمجموعات الطبيعية.

٢- عندما تكون كل متوسطات مستويات العامل μ متساوية وبالتالي مساوية للمتوسط المرجح μ فعندئذ يكون $MSR = E\{MSTR\}$ ، ذلك لأن الحد الثاني في الطرف الأيمن من (14.35b) يصبح صفراً. ولذلك فإن كلا من MSE و $MSTR$ يقدران تباين الخطأ σ^2 عندما تكون متوسطات مستويات العامل μ كلها متساوية. ولكن عندما تكون متوسطات مستويات العامل غير متساوية، فإن $MSTR$ تنحرف في المتوسط إلى أن تكون أكبر من MSE ، ذلك لأن الحد الثاني من (14.35b) سيكون عندئذ موجباً. وهذا أمر منطقي بالبداهة كما هو موضح في الشكل (١٤-٤) في حالة أربع معالجات. وتفترض الحالة التي يصورها هذا الشكل أن أحجام العينات متساوية، أي أن $n_1 = n$.

وعندما تكون كل المتوسطات μ متساوية، فإن الـ \bar{Y}_i جميعها ستبتع توزيع المعاينة نفسه بمتوسط مشترك μ وتباين σ^2/n ، وهذا مصور في الشكل (١٤-١أ). ومن جهة أخرى، إذا لم تكن المتوسطات μ متساوية، فإن الـ \bar{Y}_i ستبتع توزيعات معاينة مختلفة لكل منها التباين نفسه σ^2/n ولكن لها متوسطات مختلفة μ_i ، ويوضح الشكل (١٤-٤) ب إحدى هذه الإمكانيات. وبالتالي، فإن \bar{Y}_i ستتحو إلى الاختلاف بعضها عن بعض عندما تكون μ_i مختلفة أكثر من اختلافها لو كانت μ متساوية، وبالتالي فإن $MSTR$ ستتحو إلى أن تكون، في حالة عدم تساوي متوسطات العامل، أكبر مما هي في حالة التساوي. وسيستفاد من هذه الخاصية لـ $MSTR$ لإنشاء اختبار إحصائي نناقشه في الفقرة القادمة، وذلك ما إذا كانت متوسطات العامل μ متساوية

أم لا. فعندما يكون كل من MSE و $MSTR$ من المرتبة نفسها في مقداريهما، فسيؤخذ هذا كدليل على أن متوسطات مستويات العامل μ متساوية. وعندما يكون $MSTR$ أكبر بكثير من MSE ، فسيؤخذ هذا كدليل على أن μ غير متساوية.

شكل (٤-١) توزيعات المعاينة لـ \bar{Y}_i في حالة أربع معالجات ($n_i = n$)



تعليقات

١- لإيجاد القيمة المتوقعة لـ MSE ، نلاحظ أولاً أنه يمكن كتابة MSE على الشكل التالي:

$$MSE = \frac{1}{n_T - r} \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \quad (14.36)$$

$$= \frac{1}{n_T - r} \sum_i \left[(n_i - 1) \frac{\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n_i - 1} \right]$$

لنرمز الآن لتباين العينة للمتداد للملاحظات الخاصة بالمستوى i للعامل بالرمز s_i^2 :

$$s_i^2 = \frac{\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n_i - 1} \quad (14.37)$$

فيمكن عندئذ كتابة (14.36) كما يلي:

$$MSE = \frac{1}{n_T - r} \sum_i (n_i - 1) s_i^2 \quad (14.38)$$

وعما أنه من المعلوم جيداً أن تباين العينة (14.37) مقتر غير منحاز لتباين المجتمع،

وهو في حالتنا ص، وذلك من أجل جميع مستويات العامل، فلدينا:

$$\begin{aligned} E\{MSE\} &= \frac{1}{n_T - r} \sum_i (n_i - 1) s_i^2 \\ &= \frac{1}{n_T - r} \sum_i (n_i - 1) \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

٢- سنستنتج القيمة المتوقعة لـ $MSTR$ في الحالة الخاصة التي تكون فيها أحجام العينات n_i متساوية أي أن $n_i = n$. وعندئذ تصبح النتيجة العامة في (14.35b) لهذه الحالة الخاصة كالتالي :

$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + \frac{n \sum (\mu_i - \mu)^2}{r - 1} \quad \text{حيث } n_i = n \quad (14.39)$$

بالإضافة إلى ذلك، عندما تكون أحجام العينات لكل مستويات العامل تساوي

n ، فإن $MSTR$ وكما هي معرفة في (14.25) و (14.34a)، تصبح:

$$MSTR = \frac{n \sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{r - 1} \quad \text{حيث } n_i = n \quad (14.40)$$

ولاستنباط (14.39) اعتبر صياغة النموذج في (14.2) لـ Y_{ij} :

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

وبأخذ المتوسط لـ Y_{ij} فوق المستوى i للعامل، نحصل على:

$$\bar{Y}_i = \mu_i + \bar{\varepsilon}_i \quad (14.41)$$

حيث $\bar{\varepsilon}_i$ هو متوسط ε_{ij} الخاص بالمستوى i للعامل :

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\sum_j \varepsilon_{ij}}{n} \quad (14.42)$$

وبأخذ المتوسط لـ Y_{ij} فوق كل مستويات العامل، نحصل على:

$$\bar{Y} = \mu + \bar{\varepsilon} \quad (14.43)$$

حيث تصبح μ المعرفة في (14.35c)، كالتالي في حالة $n_i = n$:

$$\mu = \frac{n \sum \mu_i}{nr} = \frac{\sum \mu_i}{r} \quad \text{عندما } n_i = n \quad (14.44)$$

و $\bar{\varepsilon}$ هو متوسط كل الـ ε_{ij} :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum \sum \varepsilon_{ij}}{nr} \quad (14.45)$$

وبما أن كل حجم العينات متساوية فلدينا أيضاً:

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{Y}_i}{r} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\sum \bar{\varepsilon}_i}{nr} \quad (14.46)$$

وباستخدام (14.41) و (14.43) نحصل على:

$$\bar{Y}_i - \bar{Y} = (\mu_i + \bar{\varepsilon}_i) - (\mu + \bar{\varepsilon}.) = (\mu_i - \mu) + (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}.) \quad (14.47)$$

ولو قمنا بتربيع $\bar{Y}_i - \bar{Y}$ وجمعنا فوق مستويات العامل فسنحصل على:

$$\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum (\mu_i - \mu)^2 + \sum (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2 + 2 \sum (\mu_i - \mu)(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}.) \quad (14.48)$$

ونرغب الآن في إيجاد $E\{\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\}$ وبالتالي نحتاج إلى إيجاد القيمة المتوقعة لكل

حد في الطرف الأيمن من (14.48):

أ - بما أن $\sum (\mu_i - \mu)^2$ قيمة ثابتة فإن توقعها هو:

$$E\{\sum (\mu_i - \mu)^2\} = \sum (\mu_i - \mu)^2 \quad (14.49)$$

ب - قبل إيجاد القيمة المتوقعة للحد الثاني في الطرف الأيمن لنعتبر أولاً العبارة :

$$\frac{\sum (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2}{r-1}$$

وهذا هو تباين العينة الاعتيادي ، حيث $\bar{\varepsilon}$ هو متوسط الـ r حداً $\bar{\varepsilon}_i$ وفقاً لـ (14.46)

ونعرف بالإضافة إلى ذلك أن تباين العينة مقدر غير منحاز لتباين المتغير حيث المتغير في

حالتنا هذه هو $\bar{\varepsilon}_i$. ولكن من (14.42) ، فإن $\bar{\varepsilon}_i$ ليس إلا متوسط n حداً من حدود

الخطأ المستقلة ε_{ij} وهكذا نجد :

$$\sigma^2\{\bar{\varepsilon}_i\} = \frac{\sigma^2\{\varepsilon_{ij}\}}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ولذلك فإن:

$$E\left\{\frac{\sum (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2}{r-1}\right\} = \frac{\sigma^2}{n}$$

وبالتالي:

$$E\{\sum (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})^2\} = \frac{(r-1)\sigma^2}{n} \quad (14.50)$$

ج - بما أن كلا من $\bar{\varepsilon}_i$ و $\bar{\varepsilon}$ متوسطان لحدود ε_{ij} توقع كل منهما يساوي الصفر

فإن:

$$E\{\bar{\varepsilon}_i\}=0$$

$$E\{\bar{\varepsilon}\}=0$$

ولذلك يكون:

$$E\{2\sum(\mu_i - \mu)(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon})\} = 2\sum(\mu_i - \mu)E\{\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}\} = 0 \quad (14.51)$$

ونكون بذلك قد بينا بواسطة (14.49) و (14.50) و (14.51) أن :

$$E\{\sum(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\} = \sum(\mu_i - \mu)^2 + \frac{(r-1)\sigma^2}{n}$$

وبذلك نحصل فوراً على (14.39):

$$\begin{aligned} E\{MSTR\} &= E\left\{\frac{n\sum(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{r-1}\right\} = \frac{n}{r-1}\left[\sum(\mu_i - \mu)^2 + \frac{(r-1)\sigma^2}{n}\right] \\ &= \sigma^2 + \frac{n\sum(\mu_i - \mu)^2}{r-1} \end{aligned}$$

(١٤-٨) اختبار F لتساوي متوسطات مستويات عامل

إنه أمر اعتيادي أن نبدأ التحليل في الدراسة وحيدة العامل بتحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية أم لا. فعلى سبيل المثال، في مثال شركة كتون للأغذية لو أن تصاميم الغلاف الأربعة أدت إلى أحجام المبيعات نفسها، فلن تكون هناك حاجة لمزيد من التحليل، مثل تحديد أي تصميم هو الأفضل أو ما هو الفرق بين تصميمين معينين في تشجيع المبيعات.

وهكذا فإن النتائج التي نود أن نعتبرها هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r \quad (14.52)$$

ليست المتوسطات جميعها متساوية: H_a

إحصاءة الاختبار

إحصاءة الاختبار التي ستستخدم في الاختبار بين البدائل في (14.52) هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} \quad (14.53)$$

لاحظ أن MSTR تلعب هنا دور MSR في نموذج الانحدار.

وكما شاهدنا من (14.35) ، فإن MSTR مستتجة لأن تكون أكبر من MSE

عندما تكون H_0 صحيحة وبالتالي فإن القيم الكبيرة لـ F^* ستدعم H_0 . بينما قيم F^* القريبة من 1 ستدعم H_0 ، وذلك لأن لكل من $MSTR$ و MSE القيمة المتوقعة نفسها عندما تكون H_0 صحيحة. ولذلك فإن الاختبار المناسب هنا هو اختبار الذيل الأعلى.

توزيع F^*

عندما تتساوى كل متوسطات المعالجات μ_i فإن لكل مشاهدة Y_{ij} القيمة المتوقعة نفسها. وعلى ضوء الخاصية التجميعية لمجموع المربعات ولدرجات الحرية، فإنه يمكن تطبيق نظرية كوكران (3.60):

عندما تكون H_0 صحيحة فإن $\frac{SSE}{\sigma^2}$ و $\frac{SSTR}{\sigma^2}$ متغيران مستقلان ويتبع كل منهما التوزيع χ^2 .

ونستنتج بالأسلوب ذاته كما في حالة الانحدار ما يلي:

إذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع توزيع $F(r-1, n_T-r)$

وإذا كانت H_0 صحيحة، أي عندما لا تكون كل الـ μ_i متساوية، فإن F^* لا تتبع توزيع F . ولكنها ستتبع توزيعاً أكثر تعقيداً يدعى توزيع F غير المركزي. وسنستفيد من توزيع F غير المركزي عندما نناقش قوة اختبار F في الفصل السابع عشر.

ملاحظة

يكون كل من SSE و $SSTR$ مستقلين حتى لو لم تكن كل الـ μ_i متساوية ويمكن ملاحظة ذلك بسبب أن SSE يعكس التشتت داخل عينات مستويات العامل وعندما تكون حدود الخطأ موزعة طبيعياً، فإن هذا التشتت داخل مستويات العامل لا يتأثر بمقدار متوسطات مستويات العامل المقدرة. بينما يعتمد $SSTR$ ، من جهة أخرى، بالكامل على متوسطات مستويات العامل المقدرة \bar{Y}_i .

إنشاء قاعدة قرار

عند إنشاء قاعدة قرار يتم التحكم عادة في مخاطرة التورط بخطأ من النوع I. ويقدم هذا حماية ضد القيام بأية تحليلات إضافية لتأثيرات العوامل ، بينما لا توجد في الحقيقة فروق بين متوسطات مستويات العوامل. ويمكن، أيضا، التحكم في الخطأ من النوع II، كما سنرى لاحقا، عن طريق تحديد حجم العينة. وبما أننا نعرف أن F^* تتبع التوزيع $F(r-1, n_T-r)$ عندما تكون H_0 صحيحة، وأن القيم الكبيرة لـ F^* تقود إلى استنتاج أن H_a صحيحة، فإن قاعدة القرار المناسبة للتحكم في مستوى المعنوية عند α هو:

$$F^* \leq F(1-\alpha; r-1, n_T-r) \text{ إذا كان } H_0 \text{ استنتج} \quad (14.54)$$

$$F^* > F(1-\alpha; r-1, n_T-r) \text{ إذا كان } H_a \text{ استنتج} \quad (14.54)$$

حيث $F(1-\alpha; r-1, n_T-r)$ هو المئين لتوزيع F المناسب.

مثال

في مثال شركة كنتون للأغذية، نرغب في اختبار ما إذا كانت متوسطات المبيعات نفسها من أجل تصاميم الغلاف الأربعة :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

ليست جميع μ متساوية H_a

وترغب الإدارة بالتحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند $\alpha = 0.05$ ولذلك، فإننا نحتاج إلى $F(95; 3, 6)$ حيث درجات الحرية هي تلك الموضحة في الجدول (٤-١٤). ونجد من جدول أ-٤ في الملحق أن $4.76 = F(95; 3, 6)$ وبذلك تكون قاعدة القرار كالتالي:

$$F^* \leq 4.76 \text{ إذا كانت } H_0 \text{ استنتج}$$

$$F^* > 4.76 \text{ إذا كانت } H_a \text{ استنتج}$$

وباستخدام البيانات من جدول (٤-١٤) تكون إحصاء الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{56}{7.67} = 11.2$$

وبما أن $4.76 > 11.2 = F^*$ فستنتج أن H_0 صحيحة، أي أن متوسطات مستويات العامل μ غير متساوية أو أن تصاميم الغلاف الأربعة لا تقود إلى حجم المبيعات نفسه. وهكذا نستنتج أنه توجد علاقة بين تصميم الغلاف وحجم المبيعات. القيمة P - لإحصاء الاختبار هي الاحتمال $\{F(3,6) > F^* = 11.2\}$. ونجد من الجدول 4- A أن القيمة P - تقع بين 0.005 و 0.01، وفي الواقع فإن القيمة P - تساوي 0.007. هذا الاستنتاج بوجود علاقة بين تصاميم اللعب وحجم المبيعات لم يكن مفاجأة لمدير المبيعات في شركة كتون للأغذية. وذلك لأنه لم يقم بالدراسة في المقام الأول إلا لأنه كان يتوقع أن يكون لتصاميم الغلاف الأربعة تأثيرات مختلفة على حجم المبيعات، وكان مهتما بمعرفة طبيعة هذه الفروق. وسنتناقش في الفصل القادم للمرحلة الثانية للتحليل وهي كيفية دراسة طبيعة تأثيرات مستويات العامل في حالة وجود فروق بينها.

تعليقات

١- في حالة وجود مستويين، فقط، للعامل بحيث تكون $r = 2$ ، فإنه يمكن وبسهولة إثبات أن الاختبار الذي يستخدم F^* في (14.53) هو في الحقيقة مكافئ لاختبار t ذي الجانبين بين مجتمعين والمذكور في جدول (١-٢) أ. حيث يملك اختبار F هنا $(1, n_2 - 2)$ درجة حرية ويملك اختبار t $(n_1 + n_2 - 2)$ أو $n_2 - 2$ درجة حرية. وبذلك يقود كلا الاختبارين إلى مناطق حرجة متكافئة. وعند مقارنة متوسطي مجتمعين، فإنه يفضل استخدام اختبار t ذلك لأنه يمكن في هذه الحالة استخدامه لإجراء اختبار ذي جانب واحد أو اختبار ذي جانبيين جدول (١-٢)، بينما يُستخدم اختبار F ، فقط، في اختبار ذي جانبيين.

٢- بما أن اختبار F لاختبار البدائل في (14.52) هو اختبار لنموذج إحصائي خطي، فإنه يمكن الحصول عليه من الطريقة العامة التي شرحت في الفصل الثالث:

أ - النموذج التام هو نموذج تحاين (14.2):

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (14.55)$$

النموذج التام

وتوفيق النموذج التام بطريقة المربعات الدنيا وفقا لـ (14.15) يعود إلى القيم التوفيقية $\bar{Y}_y = \bar{Y}_x$ ويكون مجموع مربعات الخطأ الناتج هو:

$$SSE(F) = \sum \sum (Y_y - \bar{Y}_y)^2 = \sum \sum (Y_y - \bar{Y}_x)^2$$

وبما أنه سيتم تقدير قيم r من المعالم (μ_1, \dots, μ_r) ، فإن عدد درجات الحرية المصاحب لـ

$$SSE(F) \text{ هو } df_F = n_T - r .$$

ب - ونحت H_0 فإن النموذج المخفض يكون:

$$Y_y = \mu_c + \epsilon_y \quad (14.56)$$

حيث μ_c هو المتوسط المشترك لكل مستويات العامل. وتوفيق النموذج المخفض نحصل على مقدار المربعات الدنيا $\bar{\mu}_c = \bar{Y}$ ، بحيث تكون كل القيم التوفيقية $\bar{Y}_y = \bar{Y}$ ويكون مجموع مربعات الخطأ الناتج هو:

$$SSE(R) = \sum \sum (Y_y - \bar{Y}_y)^2 = \sum \sum (Y_y - \bar{Y})^2$$

وبما أنه سيتم تقدير قيمة معلمة واحدة هي μ_c ، فإن عدد درجات الحرية المصاحب لـ $SSE(R)$ هو $df_R = n_T - 1$.

ج - ووفقا لـ (14.24) و (14.26) على التوالي، فإن:

$$SSE(R) = SSTO$$

$$SSE(F) = SSE$$

وكذلك تبعا لـ (14.27) ، فإن $SSTO - SSE = SSTR$ وبالتالي، فإن إحصاء الاختبار

(3.69) تصبح :

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} + \frac{SSE(F)}{df_F} = \frac{SSTO - SSE}{(n_T - 1) - (n_T - r)} + \frac{SSE}{(n_T - 1)} = \frac{SSR}{r - 1} + \frac{SSE}{n_T - r} = \frac{MSTR}{MSE}$$

(٩-١٤) مداخلات ومخرجات الحاسب الآلي لحزم التحاين

كما هو الحال في تحليل الانحدار، هناك برامج حاسب آلي جاهزة للقيام بحسابات تحليل التباين. وسنفرض هنا، وكما كان الحال في مناقشاتنا لتحليل

الانحدار، أنه للقيام بحسابات تحليل التباين بالنسبة لمعظم البيانات، فيما عدا البسيطة منها، ستستعمل حاسبات آلية أو آلات حاسبة قابلة للبرمجة.

وفي تحليل الانحدار، فإن برنامجا واحدا جاهزا "للانحدار المتعدد" يكفي عادة للقيام بعدة تطبيقات مثل الانحدار الخطي البسيط وانحدار كثرة حدود و الانحدار المتعدد ولكن، من جهة أخرى، فإن البرامج الجاهزة الخاصة بتحليل التباين غالبا ما تكون خاصة بتحليل معين. ولذلك فإن مكتبة ما قد تحوي برنامجا لتحليل التباين أحادي العامل و برامج أخرى لتحليل التباين متعدد العوامل، مما سنناقشه في فصول قادمة. وغالبا ما تختلف بالكلية أشكال إدخال البيانات وإخراج النتائج من مكتبة إلى أخرى وربما اختلفت، أيضا ، في برامج تحليل التباين المختلفة في المكتبة الواحدة.

وأحد أشكال إدخال بيانات شركة كتسون للأغذية الموضحة في جدول (١٤-١)أ

يتطلب عمودين:

معالجة	مشاهدة
1	12
1	18
2	14
2	12
2	13
.	.
.	.
4	30

حيث تم إدخال هوية المعالجات في العمود الأول بينما تم إدخال البيانات في العمود الآخر. وسوف نتعرض إلى أشكال أخرى عند استخدام حزم تخمين مختلفة.

ويوضح الشكل (١٤-٥) هيئة مخرجات تقليدية عند استخدام نموذج تحليل التباين أحادي العامل. والنتائج الموضحة في الشكل (١٤-٥) هي لبيانات شركة كتسون للأغذية وتم الحصول عليها عن طريق البرنامج *BMDP* (المرجع [14.1]). ولقد أضفنا بعض التعليقات لتسهيل فهم للمخرجات. لاحظ أن هيئة إدخال البيانات مبين في أعلى الشكل (١٤-٥) ويليه عدد المشاهدات (المحلات) لكل تصميم غلاف، وتقديرات متوسطات مستويات مستويات العامل، وجدول تحليل التباين. ولاحظ أن النتائج في شكل (١٤-٥) تتطابق مع تلك التي حصلنا عليها من الحاسب اليدوي في الجدول (١٤-١)أ أو (١٤-٤). وسبب ذلك هو عدم وجود أخطاء تدوير في البيانات البسيطة

البسيطة لمثال شركة كتون للأغذية. بينما قد تبرز تأثيرات لتدوير الأرقام العشرية في البيانات الأكثر تعقيدا، وبالتالي يمكن الحصول على نتائج مختلفة نوعا ما.

شكل (١٤-٥) جزء من مخرجات الحاسب الآلي للدراسة تحليل تباين أحادية العامل - مثال شركة كتون للأغذية (BMDP، المرجع [14.1]).

CASE NO. LABEL	1 DESIGN	2 SOLD	V_0
1	1	12	
2	1	16	
3	2	14	
4	2	12	
5	2	13	
6	3	19	
7	3	17	
8	3	23	
9	4	24	
10	4	30	

NUMBER OF CASES PER GROUP	
DESIGN1	2.
DESIGN2	3.
DESIGN3	3. ← R_1
DESIGN4	2.
TOTAL	10. ← R_T

ESTIMATES OF MEANS					
	DESIGN1	DESIGN2	DESIGN3	DESIGN4	TOTAL
SOLD	2	15.0000	13.0000	19.0000	27.0000
			↑ V_0		18.0000 ← \bar{y}_0

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE					
SOURCE OF VARIANCE	D.F.	SUM OF SQ.	MEAN SQ.	F-VALUE	PROB(TAIL)
QUALITY OF CELL MEANS	3	254.0000	84.6667	11.2174	0.0071
ERROR	6	44.0000	7.3333		
Between treatments					
SSR					
SSE					
One-tailed P-value					

لقد ذكرنا، عند مناقشتنا لأخطاء التدوير في تحليل الانحدار، أن نتائج المربعات الدنيا تتأثر بشكل كبير بآثار التدوير وأن حزم الانحدار المختلفة لا تتساوى في ميزة ضبطها لمثل هذه الآثار. وبصورة مماثلة، فإن حزم تحليل التباين تختلف في جودتها ومن الحكمة تفحص برنامج جاهز في مكتبة برامج قبل استخدامه للمرة الأولى. وإحدى الطرق لفحص أي برنامج هي باستخدامه على مجموعة بيانات معقدة تكون النتائج الدقيقة لها معروفة مسبقا.

(١٤-١٠) صياغة بديلة للنموذج I

نموذج تحمين I - نموذج تأثيرات عامل

يتم في بعض الأحيان استخدام صياغة بديلة ولكنها مكافئة تماماً لنموذج تحمين I أحادي العامل (14.2). وتدعى هذه الصياغة البديلة نموذج تأثيرات العامل. وفي هذه الصياغة البديلة يُعر عن متوسطات المعالجات μ_i بصورة مكافئة باستخدام المتطابقة التالية:

$$\mu_i = \mu + (\mu_i - \mu) \quad (14.57)$$

حيث μ مقدار ثابت ويمكن تعريفه ليناسب الدراسة. وسنرمز للفرق $\mu_i - \mu$ بـ τ_i :

$$\tau_i = \mu_i - \mu \quad (14.58)$$

بحيث يمكن كتابة (14.57) بشكل مكافئ، كالتالي:

$$\mu_i = \mu + \tau_i \quad (14.59)$$

ويدعى الفرق $\mu_i - \mu = \tau_i$ تأثير مستوى العامل i . ويمكن الآن كتابة نموذج التحمين I كالتالي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \quad (14.60)$$

حيث:

μ مقدار ثابت مشترك لكل المشاهدات

τ_i تأثير المستوى i للعامل (مقدار ثابت لكل مستوى عامل)

ϵ_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, n_i$

ويدعى نموذج التحمين (14.60) نموذج تأثيرات العامل، ذلك لأنه يُعر عنه بدلالة تأثيرات العامل τ_i ، مما يميزه عن نموذج متوسطات الخلايا (14.2) الذي يُعر عنه بدلالة متوسطات المعالجات μ_i .

وكما هو الحال في نموذج متوسطات الخلايا (14.2) ، فإن النموذج المكافئ (14.60) نموذج خطي. وسنوضح ذلك في الفقرة التالية.

تعريف μ

تعتمد عملية شطر متوسط مستوى عامل μ_i إلى قسمين هما متوسط عام μ وتأثير مستوى العامل τ_i على تعريف μ . ويمكن القيام بذلك بعدة طرق. وسنشرح الآن طريقتين أساسيتين لتعريف μ .

المتوسط غير المرجح وُجد أن عملية تعريف μ كوسط غير مرجح لكل متوسطات مستويات العامل μ_i هي في الغالب مفيدة:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i}{r} \quad (14.61)$$

وبعني هذا التعريف ضمنا أن:

$$\sum_{i=1}^r \tau_i = 0 \quad (14.62)$$

إذ لدينا من (14.58):

$$\sum \tau_i = \sum (\mu_i - \mu) = \sum \mu_i - r\mu$$

ومن (14.61) لدينا:

$$\sum \mu_i = r\mu$$

وهكذا فإن تعريف المتوسط العام μ كما في (14.61) يتضمن وضع قيد على τ_i ، والقيد في هذه الحالة هو أن مجموعها يجب أن يكون صفرا.

مثال. في مثال أنظمة الحوافز التشجيعية في شكل (١٤ - ٢)، فإن $\mu_1 = 70$ و $\mu_2 = 58$ و $\mu_3 = 90$ و $\mu_4 = 84$ وعندما نعرف μ وفقا لـ (14.61) نحصل على:

$$\mu = \frac{70+58+90+84}{4} = 75.5$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 70 - 75.5 = -5.5 \\ \tau_2 &= 58 - 75.5 = -17.5 \\ \tau_3 &= 90 - 75.5 = 14.5 \\ \tau_4 &= 84 - 75.5 = 8.5 \end{aligned}$$

وعلى سبيل المثال، فإن تأثير المستوى الأول للعامل هو $\pi_1 = -5.5$ ، وهذا يشير إلى أن إنتاجية المستخدمين الذين يحصلون على نظام الحوافز التشجيعية الأول هي أقل بـ 5.5 وحدات من متوسط الإنتاج العام لكل أنواع أنظمة الحوافز التشجيعية الأربعة. المتوسط المرجح

ويمكن تعريف المقدار الثابت μ كمتوسط مرجح لكل متوسطات مستويات العامل μ_i :

$$\mu = \sum_{i=1}^I w_i \mu_i \quad (14.63)$$

حيث يتم تعريف الأوزان w_i بحيث يكون $\sum w_i = 1$. ويكون القيد على π_i ، عندئذ، هو:

$$\sum_{i=1}^I w_i \mu_i = 0 \quad (14.64)$$

وهذا يتبع بالطريقة نفسها كما في (14.62).

وينبغي لعملية اختيار الأوزان w_i أن تعتمد على وجود مغزى للقياسات الناتجة لتأثيرات مستويات العامل. وستقدم الآن مثالين بحيث يناسب كلا منهما اختيار مختلف للأوزان:

(١) الوزن وفقاً لمقياس أهمية معروف و (٢) الوزن وفقاً لحجم العينة.

مثال ٩. ترغب شركة تأجير سيارات في معرفة متوسط استهلاك الوقود (بالأميال لكل جالون) وذلك لأسطول السيارات الكبير لديها والذي يتألف من 50 في المئة من السيارات الصغيرة و 30 في المئة من السيارات المتوسطة و 20 في المئة من السيارات الكبيرة. ومن الممكن أن يكون المقياس ذو المغزى هنا لـ μ بدلالة المتوسط العام لاستهلاك الوقود:

$$\mu = .5\mu_1 + .3\mu_2 + .2\mu_3 \quad (14.65)$$

حيث μ_1 ، μ_2 و μ_3 هي متوسطات استهلاك الوقود للأنواع الثلاثة من السيارات في الأسطول وتقدير μ هنا هو:

$$\hat{\mu} = .5\bar{Y}_1 + .3\bar{Y}_2 + .2\bar{Y}_3 \quad (14.66)$$

مثال ٢. لو أن شركة تأجير السيارات في مثال ١ استخدمت أحجام العيّنات للأنواع الثلاثة من السيارات في أسطولها، والتي لها تقريبا النسب نفسها كعدد السيارات من كل نوع في الأسطول، فقد يكون استخدام النسب n_1/n_T و n_2/n_T و n_3/n_T ، على الترتيب، كأوزان مناسبة هنا. وعندئذ سيكون التعريف الناتج للثابت μ ، المتوسط الإجمالي لاستهلاك الوقود كما يلي:

$$\mu = \frac{n_1}{n_T} \mu_1 + \frac{n_2}{n_T} \mu_2 + \frac{n_3}{n_T} \mu_3 \quad (14.67)$$

ويمكن تقدير هذه الكمية بـ \bar{y} حيث:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1}{n_T} \bar{y}_1 + \frac{n_2}{n_T} \bar{y}_2 + \frac{n_3}{n_T} \bar{y}_3 = \bar{y} \quad (14.68)$$

وعندما تكون أحجام العيّنات متساوية فإن μ ، وكما هو معروف في (14.67)، يُختزل إلى المتوسط غير المرجح (14.61).

اختبار تساوي متوسطات مستويات العامل

بما أن نموذج تأثيرات العامل (14.60) مكافئ لنموذج متوسطات الخلايا (14.2)، فإن اختبار تساوي متوسطات مستويات العامل يستخدم نفس إحصاءة الاختبار F^* في (14.53). والفرق الوحيد هنا هو في صياغة البدائل. فالبديل في نموذج متوسطات الخلايا وكما رأينا في (14.52) هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \mu_i \text{ متساوية}$$

وفي نموذج تأثيرات العامل (14.60) تصبح البدائل هذه نفسها وبدلالة تأثيرات العامل كما يلي:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_r = 0 \quad (14.69)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \tau_i \text{ متساوية}$$

يمكن إثبات تكافؤ هاتين الصيغتين بسهولة. إن تساوي متوسطات مستويات العامل $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$ يتضمن تساوي كل الـ τ_i . وهذا يتبع من (14.59) حيث أن الحد الثابت μ مشترك بين كل تأثيرات مستويات العامل τ_i ، وبالإضافة إلى ذلك

فإن تساوي متوسطات مستويات العامل يتضمن أن كل τ_i تساوي الصفر سواء كان القيد المفروض على τ_i هو على الشكل (14.62) أو على الشكل (14.64). وفي كلا الحالتين، وبعلومية تساوي τ_i ، فإنه يمكن تحقيق القيد بطريقة واحدة، فقط، وهي كون $\tau_i = 0$. وهكذا يتكافأ القولان بأن كل متوسطات مستويات العامل μ متساوية أو أن كل تأثيرات مستويات العامل τ_i تساوي الصفر.

(١٤-١٤) تحليل التباين أحادي العامل بأسلوب الانحدار.

لقد نوهنا سابقاً أن نموذج متوسطات الخلايا (14.2) هو نموذج خطي كما هو الحال بالنسبة لنموذج تأثيرات العامل المكافئ له (14.60). وهكذا يمكننا الحصول على إحصاء الاختبار F^* لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل μ باستخدام صيغة المصفوفات كما في الفقرة (٨-٦). وفي الواقع نستطيع الحصول على إحصاء الاختبار F^* من دون تناول المصفوفات وذلك باستخدام برنامج انحدار متعدد. وسنشرح الآن تحليل التباين أحادي العامل بأسلوب الانحدار ولهذا الغرض سنستفيد من نموذج تأثيرات العامل (14.60):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

وسنفترض هنا استخدام أوزان متساوية لمتوسطات مستويات العامل مستكون مناسبة لتعريف الثابت الإجمالي μ .

ولعرض نموذج التباين (14.60) كنموذج خطي، ينبغي تمثيل المعالم $\mu, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ في النموذج. ولكن القيد (14.62) في حالة تساوي الأوزان:

$$\sum_{i=1}^r \tau_i = 0$$

يتضمن أن:

$$\tau_r = -\tau_1 - \tau_2 - \dots - \tau_{r-1} \quad (14.70)$$

وبالتالي ستحتاج في النموذج الخطي إلى المعالم $\mu, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}$ ، فقط، وذلك لأن τ_r دالة في $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}$.

ولإيضاح كيفية تطوير نموذج خطي بهذا الأسلوب، سنعتبر دراسة أحادية العامل بـ $r = 3$ مستويات عامل وحيث $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ وتكون مصفوفات الـ Y, X, β و ε لهذه الحالة كالآتي:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} \quad (14.71)$$

لاحظ أن متجه القيم المتوقعة، $E\{Y\} = X\beta$ يؤدي إلى التالي:

$$E\{Y\} = \begin{bmatrix} E\{Y_{11}\} \\ E\{Y_{12}\} \\ E\{Y_{21}\} \\ E\{Y_{22}\} \\ E\{Y_{31}\} \\ E\{Y_{32}\} \end{bmatrix} \quad X\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \tau_1 \\ \mu + \tau_1 \\ \mu + \tau_2 \\ \mu + \tau_2 \\ \mu - \tau_1 - \tau_2 \\ \mu - \tau_1 - \tau_2 \end{bmatrix} \quad (14.72)$$

وبما أن $\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2$ وفقاً لـ (14.70)، فنرى أن $E\{Y_{31}\} = E\{Y_{32}\} = \mu + \tau_3$ وهكذا

فإن تمثيل المصفوفة X والمتجه β أعلاه يعطينا في كل الحالات القيم المتوقعة التالية:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu + \tau_i$$

ويشير التوضيح في (14.71) كيف نحتاج إلى تعريف نموذج الانحدار المتعدد،

بصورة عامة، بحيث يكون مكافئاً لنموذج التحاين أحادي العامل (14.60). لاحظ أننا

سنحتاج إلى المتغيرات المؤشرة 0 أو 1 أو -1. وقد تمت مناقشة هذا الرمز في الفقرة

(٦-١٠). ومع أن هذا الرمز ليس بسيطاً كالرمز 0، 1 للمتنفس المؤشر، إلا أن هذا

مرغوب هنا لأنه يقود إلى معاملات انحدار في المتجه β هي في الوقت نفسه معالم

نموذج تحاين تأثيرات العامل، أي $\mu, \tau_1, \dots, \tau_r$.

ولنرمز بـ X_{i1} لقيمة المتغير المؤشر X_1 من أجل الملاحظة i عند المستوى i للعامل،

وبـ X_{i2} لقيمة المؤشر X_2 للملاحظة نفسها وهكذا حتى نستخدم في الإجمال $r-1$ من

المتغيرات المؤشرة في النموذج، وعندئذ يكون نموذج الانحدار المتعدد كمايلي:

$$(14.73) \quad Y_{ij} = \mu + \tau_i X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \dots + \tau_{r-1} X_{ij,r-1} + \varepsilon_{ij}$$

حيث:

1 إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل

$$= X_{ij1} \quad -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى } r \text{ للعامل}$$

0 فيما عدا ذلك

⋮

1 إذا كانت الملاحظة من المستوى $r-1$ للعامل

$$= X_{ij,r-1} \quad -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى } r \text{ للعامل}$$

0 فيما عدا ذلك

ولاحظ كيف تلعب معالم نموذج التخمين دور معالم دالة الانحدار في (14.73)،

حيث يكون حد التقاطع هو μ ومعاملات الانحدار هي $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}$.

ولاختبار تساوي متوسطات المعالجات μ_i بأسلوب الانحدار، سنعرض الفرضيات

البديلة في الصياغة المكافئة (14.69) مع ملاحظة أن τ_r لابد أن تساوي الصفر عندما

$$\text{تكون } 0 = \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{r-1} \text{ وذلك وفقا لـ (14.70):}$$

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{r-1} = 0$$

$$(14.74) \quad \text{ليست جميع الـ } \tau_i \text{ مساوية للصفر: } H_a$$

لاحظ أن H_0 تفرض أن كل معاملات الانحدار في نموذج الانحدار (14.73)

مساوية للصفر، ولذلك فإننا نستعمل إحصاءة الاختبار المعتادة (7.34b) لاختبار ما إذا

كانت هناك علاقة انحدار أم لا:

$$(14.75) \quad F^* = \frac{MSR}{MSE}$$

مثال

لاختبار تساوي متوسطات المبيعات لتصاميم الغلاف الأربعة في مثال شركة

كتون للأغذية بأسلوب الانحدار سنستخدم نموذج الانحدار:

$$(14.76) \quad Y_{ij} = \mu + \tau_1 X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \tau_3 X_{ij3} + \varepsilon_{ij}$$

حيث:

1 إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل

$= X_{y1}$ 1- إذا كانت الملاحظة من المستوى 4 للعامل
0 فيما عدا ذلك

1 إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل
 $= X_{y2}$ 1- إذا كانت الملاحظة من المستوى 4 للعامل
0 فيما عدا ذلك

1 إذا كانت الملاحظة من المستوى 3 للعامل
 $= X_{y3}$ 1- إذا كانت الملاحظة من المستوى 4 للعامل
0 فيما عدا ذلك

يوضح الجدول (١٤-٥) متجه للملاحظات Y والمصفوفة X للبيانات في الجدول (١٤-١) أ وعلى سبيل المثال لاحظ، للملاحظة Y_{11} ، $X_1 = 1$ و $X_2 = 0$ و $X_3 = 0$ وهكذا نحصل من (14.76) على:

$$E\{Y_{11}\} = \mu + \tau_1$$

وبطريقة مشابهة، نحصل من أجل الملاحظة Y_{42} على $X_1 = -1$ و $X_2 = -1$ و $X_3 = -1$ وبالتالي يكون:

$$E\{Y_{42}\} = \mu - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 = \mu + \tau_4$$

لاحظ أننا نستخدم الترميزات التالية في المتغيرات المؤشرة وذلك لملاحظات من كل من مستويات العامل الأربعة:

ترميز			مستوى عامل
X_3	X_2	X_1	
0	0	1	1
0	1	0	2
1	0	0	3
-1	-1	-1	4

وبتشغيلة حاسب لحزمة انحدار متعدد في حالة بيانات الجدول (١٤-٥) أ، حصلنا على دالة الانحدار التوفيقية وجدول تحليل التباين المعروضين في الجدولين (١٤-٥) ب و (١٤-٥) ج، ولذلك تكون إحصاء الاختبار (14.75) كالتالي:

$$F^* = \frac{MSR}{MSE} = \frac{86}{7.67} = 11.2$$

وهذه إحصاءة الاختبار نفسها التي حصلنا عليها سابقاً بناءً على حسابات تحليل التباين. وفي الحقيقة فإن جدول تحليل التباين الذي حصلنا عليه بأسلوب الانحدار هو الجدول نفسه في (٤-١٤) الذي حصلنا عليه بأسلوب تحليل التباين، فيما عدا أن مجموع مربعات المعالجات ومتوسط المربعات في الجدول (٤-١٤) سميت الآن بمجموع مربعات الانحدار ومتوسط المربعات في الجدول (٥-١٤) جـ.

ومن هذه النقطة فصاعداً، فإن طريقة الاختبار القائمة على أسلوب الانحدار توازي تماماً طريقة الاختبار في تحليل التباين التي شرحناها سابقاً.

جدول (٥-١٤) أسلوب الانحدار لتحليل التباين - مثال شركة كتيون للأغذية

١ - مصفوفات البيانات لنموذج الانحدار (14.76)

$$Y = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 14 \\ 12 \\ 13 \\ 19 \\ 17 \\ 21 \\ 24 \\ 30 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ب - دالة الانحدار التوفيقية.

$$\hat{Y} = 18.5 - 3.5X_1 - 5.5X_2 + 5X_3$$

ج - جدول تحليل التباين للانحدار

MS	df	SS	مصدر الخطأ
MSR = 86	3	SSR = 258	الانحدار
MSE = 7.67	6	SSE = 46	الخطأ
	9	SSTO = 304	المجموع

تعليقات

- ١- في دالة الانحدار التوفيقية في الجدول (١٤-٥) ب، نجد أن حد التقاطع 18.5 هو المتوسط غير المرجح لمتوسطات مستويات العامل المقدرة \bar{y}_i وذلك لأنه قد تم تعريف μ_i كمتوسط غير مرجح لمتوسطات مستويات العامل μ_i .
- ٢- على وجه العموم فإنه لا يتم استخدام أسلوب الانحدار في مسائل تحليل التباين الاعتيادية. والسبب في ذلك هو أن بنية المصفوفة X في تحليل التباين تكون، في العادة، بسيطة جداً، كما رأينا في جدول (١٤-٥) لمثال شركة كنتون للأغذية. وتسمح هذه البنية البسيطة بتبسيطات حسابية متعارف عليها بوضوح في الطرق الإحصائية الخاصة بتحليل التباين. وستابع أسلوب الانحدار لتحليل التباين في هذا الفصل وفي الفصول القادمة لسببين رئيسين. السبب الأول هو أن النموذج الإحصائي الخطي العام (7.18) الذي درسنه في الفصل السابع من هذا الكتاب يشمل نماذج تحليل التباين. والسبب الثاني هو أن أسلوب الانحدار مفيد جداً لتحليل دراسات متعددة العوامل لا تكون بنية المصفوفة X فيها بسيطة.
- ٣- عندما نرغب في إجراء اختبار تحليل التباين بأسلوب انحدار قائم على نموذج متوسطات الخلايا (14.2):

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

نعرف المتجه β بحيث يحوي كل متوسطات المعالجات μ_i وعددها r :

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{bmatrix} \quad (14.77)$$

ونستخدم r من المتغيرات المؤشرة X_1, \dots, X_r بحيث يأخذ كل منها القيم 0 و 1 كما بينا في الفصل العاشر:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل.} \\ &0 \text{ فيما عدا ذلك} \\ &\vdots \\ X_r &= 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى } r \text{ للعامل.} \\ &0 \text{ فيما عدا ذلك} \end{aligned} \quad (14.78)$$

ولذلك يكون نموذج الانحدار كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu_1 X_{ij1} + \mu_2 X_{ij2} + \dots + \mu_k X_{ijk} + \varepsilon_{ij} \quad (14.74)$$

حيث تلعب المتوسطات μ_k دور معاملات الانحدار.

وتحتوي المصفوفة X بهذه الطريقة القيم 0 و 1 فقط. فعلى سبيل المثال في حالة

$r = 3$ مستويات عامل و $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ من المشاهدات تكون المصفوفة X

(البيانات مرتبة كالتالي Y_{23}, Y_{13}, Y_{11}) وإلخ) والمتجه β كالتالي:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه ليس لنموذج الانحدار (14.79) حد تقاطع وإذا استُخدم برنامج

حاسب آلي في هذه الحالة، فمن المهم تحديد عملية التوفيق بدون حد تقاطع.

ويتطلب اختبار تساوي متوسطات مستويات العامل، أي $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$

التساؤل عما إذا كانت معاملات الانحدار في (14.79) متساوية أم لا، وليس عن

كونها مساوية للصفر أم لا. ولاجراء هذا الاختبار، فإنه يجب أن نوفق النموذج التام

أولاً ومن ثمَّ النموذج المخفض.

ويكون النموذج المخفض عندما تكون $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = \mu$ صحيحة كالتالي :

$$Y_{ij} = \mu_c + \varepsilon_{ij} \quad (14.80)$$

حيث μ_c القيمة المشتركة لكل قيم μ_k تحت H_0 وتحتوي المصفوفة X ببساطة على

عمود من القيم 1. وفي مثالنا هنا ستكون المصفوفة X والمتجه β كالتالي:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta = [\mu_c]$$

وبعد أن يتم توفيق النموذجين التام و المحفّض ونحصل على مجموع مربعات الخطأ يتم حساب إحصاءة الاختبار الخطية العامة (3.69).

مراجع ورد ذكرها.

[14.1]. Dixon, W. J., Chief editor. *BMDP Statistical Software Manual*, vols. 1 and 2. Berkeley, Calif. : University of California Press, 1988.

مسائل

(١٤-١) بالعودة إلى الشكل (١٤-١)أ. لو كنت تعرف دالة الانحدار الحقيقية فهل يمكنك تحديد متوسط مستوى المبيعات عندما يكون مستوى السعر 68 دولاراً؟ هل يمكنك القيام بهذا من الشكل (١٤-١)ب ، لو كنت تعرف ، فقط، قيم للمعلم μ و σ و ρ في نموذج التحاين (14.2)؟ ما هو التمييز بين نماذج الانحدار ونماذج التحاين الذي يبتته إجاباتك ؟

(١٤-٢) تخطط باحثة تسويق بعد أن جمعت بيانات عن مصاريف حبوب الإفطار لعائلات لديها 1, 2, 3, 4 و 5 من الأطفال الذين يعيشون في المنزل وذلك باستخدام نموذج انحدار اعتيادي لتقدير متوسط المصاريف في كل من المستويات الخمسة من حجم العائلة. ولكنها لم تستطع إتخاذ قرار إزاء توفيق نموذج انحدار خطي أو نموذج انحدار تربيعي، في حين أن البيانات لم تعط دليلاً قاطعاً لمصلحة أحد النموذجين. وقد اقترح عليها أحد زملائها ما يلي: "في حالتك هذه يمكنك ببساطة استخدام نموذج تحاين". فهل هذا اقتراح مفيد؟ اشرح.

(١٤-٣) بالعودة إلى مجموعة البيانات *SENIC*. قام أحد المحللين بتحديد أربع شرائح عمرية للمتغير 3 (العمر) ويرغب في استخدام نموذج التحاين (14.2) لتحديد ما إذا كان متوسط خطورة الملوى (المتغير 4) هو نفسه لشرائح العمر الأربع.

أ - ما هو المتغير التابع هنا؟

ب - عرف العامل للدراس. وما هي مستوياته؟

ج - هل العامل كمي أم نوعي ؟

د - هل العامل تصنيفي أم تجريبي ؟

(١٤-٤) تم عشوائيا تقسيم ثلاثين متدربا إلى ثلاث مجموعات، تتكون كل مجموعة من عشرة أشخاص، وتم إعطاء كل مجموعة تعليمات لتشغيل نظام معالجة كلمات مختلف. وفي نهاية فترة التدريب أعطى كل متدرب مشروع معالجة كلمات موحد، ورصد الوقت الذي أنهى كل متدرب فيه المشروع. ولاختبار ما إذا كان متوسط الوقت هو نفسه للأنظمة الثلاثة سنستخدم نموذج التحالين (14.2).

أ - ما هو المتغير التابع هنا؟

ب - عرف العامل المدروس. وما هي مستوياته؟

ج - هل العامل كمي أم نوعي ؟ هل ستختلف إجابتك في حالة أنه سمح للمتدرب (التجربة) باختيار نظام معالجة الكلمات الذي يريد (تريد)؟

(١٤-٥) في دراسة عن مدى العزم على أخذ لقاحات ضد الأنفلونزا في منطقة مهذبة بوباء، تم تقسيم 90 شخصا إلى ثلاث مجموعات في كل منها 30 شخصا، وفقا لدرجة مخاطرة الإصابة بالمرض. وفي كل مجموعة كان جميع أفرادها موجودين عند سؤال كل شخص فيها عن إمكانية أخذه للقاح، وذلك على مقياس احتمالي يتراوح بين الصفر والواحد، مما لا شك فيه أن معظم الأشخاص قد سمعوا إجابات الآخرين بجانهم. ويرغب محلل في اختبار ما إذا كان متوسط درجات العزم على أخذ اللقاح هي نفسها في المجموعات الثلاث. اعتبر كل فرضية من فرضيات نموذج التحالين (14.2) واشرح ما إذا كانت هذه الفرضية متحققة في الوضع الراهن.

(١٤-٦) في دراسة لفعالية دعاية تستخدم الضوء المسرحي، جئى بأشخاص إلى استديو وعرض عليهم فيلم بواحد من ثلاثة أنواع من الدعاية التي تستخدم

الضوء المسرحي لمتج معين. وقيس موقف كل شخص من المنتج قبل عرض الفيلم وبعده.

أ - في حالة من هذا النوع، هل ينبغي استخدام معالجة حيادية ؟

ب - اشرح بدقة ماذا ستكون عليه طبيعة المعالجة الحيادية لهذه الدراسة.

(٧-١٤) تدرس شركة العلاقة بين الرضى الوظيفي والقدم الوظيفي ولهذا الغرض

وزعت الشركة المستخدمين إلى ثلاث مجموعات وفقا لطول مدة الخدمة

(أقل من 5 سنوات ، ٥-١٠ سنوات، أكثر من ١٠ سنوات).

افترض أن $\mu_1 = 65$, $\mu_2 = 30$, $\mu_3 = 95$ و $\sigma = 3$ وأنه يمكن تطبيق نموذج

التحايين (14.2).

أ - ارسم تمثيلاً لهذا النموذج في هيئة الشكل (١٤-٢).

ب - إذا اختير 25 شخصا من كل مجموعة عشوائيا لمقابلة شخصية

يُسألون فيها بشكل مركز عن رضاهم الوظيفي، أحسب $E\{MSTR\}$

و $E\{MSE\}$. هل $E\{MSTR\}$ كبيرة جدا هنا مقارنة بـ $E\{MSE\}$ ؟

وما هي الآثار المترتبة على ذلك ؟

(٨-١٤) في دراسة عن طول الإقامة في المستشفى (مقاسة بالأيام) لأشخاص في

أربع مجموعات دخل، كانت المعالم كالتالي:

$$\mu_1 = 5.1, \mu_2 = 6.3, \mu_3 = 7.9, \mu_4 = 9.5, \sigma = 2.8$$

افترض أن نموذج التحايين (14.2) مناسب.

أ - ارسم تمثيلاً لهذا النموذج في هيئة الشكل (١٤-٢).

ب - إذا اختير 100 شخص من كل مجموعة دخل عشوائيا ليعرضوا

للدراسة. احسب $E\{MSTR\}$ و $E\{MSE\}$. هل $E\{MSTR\}$ أكبر

بكثير $E\{MSE\}$ من هنا؟ ما هي الآثار المترتبة على ذلك؟

ج - لو أن $\mu_2 = 5.6$ و $\mu_3 = 9.0$ مع بقاء كل شيء آخر على حاله،

فكم سيكون $E\{MSTR\}$ ؟ ولماذا يكون $E\{MSTR\}$ هنا أكبر من

هـ - ما هي القيمة P - للاختبار في الفقرة (د)؟ وكيف تدعم هذه القيمة

القرار الذي وصلت إليه في الفقرة (د)؟

و - كيف تبدو طبيعة العلاقة بين نفقات البحث والتطوير وبين تحسين الإنتاجية؟

(١١-١٤) لون الاستبيان. في تجربة لدراسة لون الورق (أزرق، أخضر، برتقالي) على معدلات الاستجابة لاستبيانات وزعت "بطريقة وضعها على الزجاج الأمامي للسيارة" في مواقف أسواق مركزية، اختبر ١٥ سوقاً مركزياً ممثلة في أحد المناطق الحضرية وخصص كل لون عشوائياً لخمس مواقع. وفيما يلي معدلات الاستجابة (بالنسبة المئوية). افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

		j			
		5	4	3	2
1	أزرق	35	27	31	26
2	أخضر	29	31	25	29
3	برتقالي	28	29	27	25

ملخص نتائج حسابية : $SSE = 116.40$, $SSR = 7.60$

أ - أوجد القيم التوفيقية

ب - أوجد الرواسب

ج - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختر ما إذا كان متوسط معدلات الاستجابة يختلف باختلاف

الألوان الثلاثة مستخدماً مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. اعرض الفرضيات

البديلة، قاعدة القرار والنتيجة وما هي القيمة P - للاختبار ؟

هـ - عندما أطلع أحد المديرين التنفيذيين على النتائج علق بقوله : "هل

رأيت؟ لقد كنت محقاً منذ البداية. فقد كان بإمكاننا أن نطبع

الاستبيان على ورق أبيض حيث أنه أرغص "فهل هذا هو الاستنتاج الذي توصلت إليه الدراسة؟ ناقش.

(١٢-١٤) علاج إعادة التأهيل. يرغب باحث في مركز لإعادة التأهيل في فحص العلاقة بين اللياقة البدنية، قبل إجراء عملية تصحيحية في الركبة، وبين الوقت اللازم للعلاج الطبيعي حتى تنجح عملية إعادة التأهيل. لقد روجعت ملفات المرضى في مركز التأهيل وتم اختيار 24 مريضا من الذكور الذين تتراوح أعمارهم ما بين الثامنة عشرة والثلاثون عاما و اجتازوا عملية تصحيحية في الركبة خلال العام المنصرم، وفيما يلي عدد الأيام التي احتاجها كل مريض لإنهاء فترة العلاج الطبيعي وكذلك حالة اللياقة البدنية قبل العملية (تحت المتوسط، متوسط، فوق المتوسط).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 تحت المتوسط	29	42	38	40	43	40	30	42		
2 متوسط	30	35	39	28	31	31	29	35	29	33
3 فوق المتوسط	26	32	21	20	23	22				

افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

أ - أوجد القيم التوقيفية.

ب - أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقا لـ (14.18)؟

ج - أكتب جدول تحليل التباين.

د - اختر ما إذا كان عدد الأيام اللازمة لإعادة التأهيل بنجاح هي

نفسها لمجموعات اللياقة الثلاث اضبط المخاطرة α عند 0.01. اعرض

الفرضيات البديلة وقاعدة القرار و النتيجة.

هـ - ما هي القيمة P- للاختبار في الفقرة (د). اشرح كيف يمكن

الوصول إلى القرار نفسه بمعرفة القيمة P-.

الكروتون. وقد طلب أحد المستشارين بأن يتم اختيار 20 من هذه العلب المعبأة من كل آلة ويتم وزنها بعناية، وفيما يلي المشاهدات (وللسهولة كتبت كائنات عن 32.0 أونصة). افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

i	j									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	-.21	.27	-.27	-.04	.10	.38	.18	.07	.20	-.14
2	.46	.11	.12	.06	.24	.47	.12	.11	.11	.46
3	.21	.78	.32	.45	.22	.35	.54	.24	.47	.62
4	.49	.58	.52	.29	.27	.55	.40	.14	.48	.34
5	-.19	.27	.06	.11	.23	.15	.01	.22	.29	.14
6	.05	-.05	.28	.47	.12	.27	.08	.17	.43	-.07

i	j									
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	.39	-.07	-.02	.28	.09	.13	.26	.07	.01	-.19
2	.05	.53	.42	.29	.36	.04	.17	.02	.11	.12
3	.47	.55	.59	.71	.45	.48	.50	.20	.61	.20
4	.01	.33	.18	.13	.48	.51	.42	.45	.20	.20
5	.20	.30	-.11	.27	-.20	.24	.20	.14	.35	-.18
6	.20	.01	.10	.16	-.06	.13	.43	.35	-.09	.05

أ - أوجد القيم التوفيقية.

ب - أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقاً لـ (14.18)؟

ج - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كان متوسط الكمية المعبأة يختلف من آلة لأخرى أم لا.

اضبط المخاطرة α عند 0.05. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة

القرار و النتيجة. وهل يدعم استنتاجك شكوى مدير المبيعات ؟

هـ - ما هي القيمة P - للاختبار في الفقرة (د) ؟ وهل هذه القيمة متسقة

مع النتيجة في الفقرة (د) ؟ اشرح.

و - هل يبدو التشتت بين متوسط الكميات المعبأة للآلات الست كبيراً بالمقارنة مع تشتت الكميات المعبأة في العلب الخاصة بأي من الآلات؟.

(١٤-١٥) توزيع جوائز تشجيعية. يستعمل أحد صانعي المشروبات الغازية خمسة وكلاء (1, 2, 3, 4, 5) للقيام بعملية توزيع جوائز تشجيعية على منتجاته المختلفة. ويرغب مدير التسويق في دراسة حدود الأوقات التي يتم توزيع الجوائز فيها. فاختار عشوائياً عشرين عملية لكل وكيل وحسب الوقت المنصرم (بالأيام) للقيام بكل عملية. وفيما يلي النتائج. افترض أن جدول التحاين (14.2) مناسب.

<i>i</i>										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	<i>i</i>
21	23	27	28	25	21	20	29	24	24	1
19	28	24	23	29	22	24	20	20	18	2
11	8	9	14	10	12	12	8	11	10	3
17	11	18	10	19	12	16	18	13	15	4
28	29	31	30	28	29	35	28	22	33	5

<i>i</i>										
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	<i>i</i>
25	26	27	23	23	28	24	23	26	24	1
21	22	26	19	22	24	20	21	25	24	2
12	11	9	14	11	13	14	18	12	16	3
16	14	17	16	17	14	13	13	12	15	4
29	30	26	32	35	29	33	32	30	33	5

أ - أوجد القيم الترفيقية.

ب - أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقاً لـ (14.18)؟

ج - أكتب جدول تحليل التباين.

د - اختر ما إذا كان متوسط الوقت المنصرم يختلف من عميل لآخر،

اضبط مستوى المخاطرة α عند 0.05. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة

القرار والنتيجة.

هـ - ما هي القيمة P للاختبار في الفقرة (د)؟ اشرح كيف يمكن الوصول إلى القرار نفسه في (د) بمعرفة القيمة P .

و - بناء على متوسطات المعالجات المقدرة، هل يبدو أن هناك اختلافًا كبيرًا في متوسط الوقت المنصرم للوكلاء الخمسة؟ وهل هذا التشتت ناتج بالضرورة بسبب الفروق في كفاءة تنفيذ العملية للوكلاء الخمسة؟ ناقش.

(١٦-١٤) يُراد دراسة أربع معالجات في تصميم تام التعشية، ويتوفر 16 وحدة تجريبية. ويجب تخصيص كل معالجة إلى أربع وحدات تجريبية مختارها عشوائيًا. وهناك أربعة مراقبين يجب تخصيص كل منهم عشوائيًا لوحدة تجريبية واحدة وذلك من أجل كل معالجة. قم بإجراء كل التعشيات المناسبة.

(١٧-١٤) يراد دراسة خمس معالجات في تصميم تام التعشية، ويوجد 30 وحدة تجريبية. ويجب تخصيص كل معالجة إلى ست وحدات تجريبية مختارها عشوائيًا. وسيتم إجراء التجربة فوق فترة ستة أيام بحيث يتم إدخال كل معالجة في كل يوم، ويراد تعشية ترتيب إدخال المعالجات الخمس في كل يوم. قم بإجراء التعشيات اللازمة.

(١٨-١٤) بالرجوع إلى مسألة لون الاستبيان (١١-١٤). اشرح كيف يمكنك تخصيص مواقف الأسواق المركزية عشوائيًا إلى الألوان في هذا الدراسة وحيدة العامل، قم بإجراء كل التعشيات المناسبة.

(١٩-١٤) بالعودة إلى مسألة العروض التقليدية (١٣-١٤). اشرح كيف يمكنك تخصيص التحار عشوائيًا إلى "المالكين" في هذه الدراسة وحيدة العامل. قم بإجراء كل التعشيات اللازمة.

(٢٠١٤) بالعودة إلى المسألة (٧-١٤) كم ستكون القيم τ_1 و τ_2 و τ_3 إذا كان نموذج التحاين مصاغاً بالشكل البديل (14.60) بدلالة تأثيرات العامل، و μ معرفة كما في (14.61) ؟

(٢١-١٤) بالعودة إلى المسألة (٨-١٤). كم ستكون قيم τ_1 إذا كان نموذج التحاين مصاغاً بالشكل البديل (14.60) بدلالة تأثير العامل، و μ معرفة كما في (14.61).

(٢٢-١٤) بالعودة إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٤-١٥). افترض أن 25 في المئة من توزيعات الجوائز يقوم بها الوكيل 1 و 20 في المئة يقوم بها الوكيل 2 و 20 في المئة يقوم بها الوكيل 3 و 20 في المئة يقوم بها الوكيل 4 و 15 في المئة يقوم بها الوكيل 5.

أ - أوجد تقديراً نقطياً لـ μ إذا كان نموذج التحاين مصاغاً بالشكل (14.60) البديل و μ معرفة كما في (14.63) وبحيث تكون الأوزان هي النسب التي يقوم كل وكيل بتوزيعها.

ب - اعرض الفرضيات البديلة لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل بدلالة نموذج تأثيرات العامل (14.60) في هذه الحالة، هل ستتأثر إجابتك لو أن μ كانت معرفة وفقاً لـ (14.61) ؟ اشرح.

(٢٣-١٤) بالعودة إلى مسألة تحسين الانتاجية (١٤-١٠). مستخدماً نموذج الانحدار (14.73) لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل.

أ - اكتب المصفوفات Y و X و β .

ب - أوجد $X\beta$ وطور تعابير مكافئة لعناصر هذا المتجه بدلالة μ .

ج - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. و ما الذي يقدره حد التقاطع ؟

د - أوجد حلول تحليل التباين للانحدار.

هـ - قم باختبار تساوي متوسطات مستويات العامل مستخدماً $\alpha = 0.05$.

اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة.

(٢٤-١٤) بالعودة إلى مسألة لون الاصتيان (١٤-١١). مستخدما نموذج الانحدار (14.73) لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل.

أ - اكتب للمصفوفات Y و X و β .

ب - أوجد $X\beta$ وطور تعابير مكافئة لعناصر هذا المتجه بدلالة β .

ج - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. وما الذي يقدره حد التقاطع ؟

د - أوجد جدول تحليل التباين للانحدار.

هـ - قم باختبار تساوي متوسطات مستويات العامل، مستخدما $\alpha = 0.01$.

اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٥-١٤) بالعودة إلى مسألة العروض النقدية (١٤-١٣).

أ - قم بتوفيق نموذج الانحدار التام (14.73) للبيانات. ما الذي يقدره حد التقاطع ؟

ب - أوجد جدول تحليل التباين للانحدار واختبر ما إذا كانت متوسطات

مستويات العامل متساوية أم لا، مستخدما $\alpha = 0.01$. اعرض

الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٦-١٤) بالعودة إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٤-١٢).

أ - قم بتوفيق نموذج الانحدار التام (14.79) للبيانات. وهل سيكون

نموذج الانحدار التوفيقى الذي يحوي حد تقاطع ملاحما هنا ؟

ب - قم بتوفيق النموذج المعفوض (14.80) للبيانات.

ج - استعمل إحصاءة الاختبار (3.69) لاختبار تساوي متوسطات

مستويات العامل مستخدما مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

تمارين

(٢٧-١٤) (تحتاج لحساب التفاضل) اعرض دالة الإمكانية العظمى لنموذج التحاين

(14.2) عندما تكون $r = 3$ و $n_1 = 2$. وأوجد تقديرات الإمكانية

العظمى. وهل هي نفسها تقديرات المربعات الدنيا (14.14)؟

- (٢٨-١٤) أثبت أن النتيجة في (14.31b) مكافئة جبرياً لـ (14.25).
- (٢٩-١٤) أثبت أنه عند تربيع إحصاء الاختبار F^* في جدول (٢-١)أ، فإنها تكون مكافئة لإحصاء الاختبار F^* (14.53) في حالة $r = 2$.
- (٣٠-١٤) استنبط القيد في (14.64) عندما يُعرّف الثابت μ وفقاً لـ (14.63).
- (٣١-١٤) أ - أوجد مقدار المربعات الدنيا لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار التام (14.79). ما هي $SSE(F)$ هنا ؟
- ب - أوجد مقدار المربعات الدنيا لـ μ في نموذج الانحدار المخفض (14.80). ما هي $SSE(R)$ هنا ؟
- (٣٢-١٤) اعتبر التوضيح في (14.8) - (14.6) والذي يبين أن نموذج التحاين (14.2) هو نموذج خطي. واختبار تساوي متوسطات المعالجات الثلاث يمكن أن نستعمل أسلوب المصفوفات العام والاستفادة من (8.70) لكتابة إحصاء الاختبار أثبت أنه إذا كان:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فإن الصيغة (8.70) تكافئ $SSTR$.

مشاريع

- (٣٣-١٤) بالعودة إلى مجموعة البيانات SENIC. اختر ما إذا كان متوسط خطورة العلوى (التفقر 4) هو نفسه في كل المناطق الجغرافية الأربع (التفقر 9) مستخدماً مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.
- (٣٤-١٤) بالعودة إلى مجموعة البيانات SENIC. يراد دراسة تأثير متوسط عمر المريض (التفقر 3) على متوسط خطورة العلوى (التفقر ٤). ولأغراض هذه الدراسة يتم تصنيف متوسط العمر إلى أربع فئات : أقل من 50.0 ، 50.0-54.9 ، 55.0-59.9 و 60 فأكثر. افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب. اختر ما إذا كان متوسط خطورة العلوى يختلف لفئات العمر

الأربع أم لا. اضبط المعاطرة α عند 0.10. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة.

(١٤-٣٥) بالعودة إلى مجموعة بيانات SMSA براد دراسة تأثير المنطقة الجغرافية (المتغير 12) على معدلات الجريمة (المتغير 11 + المتغير 3) افترض أن نموذج التباين (14.2) مناسب. اختبر ما إذا كانت معدلات الجريمة تختلف في المناطق الجغرافية الأربع أم لا مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة.

(١٤-٣٦) اختبر اختباراً يتضمن الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. ستؤخذ خمس مشاهدات عند كل مستوى عامل، وسيستخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. أ - ولّد خمس مشاهدات عشوائية من التوزيع الطبيعي عندما تكون $\mu_1 = 100$ و $\mu_2 = 12$ و $\sigma = 10$ وذلك لتمثيل مشاهدات المعالجة 1. وكرر هذه العملية بالنسبة لـ $\mu_3 = 100$ و $\mu_2 = 12$ و $\sigma = 10$ وأعدوا احسب إحصاءة الاختبار F^* (14.43).

ب- كرر الفقرة (أ) 100 مرة.

ج- احسب متوسط المنة قيمة للإحصاءة F^* .

د- ما هي نسبة إحصاءة الاختبار F^* التي تقود إلى النتيجة H_0 ? وهل يتسق هذا مع التوقعات النظرية؟

هـ- كرر الفقرات (أ) و (ب) عندما تكون $\mu_1 = 80$, $\mu_2 = 60$, $\mu_3 = 160$ و $\sigma = 12$. احسب متوسط المانة قيمة للإحصاءة F^* . ماهو الفرق بين هذا المتوسط والمتوسط الذي حصلت عليه في الفقرة (ج) عندما:

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 100$ ؟ وهل هذه النتيجة متسقة مع استخدام قاعدة

القرار (14.54)؟

و - ما هي النسبة من قيم إحصاءات الاختبار المانة التي وجدتها في الفقرة (هـ) التي أدت إلى النتيجة H_0 ? وهل يبدو أن الاختبار له قوة مرضية عندما يكون $\mu_1 = 80$, $\mu_2 = 60$ و $\mu_3 = 160$ ؟

تحليل تأثيرات مستويات عامل

اختبار F الذي نوقش في الفصل السابق، لتحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات عامل μ ، مختلفة أم لا، هو اختبار مبدئي لتحديد الحاجة إلى تحليل تفصيلي لتأثيرات مستويات عامل. فإذا قاد اختبار F إلى القرار بأن متوسطات العامل μ متساوية، فإن هذا يدل على أنه لا توجد علاقة بين العامل والمتغير التابع. وعلى الوجه الآخر لو قاد اختبار F إلى القرار بأن متوسطات مستويات العامل تختلف فإن هذا يتضمن وجود علاقة بين العامل والمتغير التابع. وفي هذه الحالة نقوم عادة بتحليل شامل لطبيعة تأثيرات مستويات العامل. ويتم هذا بطريقتين رئيسيتين:

- ١- تحليل مباشر لتأثيرات مستويات العامل التي تهتمنا باستخدام تقنيات التقدير.
- ٢- إجراء اختبارات إحصائية بالنسبة لتأثيرات مستويات العامل التي تهتمنا.

وسنشرح كلا من هاتين الطريقتين على حدة، ولكن سنركز على أسلوب التقدير نظراً لأهميته البالغة وسنستمر في هذا الفصل بافترض نموذج التحاين I. وقد عرضنا لنسخة متوسطات الخلايا من هذا النموذج في (14.2):

$$Y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad (15.1)$$

حيث:

μ_j معالم

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

(١-١٥) الرسوم البيانية لمتوسطات مستويات العامل المقترنة

قبل القيام بتحليل رسمي لطبيعة تأثيرات مستويات العامل، فمن المفيد عادة فحص تأثيرات العامل هذه بشكل غير رسمي، وذلك يرسم لمتوسطات مستويات العامل المقترنة \bar{Y}_i . وسنعرض إلى نوعين من الرسوم:

- (١) رسم خط، وهو مناسب سواء أكانت أحجام العينات n_i متساوية أم لا
 - و(٢) رسم احتمال طبيعي وهو مناسب عندما تكون أحجام العينات n_i متساوية.
- رسم خط

يوضح رسم الخط لمتوسطات مستويات العامل ببساطة مواقع \bar{Y}_i على تدرج خطي وهذه وسيلة بسيطة جدا ولكنها فعالة لتبين ما إذا كان واحد أو أكثر من متوسطات مستويات العامل مختلفا جذريا عن البقية.

مثال. بالرجوع إلى مثال شركة ككتون للأغذية في الفصل الرابع عشر، نعيد في الجدول (١-١٥) عرض النتائج الأساسية للدراسة بشكل مختصر. وفي الشكل (١-١٥) نقدم رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقترنة \bar{Y}_i . ويتضح من الشكل (١-١٥) أن التصميم 4 أعطى إلى حد بعيد أعلى متوسط مبيعات في هذه الدراسة، وأن التصميمين 1 و 2 أعطيا متوسطي مبيعات متقاربين، والهدف من طرق الاستقراء الرسمية والتي سنعرض لها قريبا هو تزويدنا بمعلومات عما إذا كان النمط الذي لاحظناه هنا هو ببساطة نتيجة تغير عشوائي، أو أنه يعكس فروقا حقيقية بين متوسطات مستويات العامل μ_i .

رسم احتمال طبيعي

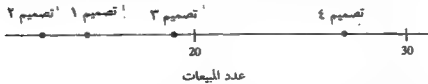
يعتبر رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقترنة أن \bar{Y}_i تخضع لتباين عشوائي ويسمح للمرء بأن يقوم بطريقة غير رسمية ما إذا كانت الفروق في المتوسطات المقترنة تعكس تأثيرات حقيقية. ويتطلب استخدام رسوم الاحتمال الطبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقترنة أن تكون أحجام العينات جميعها متساوية، ومعنى آخر، أن تكون $n_i = n$.

جدول (١٥-١) تلخيص لتأثيرات مثال حركة كتون للأطعمة التي حصلنا عليها في الفصل ١٤.

المجموع	تصميم غلاف (i)				
	4	3	2	1	
10	2	3	3	2	n_i
180	54	57	39	30	Y_i
18	27	19	13	15	\bar{Y}_i
MS	df	SS	مصدر التغير		
86	3	258	بين التصميمات		
7.67	6	46	الخطأ		
	9	304	المجموع		

المميزات	تصميم غلاف
3 ألوان مع صور من الرسوم المتحركة	1
3 ألوان بدون صور من الرسوم المتحركة	2
5 ألوان مع صور من الرسوم المتحركة	3
5 ألوان بدون صور من الرسوم المتحركة	4

شكل (١٥-١) رسم خط لخوتمات مستويات العامل المقترنة- مثال حركة كتون للأطعمة.



ولقد تطرقنا إلى الرسوم الاحتمال الطبيعي للرواسب في الفصل الرابع. ورسمنا هناك الرواسب مقابل قيمها المتوقعة تحت الطبيعية، المعطاة في (4.6). ونفرض هنا أن المشاهدات Y_i تتبع التوزيع الطبيعي بتباين ثابت σ^2 . والحالة التي نختبرها هي كون

متوسطات مستويات العامل μ متساوية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فسيكون للمتوسطات المقدرة \bar{y}_i القيمة المتوقعة نفسها والتباين نفسه (وذلك لأن y_i لها تباين ثابت ولأن أحجام العينات متساوية)، ولذلك عندما تكون متوسطات مستويات العامل متساوية، فينبغي أن تسلك المتوسطات المقدرة سلوك مشاهدات عشوائية من التوزيع نفسه وذلك عند رسمها في رسم احتمال طبيعي. وهكذا فإن الحيدان الكبير عن النمط الخطي للرسم يشير إلى أن متوسطات مستويات العامل غير متساوية، وقد تقترح طبيعة الرسم المتوسط إياه الذي يختلف عن البقية.

وعندما تكون كل متوسطات مستويات العامل μ متساوية، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط مستوى العامل المقدر ذي الرتبة i هي على وجه التقريب:

$$\bar{y} + z \left(\frac{i - 375}{r + 25} \right) \sqrt{\frac{MSE}{n}} \quad (15.2)$$

حيث، حد الجذر التربيعي هو الانحراف المعياري المقدر لـ \bar{y}_i ، $i = 1, \dots, r$ ، كما سنوضح بعد قليل. وعوضاً عن رسم متوسطات مستويات العامل المقدرة \bar{y}_i مقابل قيمها المتوقعة، كما فعلنا في الرسوم الرواسب، فسيكون رسم \bar{y}_i مقابل مئينات التوزيع الطبيعي أكثر فعالية. وبما أن القيم المتوقعة دوال خطية في المئينات، فإن النمط الخطي للرسم سيبقى مصوناً، سواء رسمنا مقابل المئينات أو مقابل القيم المتوقعة. وسنرسم، أيضاً، الخط :

$$y = \text{القيمة المتوقعة}$$

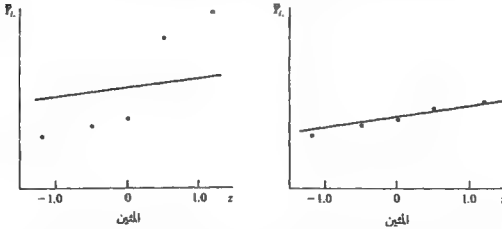
على الرسم البياني نفسه ليخدم كخط مرجعي يساعد في الحكم على ما إذا كان أي من المتوسطات المقدرة \bar{y}_i بعيداً عن قيمته المتوقعة.

يوضح الشكل (٢-١٥)أ) نموذجاً لنمط يدل على أن جميع متوسطات المعالجات متساوية. فكل النقاط قريبة من الخط المرجعي $y =$ القيمة المتوقعة، ولذلك فإن نمط النقاط خطي بشكل معقول.

ويوضح الشكل (٢-١٥)ب) نموذجاً لنمط تقترح القفزة في نقاطه أن متوسطي مستويي العامل الأكبر يختلفان عن بقية متوسطات مستويات العامل الثلاثة الأخرى. وكون نقاط متوسطات مستويات العامل الثلاثة الصغيرة \bar{y}_i تتبع نمطاً خطياً موازياً تقريباً للخط المرجعي $y =$ القيمة المتوقعة، فإن هذا يقترح أن متوسطات مستويات العامل هذه لا تختلف بعضها عن بعض. والانحرافات الكبيرة لهذه النقاط عن الخط المرجعي هو نتيجة لفرق كبير بين المجموعتين من متوسطات مستويات العامل.

شكل (٢-١٥) ج) ثلاث رسوم احتمال طبيعي لموسطات مسويات عامل مقفلة

(أ) لا توجد اختلافات في متوسطات مستويات العامل (ب) توجد اختلافات في متوسطات مستويات العامل



مثال. في دراسة لكفاءة أنواع مختلفة من موانع الصدأ، اختبرت أربعة أنواع (A, B, C, D) وخصصت 40 وحدة تجريبية بشكل عشوائي إلى الأنواع الأربعة بحيث يحصل لكل نوع 10 وحدات. وبعد تعريض الوحدات التجريبية إلى ظروف طقس قاسية حصلنا على النتائج الموضحة على شكل رموز في الجدول (٢-١٥)أ. وكلما زادت القيمة الرمزية كلما كان مانع الصدأ أكثر فعالية. ولاحظ في الجدول (٢-١٥)أ أن

المعالجات معطلة في أعمدة وذلك لاعتبارات تتعلق بمخطط العرض.

ويوضح الجدول (٢-١٥) ب تحليل التباين. وباستخدام مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ اختبار ما إذا كان هناك اختلاف في فعالية موانع الصدأ الأربعة أم لا، فإننا نحتاج إلى القيمة $F(95; 3,36) = 2.87$ ، وباستخدام قيمة متوسط المربعات من الجدول (٢-١٥) ب تكون قيمة إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{5,317.82}{6.140} = 866.1$$

وبما أن $2.87 < F^* = 866.1$ فنستنتج أن موانع الصدأ الأربعة تختلف في فعاليتها والقيمة P - للاختبار هي 0^+ .

جدول (٢-١٥) البيانات ونتائج تحليل التباين لمعالجات موانع الصدأ (البيانات مرمزة)

(أ) البيانات				
صنف مانع الصدأ				
D $i = 4$	C $i = 3$	B $i = 2$	A $i = 1$	j
36.2	68.4	89.8	43.9	1
45.2	69.3	87.1	39.0	2
40.7	68.5	92.7	46.7	3
40.5	66.4	90.6	43.8	4
39.3	70.0	87.7	44.2	5
40.3	68.1	92.4	47.7	6
43.2	70.6	86.1	43.6	7
38.7	65.2	88.1	38.9	8
40.9	63.8	90.8	43.6	9
39.7	69.2	89.1	40.0	10
40.47	67.95	89.44	43.14	$\bar{y}_{..}$

(ب) تحليل التباين			
تحليل التباين	SS	df	MS
ما بين الأصناف	15,953.47	3	5,317.82
الخطأ	221.03	36	6.140
المجموع	16,174.50	39	

ويجوز الشكل (٣-١٥) أ) رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقترنة \bar{Y}_i . ويقترح هذا الرسم أن الصنفين B و C قد أعطيا نتائج أفضل بكثير، في المتوسط، من الصنفين الآخرين.

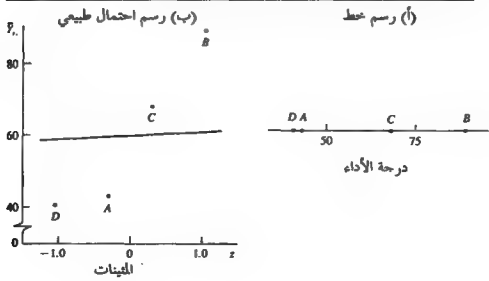
وقبل أن نحضر لرسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقترنة، فإننا نسردها بترتيب تصاعدي في العمود الأول من الجدول (٣-١٥)، وبين العمود الثاني المتينات الطبيعية المعيارية، بينما يبين العمود الثالث القيم المتوقعة للمتوسطات المقترنة المرتبة تحت فرضية أن متوسطات مستويات العامل متساوية. ونبين الحسابات بالنسبة لأصغر متوسط مستوى عامل، ودليل ترتيبه $i = 1$ ، فالمتين الطبيعي المعيارى المطلوب هو:

$$z\left(\frac{i-375}{r+25}\right) = z\left(\frac{1-375}{4+25}\right) = z(.147) = -1.049$$

ونعرف من الجدول (٣-١٥) أن $\bar{Y} = 60.25$ و $MSE = 6.140$ ، وباستخدام (15.2) نحصل على القيمة المتوقعة التقريبية:

$$60.25 + (-1.049)\sqrt{\frac{6.140}{10}} = 59.4$$

شكل (٣-١٥) الرسوم لمتوسطات مستويات العامل المقترنة - مثال مانع الصدا



ويوضح العمود الثالث في الجدول (٣-١٥) القيم المتوقعة لمتوسطات مستويات العامل المقترنة الأخرى التي حُسبت بالطريقة نفسها.

ويجوز الشكل (٣-١٥) ب رسم الاحتمال الطبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقترنة في مثال مانع الصدأ. وهو يقترح بقوة، مثلما اقترح رسم الخط في شكل (٣-١٥) أ، أن موانع الصدأ الأربعة تختلف في فعاليتها، ذلك لأن النقاط تحيد بشكل كبير عن الخط المرجعي. وبالإضافة إلى ذلك يقترح رسم الاحتمال الطبيعي أن مانعي الصدأ B و C قد أدبا إلى نتائج أفضل من مانعي الصدأ A و D.

جدول (٣-١٥) متوسطات مستويات العامل المقترنة \bar{Y}_i والقيم المتوقعة تحت فرضية تساوي الـ μ -

مثال مانع الصدأ

الترتيب	(1)	(2)	(3)
التصاعدي	المتوسطات المتبة	$z \left(\frac{i - 375}{4 + 25} \right)$	القيمة المتوقعة تحت فرضية التساوي
i	\bar{Y}_i		
1	40.5	-1.049	59.4
2	43.1	-.299	60.0
3	68.0	.299	60.5
4	89.4	1.049	61.1

$$\bar{Y} = 60.25$$

$$\sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{6.140}{10}} = .784$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن رسم الاحتمال الطبيعي يقترح أن متوسط الأداء لكل من الصنفين A و D قد يكونا متساويين، ذلك لأن هاتين النقطتين تشكلا عطا موازبا تقريبا للخط المرجعي، ومن جهة أخرى يبدو متوسط الأداء لمانع الصدأ B أكبر من متوسط الأداء لمانع الصدأ C، وذلك لأن هاتين النقطتين تشكلا عطا ميله أكبر بكثير من ميل الخط المرجعي.

ونحتاج الآن إلى طرق استقراء رسمية لتأكيد الاقتراحات التي حصلنا عليها من الرسوم البيانية.

(١٥-٧) تقدير تأثيرات مستويات عامل

تتضمن تقديرات تأثيرات مستويات عامل عادة:

- ١- تقدير متوسط مستوى عامل μ_i .
 - ٢- تقدير الفرق بين متوسطي مستويي عامل.
 - ٣- تقدير متضادة بين متوسطات مستويات عامل.
 - ٤- تقدير تركيب خطي في متوسطات مستويات عامل.
- وستناقش كلا من هذه الأنواع الأربعة من التقدير على التوالي.

تقدير متوسط مستوى عامل

لقد حصلنا على مقدّر نقطي غير منحاز لمتوسط مستوى عامل μ_i في (14.14):

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i \quad (15.3)$$

ولهذا المقدّر متوسط وتباين هما:

$$E(\bar{Y}_i) = \mu_i \quad (15.4a)$$

$$\sigma^2(\bar{Y}_i) = \frac{\sigma^2}{n_i} \quad (15.4b)$$

وحصلنا على النتيجة الأخيرة لأن (14.41) تدل على أن $\bar{Y}_i = \mu_i + \bar{\epsilon}_i$ ، أي مجموع عدد ثابت ومتوسط n_i من الحدود المستقلة ϵ_{ij} ، تباين كل منها σ^2 . وإضافة إلى ذلك، فإن \bar{Y}_i تتبع التوزيع الطبيعي لأن حدود الخطأ ϵ_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة طبيعية.

ونرمز لتقدير تباين \bar{Y}_i بـ $s^2(\bar{Y}_i)$ ونحصل عليه كالمعاد بإحلال التقدير

النقطي غير المنحاز MSE محل σ^2 في (15.4b):

$$s^2(\bar{Y}_i) = \frac{MSE}{n_i} \quad (15.5)$$

والانحراف المعياري المقدّر $s(\bar{Y}_i)$ هو الجذر التربيعي الموجب لـ (15.5).

ويمكن إثبات أن:

$$(15.6) \quad \frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{s\{\bar{Y}_i\}} \text{ تتبع توزيع } t(n_T - r) \text{ لنموذج التحاين (15.1).}$$

حيث درجات الحرية هي تلك المصاحبة لـ MSE . وتتبع النتيجة (15.6) من تعريف t في (1.41) وذلك لأن: $(1) \bar{Y}_i$ تتبع التوزيع الطبيعي $(2) MSE / \sigma^2$ تتوزع مستقلة عن \bar{Y}_i وفق التوزيع $\chi^2(n_T - r) / (n_T - r)$ وذلك وفقا للنظرية التالية:

في نموذج التحاين (15.1)، يتبع σ^2 التوزيع SSE / χ^2 بـ $n_T - r$

درجة حرية وهو مستقل عن $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_r$

ومن (15.6) مباشرة نستنتج أن حدي الثقة لـ μ_i بمعامل ثقة $(1 - \alpha)$ هما:

$$(15.8) \quad \bar{Y}_i \pm t(1 - \alpha/2; n_T - r) s\{\bar{Y}_i\}$$

مثال. يرغب مدير المبيعات، في مثال شركة كتون للأغذية، بتقدير متوسط المبيعات لتصميم الغلاف 1 بـ 95% معامل ثقة.

وباستخدام النتائج من جدول (١-١٥) نجد:

$$\bar{Y}_1 = 15 \quad n_1 = 2 \quad MSE = 7.67$$

ونحتاج لقيمة $t(975; 6)$ ومن الجدول A-2 في الملحق نجد أن $2.447 = t(975; 6)$ ونحتاج أعورا لقيمة $s\{\bar{Y}_1\}$. فنجد:

$$s^2\{\bar{Y}_1\} = \frac{MSE}{n_1} = \frac{7.67}{2} = 3.835$$

و تكون قيمة $s\{\bar{Y}_1\} = 1.958$. وبالتالي نحصل على حدي الثقة $15 \pm 2.447(1.958)$ وعلى فترة الثقة:

$$10.2 \leq \mu_1 \leq 19.8$$

وهكذا، فإننا نقدر بمعامل ثقة 0.95، بأن متوسط مبيعات الحبل الواحد لتصميم الغلاف 1 يقع بين 10.2 و 19.8 علبة.

تقدير الفرق بين متوسطي مستويي عامل

غالبًا ما تقارن معالجتين أو مستويي عامل عن طريق تقدير الفرق D بين متوسطي

مستويي العامل ولنقل μ_1 و μ_2 :

$$(15.9) \quad D = \mu_2 - \mu_1$$

وسندع هذا الفرق بين متوسطي مستويي عامل مقارنة ثنائية. والمقدر النقطي لـ (15.9)، ونرمز له بـ \hat{D} ، هو:

$$\hat{D} = \bar{Y}_i - \bar{Y}_r \quad (15.10)$$

وهذا المقدر النقطي غير منحاز.

$$E\{\hat{D}\} = \mu_i - \mu_r \quad (15.11)$$

وبما أن \bar{Y}_i' و \bar{Y}_i مستقلان، فإن تبين \hat{D} يتبع من (1.28b):

$$\sigma^2\{\hat{D}\} = \sigma^2\{\bar{Y}_i\} + \sigma^2\{\bar{Y}_r\} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_r}\right) \quad (15.12)$$

والتباين المقدر لـ \hat{D} ، ونرمز له بـ $s^2\{\hat{D}\}$ ، هو:

$$s^2\{\hat{D}\} = MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_r}\right) \quad (15.13)$$

وأخيرا فإن \hat{D} تتبع التوزيع الطبيعي وذلك من (1.37) لأن \hat{D} تركيب خطي في متغيرات طبيعية مستقلة.

وينتج من هذه الخصائص ومن نظرية (15.7) ومن تعريف t في (1.41) أن:

$$\frac{\hat{D} - D}{s\{\hat{D}\}} \text{ تتبع توزيع } t(n_T - r) \text{ لنموذج التحاين (15.1)} \quad (15.14)$$

وبالتالي، فإن $(1 - \alpha)$ حدي ثقة لـ D هما:

$$\hat{D} \pm t(1 - \alpha/2; n_T - r) s\{\hat{D}\} \quad (15.15)$$

مثال. في مثال شركة كيتون للأغذية، استخدمت في تصميم الغلاف 1 و 2 الطباعة بثلاثة ألوان، بينما استخدمت في تصميمي الغلاف 3 و 4 الطباعة بخمسة ألوان كما هو موضح في جدول (١٥-١). ونرغب في تقدير الفرق في متوسط المبيعات للتصاميم التي استخدمت خمسة ألوان، أي التصميم 3 و 4 وذلك باستخدام 95% قوة ثقة. أي أننا نرغب في تقدير الفرق $\mu_3 - \mu_4 = D$. ونجد من جدول (١٥-١) ما يلي:

$$\begin{array}{lll} \bar{Y}_3 = 19 & n_3 = 3 & MSE = 7.67 \\ \bar{Y}_4 = 27 & n_4 = 2 & \end{array}$$

ولذلك:

$$\hat{D} = \bar{Y}_3 - \bar{Y}_4 = 19 - 27 = -8$$

ويكون تباين \hat{D} المقدر هو :

$$s^2(\hat{D}) = MSE \left(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \right) = 7.67 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 6.392$$

وبذلك يكون تقدير الانحراف المعياري لـ \hat{D} هو $s(\hat{D}) = 2.528$ و نحتاج إلى قيمة $t(975; 6) = 2.447$. وبالتالي يكون حد الثقة هما $8 \pm 2.447 (2.528)$ - والـ 95% فترة الثقة المطلوبة هي:

$$-14.2 \leq \mu_3 - \mu_4 \leq -1.8$$

وهكذا فإننا نقدر بـ 0.95 معامل ثقة أن متوسط المبيعات للتصميم 3 أقل منه في التصميم 4 بما يتراوح بين 1.8 و 14.2 غلبة للمحل الواحد.
تقدير متضادة

المتضادة هي مقارنة تطوي على إثني أو أكثر من متوسطات مستويات عامل وهي بذلك تتضمن الحالة السابقة أي الفرق مثنى مثنى بين متوسطي مستوي عامل في (15.9). وسنرمز للمتضادة بـ L وتُعرف كتركيب خطي في متوسطات مستويات عامل μ_i بحيث يكون مجموع المعاملات C_i مساوياً للصفر.

$$L = \sum_{i=1}^r c_i \mu_i \quad \text{حيث} \quad \sum_{i=1}^r c_i = 0 \quad (15.16)$$

توضيحات لمتضادات. سوف نوضح بعض المتضادات بالرجوع إلى مثال شركة كتنون للأغذية. تذكر أن التصميمين 1 و 2 استخدما الطابعة بثلاثة ألوان، بينما استخدم التصميمان 3 و 4 الطابعة بخمسة ألوان. وبالإضافة إلى ذلك، وكما نرى من الجدول (١٥-١)، فإن التصميمين 1 و 3 استخدما صور الرسوم المتحركة، بينما لم يستخدم التصميمان 2 و 4 صور الرسوم المتحركة.

١- المقارنة بين متوسطي المبيعات للتصميمين اللذين استخدما ثلاثة ألوان هي:

$$L = \mu_1 - \mu_2$$

وهنا تكون $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 0, C_4 = 0$ و $\sum C_i = 0$.

٢- المقارنة بين متوسط مبيعات التصميم التي تستخدم ثلاثة ألوان و التصميم التي

تستخدم خمسة ألوان هي:

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$\text{حيث : } C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = -\frac{1}{2}, C_4 = -\frac{1}{2}, \text{ و } \Sigma C_i = 0.$$

٣- المقارنة بين متوسط مبيعات التصميم التي تستخدم صور الرسوم المتحركة والتصاميم التي لا تستخدمه هي:

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_4}{2}$$

$$\text{حيث : } C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = -\frac{1}{2}, \text{ و } \Sigma C_i = 0.$$

لاحظ أن المتضادة الأولى هي ببساطة مقارنة ثنائية. ونفازن في المتضادة الثانية والثالثة معدلات عدة متوسطات مستويات عامل. والمعدلات التي استُعملت هنا هي معدلات غير مرجحة للمتوسطات μ_i ، ومثل هذه المعدلات هي في العادة مشار الإهتمام. ومن الممكن أن يهتم المرء في حالات خاصة بمعدلات مرجحة لـ μ_i وذلك لوصف متوسط الاستجابة لمجموعة من عدة مستويات عامل. فعلى سبيل المثال، لو أن كلا من تصاميم الثلاثة ألوان والخمسة ألوان كانت ستُدرس بحيث تستخدم تصاميم الثلاثة ألوان أكثر بثلاثة أضعاف من تصاميم الخمسة ألوان، فإن مقارنة تأثير وجود صور الرسوم المتحركة مع عدم وجودها يمكن أن تُبنى على المقارنة:

$$L = \frac{3\mu_1 + \mu_3}{4} - \frac{3\mu_2 + \mu_4}{4}$$

$$\text{حيث : } C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = -\frac{3}{4}, C_3 = \frac{1}{4}, C_4 = -\frac{1}{4}, \text{ و } \Sigma C_i = 0.$$

فكرة الثقة المتضادة. المقدر غير المتحيز للمتضادة L هو:

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^4 c_i \bar{Y}_i \quad (15.17)$$

وبما أن \bar{Y}_i ، مستقلة، فإن تباین \hat{L} وفقاً لـ (1.28) هو :

$$\sigma^2\{\hat{L}\} = \sum_{i=1}^4 c_i^2 \sigma^2\{\bar{Y}_i\} = \sum_{i=1}^4 c_i^2 \left(\frac{\sigma^2}{n_i} \right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^4 \frac{c_i^2}{n_i} \quad (15.18)$$

و المقدر غير المتحيز لهذا التباين هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = MSE \sum_{i=1}^r \frac{c_i^2}{n_i} \quad (15.19)$$

ووفقا لـ (1.37) يتوزع \hat{L} طبيعيا باعتباره تركيبا خطيا في متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة. ويمكن، بواسطة النظرية (15.7) وخصائص \hat{L} التي ذكرناها سابقا وتعريف t ، إثبات أن:

$$\frac{\hat{L} - L}{s\{\hat{L}\}} \text{ تتبع توزيع } t(n_T - r) \text{ لنموذج التحاين (15.1)} \quad (15.20)$$

ووفقا لذلك، فإن $(1 - \alpha)$ حدي ثقة لـ L هما:

$$\hat{L} \pm t(1 - \alpha/2; n_T - r)s\{\hat{L}\} \quad (15.21)$$

مثال. في مثال شركة كتون للأغذية، نرغب في مقارنة متوسط المبيعات لتصاميم الخمسة ألوان بمتوسط المبيعات لتصاميم الثلاثة ألوان. ولنقدر هذا التأثير بـ 95% فترة ثقة. فما نرغبه هو تقدير:

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

والتقدير النقطي هو (انظر البيانات في جدول ١٥-١):

$$\hat{L} = \frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}{2} - \frac{\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4}{2} = \frac{15+13}{2} - \frac{19+27}{2} = -9$$

وبما أن $C_1 = \frac{1}{2}$ و $C_2 = \frac{1}{2}$ و $C_3 = -\frac{1}{2}$ و $C_4 = -\frac{1}{2}$ فنحصل على:

$$\sum \frac{c_i^2}{n_i} = \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^2}{3} + \frac{(-1/2)^2}{3} + \frac{(-1/2)^2}{2} = \frac{5}{12} = 4167$$

ويكون:

$$s^2\{\hat{L}\} = MSE \sum \frac{c_i^2}{n_i} = 7.67(4167) = 3196$$

بحيث أن : $s\{\hat{L}\} = 1.79$

ومن أجل 95 بالمائة معامل ثقة، نحتاج لقيمة $t(975; 6) = 2.447$ ، وهكذا، فإن

حدي الثقة لـ L هما : $(-9 \pm 2.447(1.79))$ ، وتكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$-13.4 \leq L \leq -4.6$$

وبالتالي نستنتج بـ 95 معامل ثقة أن متوسط المبيعات لتصاميم الثلاثة ألوان أقل

من متوسطات المبيعات لتصاميم الخمسة ألوان بما يتراوح بين 4.6 و 13.4 غلبة للمحل الواحد.

ملاحظة

تمكنا النظرية (15.20) من اختبار أي فرضية تتعلق بمتضادة L بواسطة الاختبار t . وتدعى اختبارات كهذه اختبارات درجة واحدة من الحرية، وسنناقشها في الفقرة (١٥-٦).

تقدير تركيب خطي

نهتم، من حين لآخر، بتركيب خطي في متوسطات مستويات عامل لا يشكل متضادة. فمثلاً، افترض أن شركة ككتون للأغذية تستخدم كل تصاميم الغلاف الأربعة بحيث تستخدم كل تصميم في واحد من أربع مناطق تسويق رئيسة للشركة، وأن نسبة مبيعات الشركة في كل من هذه المناطق هو 35، 28، 12، و 25 في المئة على الترتيب. وفي هذه الحالة قد نهتم بمتوسط المبيعات الإجمالي للمحل الواحد في المناطق جميعاً:

$$L = .35\mu_1 + .28\mu_2 + .12\mu_3 + .25\mu_4$$

لاحظ أن هذا التركيب الخطي من الشكل $L = \sum C_i \mu_i$ ولكن بمجموع المعاملات C_i يساوي 1 وليس الصفر كما يجب أن يكون في حالة متضادة.

ونعرف التركيب الخطي في متوسطات مستويات عامل μ_i كما يلي:

$$L = \sum_{i=1}^I c_i \mu_i \quad (15.22)$$

دون أية قيود على المعاملات C_i .

ونحصل على حدي ثقة لـ L بالطريقة نفسها تماماً التي حصلنا عليها في حالة متضادة، وذلك من العلاقة (15.21)، مستخدمين المقدّر النقطي (15.17) والتباين المقدّر (15.19).

الحاجة إلى طرق المقارنات المتعددة

هناك نقطتان قصور مهمتان لطرق تقدير تأثيرات مستويات عامل والتي نوقشت

حتى هذه النقطة هما:

١- معامل الثقة $\alpha - 1$ ينطبق، فقط، على تقدير معين بذاته وليس على سلسلة من التقديرات.

٢- معامل الثقة $\alpha - 1$ مناسب، فقط، إذا لم يكن التقدير قد اقترح بواسطة البيانات. ونقطة القصور الأولى مألوفة في تحليل الانحدار. وهي على وجه الخصوص، مهمة في نماذج تحليل التباين لأن العديد من المقارنات المختلفة تكون في الغالب ذات أهمية هنا ونحتاج إلى ربط النتائج بعضها ببعض. اعتبر مثلاً الحالة البسيطة جداً حيث نقارن كفاءة ثلاث أنواع مختلفة من الإعلان في ترويج المبيعات. وحصلنا على التقديرات التالية لفعالياتها للمقارنة، وكل من هذه المقارنات بـ 95% معامل ثقة:

$$59 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 62$$

$$-2 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq 3$$

$$58 \leq \mu_2 - \mu_3 \leq 64$$

وقد يكون من الطبيعي هنا أن نربط المقارنات المختلفة معاً ونستنتج أن الدعاية 2 تقود إلى أعلى متوسط مبيعات، بينما الدعايتان 1 و 3 أقل كفاءة بشكل كبير ولا تختلفان كثيراً فيما بينهما. ويرغب المرء بالتالي في الحصول على معامل ثقة عائلي لهذه العائلة من العبارات بمنحه درجة معلومة من الاطمئنان إلى أن جميع العبارات في هذه العائلة صحيحة.

أما نقطة القصور الثانية عند تقدير تأثيرات مستويات عامل، ونعني أن التقدير يجب ألا يقترح بواسطة البيانات، فهي نقطة مهمة في الدراسات الاستطلاعية حيث يمكن أن يطرح العديد من التساؤلات عند تحليل البيانات. وتسمى عملية دراسة تأثيرات اقترحها المبيانات "بالتلطف على البيانات". إذ ينحرو المثللون، في الغالب، إلى تقصي مقارنات يبدو من بيانات العينة أن تأثيرها كبير. والآن قد تبدو التأثيرات كبيرة لأنها في الحقيقة كذلك، أو لأن واقعة عشوائية جعلتها تبدو كبيرة مع أنها ليست كذلك. وبالتالي فإن الاقتصاد على تقصي المقارنات التي يبدو تأثيرها كبيراً يتضمن أن معامل الثقة سيكون أصغر مما هو محدد له لو اتفق أن كان التأثير في الحقيقة صغيراً أو غير

موجود البتة. وفي الحقيقة، يمكن إثبات أنه إذا كان يراد مقارنة متوسطات ست مستويات عامل وأن المحلل سيقارن دائما متوسطات أكبر وأصغر تقدير للمتوسطات العامل مستخدما حدي الثقة (15.15) بـ 95% معامل ثقة، فسيقترح التقدير بفترة وجود تأثير حقيقي في 40 في المئة من المرات، وذلك عندما لا يوجد، في الحقيقة، فرق بين أي من متوسطات مستويات العامل (المراجع 15.1). ومع عدد أكبر من مستويات العامل، فإن احتمالية الاقتراح المضلل بوجود تأثير حقيقي ستكون أكبر.

وأحد الحلول لمشكلة القيام بمقارنات يقترحها التحليل المبدئي للبيانات هو استخدام طريقة المقارنات المتعددة بحيث تتضمن عائلة العبارات جميع العبارات التي يتوقع المحرر أن يقوم بها بعد فحص البيانات، فعلى سبيل المثال، في دراسة تتم فيها دراسة خمسة مستويات لعامل، نقرر مسبقا أن الاهتمام سينصب على ثلاث مقارنات ثنائية. ولكن أتفق، ايضا، أنه ينبغي، بالإضافة إلى ذلك، دراسة أية مقارنات ثنائية ستبدو مهمة فيما بعد. وفي هذه الحالة يمكن للمرء أن يستخدم كل المقارنات الثنائية كأساس للحصول على معامل ثقة عائلي مناسب للمقارنات التي اقترحت من البيانات.

وستناقش في الفقرات الثلاث القادمة ثلاث طرق للمقارنات المتعددة لنماذج تحليل التباين وهي تسمح بالتحكم في معامل الثقة العائلي. وطريقتان من بين هذه الطرق تسمحان بالتدخل على البيانات دون أن يتأثر بذلك معامل الثقة ولقد تعرضنا إلى طريقتين من هذه الطرق الثلاث من قبل هما طريقتا شيف وبونفرونوني. أما طريقة توكي فهي طريقة جديدة وستقوم بمناقشتها أولاً.

(١٥-٣) طريقة توكي للمقارنات المتعددة

يمكن تطبيق طريقة توكي للمقارنات المتعددة التي سندرسها هنا عندما تكون العائلة التي نهتما هي مجموعة كل المقارنات مثنى مثنى لمتوسطات مستويات عامل، ومعنى آخر، تحوي العائلة على تقديرات لجميع الأزواج $D = \mu_i - \mu_j$. وعندما تكون أحجام العينات جميعها متساوية، فإن معامل الثقة العائلي لطريقة توكي هو بالضبط $1 - \alpha$. وعندما تكون أحجام العينات غير متساوية، فإن معامل الثقة العائلي سيكون أكبر من

$\alpha - 1$ ، ومعنى آخر، فإن طريقة توكي تكون عندئذ محافظة.

توزيع المدى المعبر تقديرا

تستخدم طريقة توكي توزيع المدى المعبر تقديرا. فلنفرض أن لدينا r من المشاهدات المستقلة Y_1, \dots, Y_r من توزيع طبيعي متوسط μ وتباين σ^2 . وليكن w مدى هذه المجموعة من المشاهدات، فيكون:

$$w = \max(Y_i) - \min(Y_i) \quad (15.23)$$

وبالإضافة إلى ذلك، لنفرض أن لدينا تقديرا للتباين σ^2 ، وهو s^2 ، قائما على v درجة حرية ومستقلا عن Y_i . فعندئذ تدعى النسبة w/s المدى المعبر تقديرا. ونرمز له بـ:

$$q(r, v) = \frac{w}{s} \quad (15.24)$$

حيث تذكرنا الرموز داخل الأقواس أن توزيع q يعتمد على r و v . ولقد تم جدولته توزيع q ، ويقدم الجدول 9 - 14 اختارات من قيمات هذا التوزيع.

وهذا الجدول سهل الاستخدام. افترض أن $r = 5$ و $v = 10$. فيكون المئين 95 هو $q(5, 10) = 4.65$ وهو يعني أن:

$$P\left\{\frac{w}{s} = q(5, 10) \leq 4.65\right\} = 0.95$$

وهكذا، لو كان لدينا خمس مشاهدات Y من التوزيع الطبيعي، فباحتمال 0.95. لن يكون مداها أكبر من 4.65 ضعفا لانحراف عينة معياري مستقل مبني على 10 درجات حرية.

قوات ثقة المقارنات متعددة

إن حدي ثقة مقارنات توكي المتعددة لكل المقارنات الثنائية $\mu_i - \mu_j$ ،

معامل ثقة عائلي $\alpha - 1$ على الأقل هما كما يلي:

$$\hat{D} \pm Ts\{\hat{D}\} \quad (15.25)$$

حيث:

$$\hat{D} = \bar{Y}_i - \bar{Y}_j \quad (15.25a)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = s^2\{\bar{Y}_i\} + s^2\{\bar{Y}_j\} = MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right) \quad (15.25b)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(1 - \alpha; r, n_r - r) \quad (15.25c)$$

لاحظ أن المقدّر التقطي \hat{D} في (15.25a) والتباين المقدّر في (15.25b) هما نفساهما المذكوران في (15.10) و (15.13) لمقارنة ثنائية بمفردها. ولذلك فإن الفرق الوحيد بين حدي الثقة ، في (15.25) للمقارنات المتزامنة وما يقابلها في (15.15) لمقارنة واحدة هو مضاعف الانحراف المعياري المقدّر.

ويشير معامل الثقة العائلي $1 - \alpha$ المتعلق بالمقارنات الثنائية المتعددة إلى النسبة عائلات المقارنات الثنائية الصحيحة عندما نكرر اختيار مجموعات من العينات ونحسب جميع فترات الثقة الثنائية في كل مرة. وتُعتبر عائلة من المقارنات الثنائية صحيحة إذا كانت كل مقارنة ثنائية في العائلة صحيحة. وهكذا عندما يكون معامل الثقة العائلي $1 - \alpha$ ، فإن جميع المقارنات الثنائية في العائلة ستكون صحيحة في $100\%(1 - \alpha)$ من العائلات.

مثال ١ حجم عينات متساوية

كان مطلوباً من مثال مانع الصدأ، في جدول (١٥-٢)، أن تقدر جميع المقارنات الثنائية بطريقة توكي، مستخدمين 95% معامل ثقة عائلي. وبما أن $r = 4$ و $n_r - r = 36$ ، فإن المئين المطلوب لتوزيع المدى المعير تقديراً هو: $q(.95; 4, 36)$ ، ونجد من الجدول أ-٩ أن $q(.95; 4, 36) = 3.814$ ونحصل بذلك من (15.25c) على الآتي:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} (3.814) = 2.70$$

وبالإضافة إلى ذلك سنحتاج لـ $s\{\hat{D}\}$ ، وبما أننا استعملنا أحجام عينات

متساوية فنجد، من أجل أي مقارنة ثنائية، مستخدمين (15.25b) مايلي:

$$s^2\{\hat{D}\} = MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right) = 6.140\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = 1.23$$

ومنه نجد $s\{\hat{D}\} = 1.11$. وبالتالي نحصل لكل مقارنة ثنائية على:

$$Ts\{\hat{D}\} = 2.70(1.11) = 3.0$$

وتكون فترات الثقة الثنائية بـ 95% معامل ثقة عائلي كالتالي:

$$43.3 = (89.44 - 43.14) - 3.0 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (89.44 - 43.14) + 3.0 = 49.3$$

$$21.8 = (67.95 - 43.14) - 3.0 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq (67.95 - 43.14) + 3.0 = 27.8$$

$$-3 = (43.14 - 40.47) - 3.0 \leq \mu_1 - \mu_4 \leq (43.14 - 40.47) + 3.0 = 5.7$$

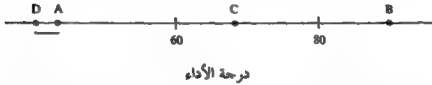
$$18.5 = (89.44 - 67.95) - 3.0 \leq \mu_2 - \mu_3 \leq (89.44 - 67.95) + 3.0 = 24.5$$

$$46.0 = (89.44 - 40.47) - 3.0 \leq \mu_2 - \mu_4 \leq (89.44 - 40.47) + 3.0 = 52.0$$

$$24.5 = (67.95 - 40.47) - 3.0 \leq \mu_3 - \mu_4 \leq (67.95 - 40.47) + 3.0 = 30.5$$

وتدل هذه المقارنات الثنائية أن جميع المقارنات الثنائية باستثناء المقارنة (D, A)

مهمة إحصائياً. (فترة الثقة لمتغيري الصفر). ونستوعب هذه المعلومة في رسم الخط المتوسطات مستويات مستويات العامل المقترنة وذلك يوضع خط تحت المقارنات غير المهمة.



والخط بين A و D يشير إلى أنه لا يوجد دليل واضح على ما إذا كان A أم D هو مانع الصدا الأفضل. بينما يدل عدم وجود خط على وجود فرق في الأداء. وهكذا نرى أن طريقة المقارنات المتعددة تسمح لنا، بـ 95% معامل ثقة عائلي، استقراء سلسلة من الاستنتاجات، وهي أن B أفضل مانع للصدا (أفضل مما يتراوح بين 18.5 و 24.5 وحدة من مانع الصدا الذي يليه في الأفضلية)، وأن C هو الثاني في الأفضلية وأن A و D هما أسوأ. مراحل من البقية مع فرق بسيط أو عدم وجود فرق بينهما. وهكذا فإن التأثيرات التي اقترحها رسم الاحتمال الطبيعي في الشكل (١٥-٣) قد أكدها هذا التحليل.

مثال ٢: حجم عينات غير متساوية

كان مدير التسويق في مثال شركة كتون للأغذية، في الجدول (١٥-١) مهتما بتقدير الأداء المقارن لتصاميم الغلاف الأربعة. ولقد وضع المحلل جميع المقارنات الثنائية بطريقة توحي مع 90% معامل ثقة عائلي على الأقل. وبما أن أحجام العينات غير متساوية هنا، فيجب إعادة حساب الانحراف المعياري المقدّر (\hat{D}) لكل مقارنة

ثانية. وعلى سبيل المثال، لمقارنة التصميمين 1 و 2، نجد:

$$\hat{D} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 15 - 13 = 2$$

$$s^2\{\hat{D}\} = MSE \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = 7.67 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 6.39$$

$$s\{\hat{D}\} = 2.53$$

ول 90% معامل ثقة عاظمي، نحتاج إلى حساب $q(0.90; 4, 6) = 4.07$

وبالتالي نجد:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}(4.07) = 2.88$$

وبذلك يكون حدا الثقة هما $2 \pm 2.88(2.53)$ ، وتكون فترة الثقة لـ $\mu_2 - \mu_1$:

$$-5.3 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 9.3$$

ونحصل بالطريقة نفسها على فترات الثقة الخمس الأخرى:

$$-3.3 = (19 - 15) - 2.88(2.53) \leq \mu_3 - \mu_1 \leq (19 - 15) + 2.88(2.53) = 11.3$$

$$4.0 = (27 - 15) - 2.88(2.77) \leq \mu_4 - \mu_1 \leq (27 - 15) + 2.88(2.77) = 20.0$$

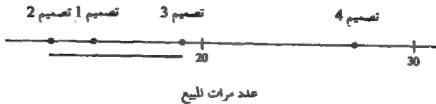
$$-5 = (19 - 13) - 2.88(2.26) \leq \mu_3 - \mu_2 \leq (19 - 13) + 2.88(2.26) = 12.5$$

$$6.7 = (27 - 13) - 2.88(2.53) \leq \mu_4 - \mu_2 \leq (27 - 13) + 2.88(2.53) = 21.3$$

$$.7 = (27 - 19) - 2.88(2.53) \leq \mu_4 - \mu_3 \leq (27 - 19) + 2.88(2.53) = 15.3$$

ونلخص الأداء المقارن من خلال رسم الخط، ومشورين بخط مسطرة لكل فرق

غير معنوي.



و هكذا، نستطيع أن نستنتج يـ 90% معامل ثقة عاظمي، على الأقل، أن التصميم

4 هو التصميم الأفضل. ولكن صغر حجم الدراسة لايسمح لنا بوضع أي ترتيب بين

التصاميم الثلاثة الأخرى، ذلك لأن كلاً من فترات الثقة الثنائية تغطي بإمكانية أن

يكون لأي من التصميمين متوسط مبيعات أعلى للمحل الواحد.

تعليقات

- ١ - تسمى طريقة توكي بطريقة توكي - كرمبر إذا استخدمت في حالة أحجام عينات غير متساوية.
- ٢ - عندما لا تكون جميع المقارنات الثنائية مهمة، فإن معامل الثقة العالي للمقارنات سيكون أكبر من الموصوفة α - 1 المستخدمة عند إعداد فترات توكي. وهكذا، فإن معامل الثقة α - 1 في طريقة توكي يخدم كمستوى أصغر مضمون عندما لا تكون جميع المقارنات الثنائية ذات أهمية.
- ٣ - يمكن استخدام طريقة توكي للتدخل على البيانات طالما أن التأثيرات المراد دراستها بناء على تحليل البيانات المبدئي هي مقارنات ثنائية.
- ٤ - يمكن تعديل طريقة توكي بحيث تتناول متضادات عامة بين متوسطات مستويات عامل. ولكننا لن نناقش هذا التعديل لأن طريقة شيفه (التي سناقشها بعد قليل) تُفضل على طريقة توكي في هذه الحالة.
- ٥ - لاستنباط فترات الثقة المتزامنة لتوكي في حالة تساوي أحجام العينات، أي أن $n_1 = n$ بحيث يكون $m_T = m$ اعتبر الانحرافات:

$$(\bar{Y}_1 - \mu_1), \dots, (\bar{Y}_r - \mu_r) \quad (15.26)$$

وافترض أن نموذج التحاين (15.1) ينطبق هنا. فالانحرافات في (15.26) هي عندئذ متغيرات مستقلة (لأن حدود الخطأ مستقلة)، وتتبع التوزيع الطبيعي (لأن حدود الخطأ مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي)، ولها التوقع نفسه وهو الصفر (لأن μ طرحت من \bar{Y}_i). ولها جميعا التباين نفسه σ^2/n . وبالإضافة إلى ذلك، فإن MSE/n هو مقدر لـ σ^2/n مستقل عن الانحرافات $(\bar{Y}_i - \mu_i)$ حسب النظرية (15.7). وهكذا يتبع من تعريف المدى المعرّ تقديرًا في q (15.24) أن:

$$\frac{\max(\bar{Y}_i - \mu_i) - \min(\bar{Y}_i - \mu_i)}{\sqrt{\frac{MSE}{n}}} \sim q(r, n_T - r) \quad (15.27)$$

حيث $n_T - r$ هو عدد درجات الحرية المصاحب لـ SSE ، $\max(\bar{Y}_i - \mu_i)$ هو أكبر

انحراف و $\min(\bar{Y}_i - \mu_i)$ هو أصغر انحراف.

وفي ضوء (15.27) نستطيع كتابة العبارة الاحتمالية التالية:

$$P \left\{ \frac{\max(\bar{Y}_i - \mu_i) - \min(\bar{Y}_i - \mu_i)}{\sqrt{\frac{MSE}{n}}} \leq q(1-\alpha; r, n_r - r) \right\} = 1 - \alpha \quad (15.28)$$

لاحظ الآن أن المراجعة التالية صحيحة لكل الأزواج من مستويات العامل i و i' :

$$|(\bar{Y}_i - \mu_i) - (\bar{Y}_{i'} - \mu_{i'})| \leq \max(\bar{Y}_i - \mu_i) - \min(\bar{Y}_i - \mu_i) \quad (15.29)$$

واحتسنا إلى القيمة المطلقة في الجزء الأيسر لأن مستويي العامل i و i' غير مرتبين بحيث أننا ربما نطرح الانحراف الأكبر من الانحراف الأصغر. ومعنى آخر، نحن هنا مهتمون، فقط، بالفرق بين انحرافات مستويي العامل بغض النظر عن اتجاه هذا الانحراف.

وبما أن المراجعة في (15.29) صحيحة لكل أزواج مستويات العامل i و i' ، فإنه يتبع من (15.28) أن الاحتمال:

$$P \left\{ \left| \frac{(\bar{Y}_i - \mu_i) - (\bar{Y}_{i'} - \mu_{i'})}{\sqrt{\frac{MSE}{n}}} \right| \leq q(1-\alpha; r, n_r - r) \right\} = 1 - \alpha \quad (15.30)$$

صحيح لكل الـ $r(r-1)/2$ من المقارنات الثنائية بين مستويات العامل وعدتها r .

وبإعادة ترتيب المراجعة في (15.30) وباستخدام تعاريف $\{ \hat{D} \}^2$ في (15.25b) و T في (15.25c) وملاحظة أنه في حالة تساوي أحجام العينات تصبح $\{ \hat{D} \}^2$ كما يلي:

$$s^2 \{ \hat{D} \} = MSE \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{2MSE}{n}$$

نحصل على حدود الثقة لمقارنات توكي المتعددة (15.25).

(١٥-٤) طريقة شيفه للمقارنات المتعددة

لقد تعرضنا لطريقة شيفه للمقارنات المتعددة في نماذج الانحدار. وهي، أيضاً، ممكنة التطبيق في نماذج تحليل التباين. ويمكن تطبيقها في نماذج تحليل التباين عندما

تكون:

العائلة موضع الاهتمام هي مجموعة التقديرات لجميع المتضادات الممكنة بين متوسطات مستويات العامل:

$$L = \sum c_i \mu_i \quad \text{حيث} \quad \sum c_i = 0 \quad (15.31)$$

ولذلك، فإن عددا لا نهائيا من العبارات ينتمي إلى هذه العائلة. ومعامل الثقة العائلي لطريقة شيفه هو بالضبط $1 - \alpha$ سواء أكانت أحجام العينات متساوية أم غير متساوية. لقد وجدنا من قبل أن تقديرا غير منحاز لـ L هو:

$$\hat{L} = \sum c_i \bar{Y}_i \quad (15.32)$$

والتباين المقتر له هو:

$$s^2(\hat{L}) = MSE \sum \frac{c_i^2}{n_i} \quad (15.33)$$

ويمكن إثبات أن $1 - \alpha$ هو احتمال أن تكون جميع حدود الثقة من الشكل:

$$\hat{L} \pm S s(\hat{L}) \quad (15.34)$$

صحيحة في آن واحد، حيث \hat{L} و $s(\hat{L})$ معطيان في (15.32) و (15.33) على الترتيب، و S معطى بـ:

$$S^2 = (r-1)F(1-\alpha; r-1, n_T-r) \quad (14.34a)$$

ولذلك فإننا لو حسبنا من (15.34) كل فترات الثقة لجميع المقارنات الممكنة ففي 100(1 - α) بالمائة من تكرارات التجربة ستكون كافة فترات الثقة في العائلة صحيحة.

لاحظ أن حدود الثقة المترامنة في (15.34) لا تختلف عن حد الثقة بمفرده في (15.21) إلا بمضاعف الاغراف المعياري المقتر.

مثال

نرغب في مثال شركة كتون للأغذية بتقدير المتضادات الأربع التالية بـ 90% معامل ثقة عائلي:

مقارنة بين التصميم ذي الثلاثة ألوان والتصميم ذي الخمسة ألوان:

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

مقارنة بين التصميم التي تستخدم صيغ الرسوم المتحركة والتصاميم التي لا تستخدمها:

$$L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_4}{2}$$

مقارنة بين التصميمين اللذين يستخدمان ثلاثة ألوان:

$$L_3 = \mu_1 - \mu_2$$

مقارنة بين التصميمين اللذين يستخدمان خمسة ألوان:

$$L_4 = \mu_3 - \mu_4$$

نعتبر تقدير L_1 فقد وجدنا من قبل أن :

$$\hat{L}_1 = -9$$

$$s\{\hat{L}_1\} = 1.79$$

وبما أن $r = 4$ و $r - r = 6$ (جدول ١٥-١) فلدنا:

$$S^2 = (r-1)F(1-\alpha; r, n-r) = 3F(.90; 3, 6) = 3(3.29) = 9.87$$

بحيث تكون $S = 3.14$ لذلك فإن حدي الثقة لـ L_1 بطريقة شيفه للمقارنات المتعددة

هما : (1.79) 3.14 ± 9 وتكون فترة الثقة المطلوبة:

$$-14.6 \leq L_1 \leq -3.4$$

وبطريقة مشابهة نحصل على فترات الثقة الأخرى المرغوبة، وتكون المجموعة

بأكملها كما يلي:

$$-14.6 \leq L_1 \leq -3.4$$

$$-8.6 \leq L_2 \leq 2.6$$

$$-5.9 \leq L_3 \leq 9.9$$

$$-15.9 \leq L_4 \leq -1$$

ولهذه المجموعة من فترات الثقة معامل ثقة عالٍ في 90 في المائة، وهكذا يرتبط

معامل الثقة هذا بأي سلسلة من النتائج نستنتجها من فترات الثقة. والاستنتاجات

الرئيسية التي استنتجها مدير المبيعات من مجموعة التقديرات أعلاه كانت كما يلي:

أعطت التصميم التي تستخدم خمسة ألوان متوسط مبيعات أعلى من التصميم

التي تستخدم ثلاثة ألوان، وتراوحت الزيادة بين ثلاث إلى خمس عشرة حالة بيع

للمحل الواحد. وما أشير إلى أي تأثير لاستخدام صور الرسوم المتحركة في تصميم الغلاف، مع أنه في التصميم ذات الخمسة ألوان أدى استخدام صور الرسوم المتحركة إلى انخفاض متوسط المبيعات عنه في تلك التي لم تستخدم صور الرسوم المتحركة.

تعليقات

١- لو أننا رغبت في مثال شركة كتون للأغذية بتقدير مقارنة وحيدة بـ 90% معامل ثقة، فستكون قيمة t المطلوبة هي $1.943 = (6; 95)\alpha$. وقيمة t هذه أصغر من مضاعف شيفه $S = 3.14$ ، وهذا يعني أن فترة الثقة الوحيدة ستكون نوعاً ما أضيق. وزيادة عرض الفترة في طريقة شيفه هو الثمن الذي ندفعه مقابل معامل ثقة معروف لعائلة من العبارات وللسلسلة النتائج المستخلصة منها. وكذلك لإمكانية القيام بمقارنات لم تكن محددة سلفاً قبل تحليل البيانات.

٢- بما أن تطبيقات طريقة شيفه لا تتضمن أبداً كافة المتضادات الممكنة، فإن معامل الثقة للعائلة المنتهية من العبارات المعتبرة بالفعل سيكون أكبر من $1 - \alpha$. ولذلك، فعندما نذكر أن معامل الثقة هو $1 - \alpha$ في طريقة شيفه فإننا في الحقيقة نقصد أنه من المضمون أن يكون معامل الثقة على الأقل $1 - \alpha$. ولهذا السبب، فقد اقترح أن يكون معامل الثقة $1 - \alpha$ المستخدم في طريقة شيفه أقل مما هو مستخدم في العادة، باعتبار أن هو حد أدنى، وسيكون معامل الثقة الحقيقي أكبر من ذلك. وكثيراً ما يُستخدم معاملاً الثقة 90% و 95% في طريقة شيفه.

٣- يمكن استخدام طريقة شيفه في تشكيلة واسعة من حالات التطفل على البيانات باعتبار أن عائلة العبارات تتضمن جميع المتضادات الممكنة.

مقارنة طريقة شيفه مع طريقة توكي

١- تغطي طريقة توكي حدود ثقة أضيق عند القيام بمقارنات ثنائية، فقط، ولذلك فهي الطريقة المفضلة في هذه الحالة.

٢- في حالة متضادات عامة، تنحو طريقة شيفه إلى إعطاء حدود ثقة أضيق، ولذلك فهي الطريقة المفضلة في هذه الحالة.

٣- تملك طريقة شيفه خاصية أنه إذا دل الاختبار المبني على F^* على عدم تساوي

متوسطات مستويات عامل μ_4 ، فإن طريقة شيفه المقابلة للمقارنات المتعددة ستعثر على متضادة واحدة على الأقل (من بين كل للتضادات الممكنة) تختلف معنويا عن الصفر (فترة الثقة لاتغطي الصفر). ولكن قد لاتكون هذه المتضادة من بين تلك التي قدرها المحلل.

(١٥-٥) طريقة المقارنات المتعددة لبونفيروني

لقد تطرقنا سابقا إلى طريقة المقارنات المتعددة لبونفيروني في نماذج الانحدار. وهي، أيضا، مناسبة لنماذج تحليل التباين عندما:

تكون العائلة عمل الاهتمام هي المجموعة الخاصة من المقارنات الثنائية أو المتضادات أو التراكيب الخطية التي حددها المحرر.

ويمكن تطبيق طريقة بونفيروني سواء أكانت أحجام العينات لمستويات العامل متساوية أم لا، وسواء أكان مانريد تقديره هو مقارنات ثنائية أو متضادات أو تراكيب خطية أو خليط منها.

وسنرمز لعدد العبارات في العائلة بـ g ، وستعاملها كلها كتراكيب خطية. ذلك لأن كلا من المقارنات الثنائية والمتضادات تعتبر حالات خاصة من التراكيب الخطية. وتضمن مراجعة بونفيروني (5.5)، عندئذ، وبمعامل ثقة على الأقل $1 - \alpha$ ، أن حدود الثقة التالية لـ g من التراكيب الخطية L_i ، جميعها صحيحة:

$$\hat{L}_i \pm B s\{\hat{L}_i\} \quad i = 1, \dots, g \quad (15.35)$$

حيث:

$$B = t(1 - \alpha / 2g; nT-r) \quad (15.35a)$$

مثال

يهتم مدير المبيعات في شركة كتون للأغذية بتقدير المقارنتين التاليتين بـ 975 . معامل ثقة عائلي:

مقارنة بين التصميم الذي تستخدم ثلاثة ألوان وتلك التي تستخدم خمسة ألوان:

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

مقارنة بين التصميم الذي تستخدم صور الرسوم المتحركة وتلك التي لاتستخدمه

$$L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_4}{2}$$

وقد وجدنا سابقا :

$$\hat{L}_1 = -9 \quad s(\hat{L}_1) = 1.79$$

$$\hat{L}_2 = -3 \quad s(\hat{L}_2) = 1.79$$

وفي طريقة بونفيروني ولي 97.5% معامل ثقة عائلي، نحتاج إلى:

$$B = t[1 - 0.025 / 2(2); 6] = t(.99375; 6) = 3.57$$

ونستطيع الآن حساب فترات الثقة للمتضادتين السابقتين. فحددا الثقة لـ L_1 هما

$$-9 \pm 3.57(1.79)$$

$$-15.4 \leq L_1 \leq -2.6$$

وبطريقة مشابهة نحصل على فترة الثقة الأخرى:

$$-9.4 \leq L_2 \leq -3.4$$

ونضمن لفترتي الثقة هاتين 97.5% معامل ثقة عائلي، وهذا يعني أنه في 97.5%

على الأقل، من تكرارات التجربة ستكون كلا الفترتين صحيحتين.

ونستنتج من عائلة التقديرات هذه، مرة أخرى، أن متوسط المبيعات للتصاميم

ذات الخمسة ألوان أعلى من متوسط المبيعات للتصاميم ذات الثلاثة ألوان (كما يتراوح

بين 3 إلى 15 عتبة للمحل الواحد)، وكذلك لا توجد أي دلالة على تأثير استخدام

صور الرسوم المتحركة في تصاميم الغلاف.

ومضاعف شيفه لـ 97.5% معامل ثقة عائلي كان سيكون في هذه الحالة:

$$S^2 = 3F(.975; 3, 6) = 3(6.60) = 19.8$$

أو $S = 4.45$ بالمقارنة مع مضاعف بونفيروني $B = 3.57$. وهكذا، فإن طريقة شيفه

كانت ستؤدي هنا إلى فترات ثقة أوسع من فترات الثقة لطريقة بونفيروني.

ملاحظة

ليس من الضروري أن يكون لكل من المقارنات التي ستُفْتَر معامل ثقة (α/g) .

كفي يكون معامل الثقة العائلي في طريقة بونفيروني $1 - \alpha$. بل يمكن استخدام معامل

ثقة مختلف $\alpha_i - 1$ لكل عبارة، وذلك اعتمادا على أهمية كل عبارة، شريطة أن يكون:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_g = \alpha$$

مقارنة طريقة بونفيروني مع كل من طريقي شيفه وتوكي

١- إذا كانت جميع المقارنات الثنائية محل اهتمام، فإن طريقة توكي تتفوق على طريقة بونفيروني من حيث أنها تؤدي إلى فترات ثقة أضيق. أما إذا لم تكن جميع المقارنات الثنائية محل الاهتمام، فقد تكون طريقة بونفيروني أفضل أحيانا.

٢- ستكون طريقة بونفيروني أفضل من طريقة شيفه عندما يكون عدد المتضادات المراد تقديرها قريبا من عدد مستويات العامل أو أقل منه. ويجب في الواقع أن يكون عدد العبارات أكبر بكثير من مستويات العامل قبل أن تصبح طريقة شيفه الأفضل.

٣- في أي مسألة معقدة، يمكن للمرء أن يحسب كلاً من مضاعف بونفيروني ومضاعف شيفه بالإضافة، إن أمكن، إلى مضاعف توكي ويختار أصغرها. وهذا الاختيار مناسب لأنه لا يعتمد على البيانات الملحوظة.

٤- لا تساعد طريقة بونفيروني للمقارنات المتعددة على التطفل على البيانات ما لم يتمكن المرء مسبقاً من تحديد عائلة المقارنات التي سيرسها، ويجب، أيضاً، ألا تكون هذه العائلة كبيرة. وعلى الوجه الآخر، تنطوي طريقتا توكي وشيفه على عائلات من العبارات تسمح، وبشكل طبيعي، بالتطفل على البيانات.

٥- لا تزال هناك طرق أخرى للقيام بمقارنات متعددة. وقد صُمم العديد منها لحالات خاصة، مثل مقارنة معالجات تجريبية مع معالجة حيادية.

ويحتوي كتاب ميللر (MILLER) (المراجع 152) مرجعا جيدا للمقارنات المتعددة.

(٩٥-٩٦) اختبارات بدرجة واحدة من الحرية

عندما تؤدي إحصاءة الاختبار F الإجمالية إلى نتيجة أن متوسطات مستويات العامل في دراسة وحيدة العامل g ليست جميعها متساوية، فإن البحث في طبيعة تأثيرات مستويات العامل يتم أحيانا عن طريق اختبارات تتعامل مع أسئلة محددة وليس بواسطة تقدير مقارنات ثنائية أو متضادات أو تراكيب خطية. فعلى سبيل المثال، رغب مدير المبيعات في شركة ككتون للأغذية بمعرفة ما إذا كان متوسط المبيعات

للمحل الواحد يبقى نفسه في التصميمات ذات الثلاثة ألوان والتصميمات ذات الخمسة ألوان، وبما أن جميع متوسطات مستويات العامل μ_4 اعتبرت بالأهمية نفسها، فإن هذا السؤال يتضمن الفرضيات البديلة التالية:

$$H_0: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$H_a: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \neq \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

ويمكن كتابة هذه الفرضيات البديلة بشكل مكافئ كما يلي:

$$H_0: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} = 0$$

$$H_a: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \neq 0$$

يدعى الاختبار الذي يتضمن تركيباً خطياً في متوسطات مستويات العامل μ_4 اختباراً بدرجة واحدة من الحرية. وبصورة عامة، تُكتب الفرضيات البديلة ذات الجانبين لاختبار ذي درجة حرية واحدة كالآتي:

$$H_0: \sum c_i \mu_i = c \quad (15.36)$$

$$H_a: \sum c_i \mu_i \neq c$$

حيث c_1 و c ثوابت مناسبة. وفي المثال السابق مثلاً، لدينا:

$$c = 0 \text{ و } c_4 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

ولاختبار البدائل (15.36)، نستخدم نظرية (15.20) التي تؤدي إلى إحصائية

الاختبار F^* :

$$F^* = \frac{\sum c_i \bar{Y}_i - c}{\sqrt{MSE \sum \frac{c_i^2}{n_i}}} \quad (15.37)$$

وهي تتبع التوزيع F بـ $n_T - r$ درجة حرية عندما تكون H_0 صحيحة. وهناك إحصائية

اختبار مكافئة هي $(F^*)^2$ ونرمز لها بـ F^{**} :

$$F^* = (t^*)^2 = \frac{(\sum c_i \bar{y}_i - c)^2}{MSE \sum \frac{c_i^2}{n_i}} \quad (15.38)$$

وهي تتبع التوزيع F بـ 1 و $n_T - r$ درجات حرية عندما تكون H_0 صحيحة. تذكر من (1.47a) أن $[t(n_T - r)]^2 = F(1, n_T - r)$.

مثال

في مثال شركة كنتون للأغذية، لاختبار ما إذا كان متوسط المبيعات للمحل الواحد يبقى نفسه للتصاميم ذات الثلاثة ألوان والتصاميم ذات الخمسة ألوان أم لا، سنستخدم إحصاء الاختبار (15.38) حيث $\alpha = 0.05$ والفرضيات البديلة هي:

$$H_0: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} = 0$$

$$H_a: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \neq 0$$

حيث يكون $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ و $C_3 = C_4 = \frac{-1}{2}$ و $C = 0$ وباستخدام نتائج العينة في الجدول (١٠٥) نحصل على إحصاء الاختبار:

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\left(\frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} - \frac{\bar{y}_3 + \bar{y}_4}{2} - 0 \right)^2}{MSE \left[\frac{(1/2)^2}{n_1} + \frac{(1/2)^2}{n_2} + \frac{(-1/2)^2}{n_3} + \frac{(-1/2)^2}{n_4} \right]} \\ &= \frac{\left(\frac{15+13}{2} - \frac{19+27}{2} \right)^2}{7.67 \left(\frac{25}{2} + \frac{25}{3} + \frac{25}{3} + \frac{25}{2} \right)} = 25.3 \end{aligned}$$

ومن أجل $\alpha = 0.05$ ، نحتاج لقيمة $F(95; 1,6) = 5.99$ وهكذا تكون قاعدة القرار:

إذا كان: $F^* \leq 5.99$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > 5.99$ استنتج H_a

وبما أن $F^* = 25.3 > 5.99$ فستنتج H_a ، أي أن متوسط المبيعات للتصاميم ذات الثلاثة ألوان يختلف عن متوسط المبيعات للتصاميم ذات الخمسة ألوان. والقيمة P - لهذا

الاختبار هي $0.0024 = P\{F(1,6) < 25.3\}$. و لو أننا استعملنا إحصاءة الاختبار (15.37) لكانت إحصاءة الاختبار:

$$t^* = \frac{\frac{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2}{2} - \frac{\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4}{2} - \mu}{\sqrt{MSE \left[\frac{(1/2)^2}{n_1} + \frac{(1/2)^2}{n_2} + \frac{(-1/2)^2}{n_3} + \frac{(-1/2)^2}{n_4} \right]}}$$

$$= \frac{\frac{15+13}{2} - \frac{19+27}{2}}{\sqrt{7.67 \left(\frac{25}{2} + \frac{25}{3} + \frac{25}{3} + \frac{25}{2} \right)}} = -5.03$$

ومن أجل $\alpha = 0.05$ ، سنحتاج للقيمة $t(975;6) = 2.447$ وتكون قاعدة القرار:

إذا كانت $|t^*| \leq 2.447$ ، استنتج H_0

إذا كانت $|t^*| > 2.447$ ، استنتج H_a

وبما أن $|t^*| = 5.03 > 2.447$ ، فنستنتج H_a ، كما سبق أن استنتجنا باستخدام إحصاءة الاختبار F^* .

تعليقات

١- يمكن، أيضاً، إجراء اختبار درجة واحدة من الحرية عن طريق تكوين فترة ثقة للمقارنة الثنائية المناسبة أو المتضادة أو التركيب الخطي وملاحظة ما إذا كانت فترة الثقة تحوي القيمة c المحددة في الفرضيات البديلة. فعلى سبيل المثال، حصلنا سابقاً على 95% فترة ثقة للفرق بين متوسط المبيعات للتصاميم ذات الثلاثة ألوان والتصاميم ذات الخمسة ألوان:

$$-13.4 \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \leq -4.6$$

وبما أن فترة 95% لا تحوي القيمة $c = 0$ ، فإن اختباراً للفرق بين متوسطي الفئتين من التصاميم، مع قيمة $\alpha = 0.05$ يؤدي إلى النتيجة بأن متوسطي الفئتين غير متساويين.

٢- ويمكن، أيضاً، استخدام إحصاءة الاختبار F^* عندما نريد إجراء اختبارات ذات جانب واحد، ولكن إحصاءة الاختبار F^* مناسبة، فقط، للاختبارات ذات الجانبين.

٣- تسمح العديد من حزم الحاسوب، الخاصة بتحليل التباين وحيدة العامل للمستعمل بأن يجدد المقارنة التي يريدها وستقدم الحزمة عندئذ إحصاءة الاختبار F^* أو F^* .

اختبارات متعددة كل منها بدرجة واحدة من الحرية

عند القيام بتحليل تأثيرات العامل بواسطة اختبارات ذات درجة حرية واحدة، نستخدم، عادة، العديد من الاختبارات ذات الدرجة الواحدة من الحرية للإجابة على الأسئلة ذات العلاقة. فعلى سبيل المثال، قد لا يرغب مدير المبيعات في شركة كنتون للأغذية في معرفة ما إذا كان للألوان المستعملة تأثير على متوسط المبيعات فحسب بل يريد، أيضاً، معرفة ما إذا كان لاستخدام صور الرسوم المتحركة تأثير أم لا. وإذا ماتم استخدام اختبارات متعددة بدرجة واحدة من الحرية، فإن كلا من مستوى المعنوية وقوة الاختبار يتأثران، وذلك إلى الحد المتعلق بعائلة من الاختبارات فمثلاً، لو قمنا بثلاثة اختبارات كل منها بدرجة حرية واحدة سواء كانت اختبارات F أو F و $\alpha = 0.05$ لكل منها، فاحتمال أن كلا من هذه الاختبارات سيؤدي إلى النتيجة H_0 عندما تكون H_0 صحيحة في كل حالة، وبفرض استقلال الاختبارات، سيكون عندئذ $0.95^3 = 0.857$. وهكذا، فإن مستوى المعنوية بأن واحداً من هذه الاختبارات سيؤدي إلى النتيجة H_0 عندما تكون H_0 صحيحة في كل حالة هو $1 - 0.857 = 0.143$ ، وليس 0.05 . وبالتالي نرى أن مستوى المعنوية وقوة الاختبار لعائلة من الاختبارات لا تبقى نفسها كما في حالة اختبار بمفرده. وفي الواقع فإن الإحصاءتين F^* و F^* غير مستقلتين، ذلك لأنهما مبنيتان على البيانات نفسها وتستخدمان القيمة MSE نفسها. ولذلك فعالمياً ما يكون من الصعوبة بمكان تحديد مستوى المعنوية وقوة الاختبار لعائلة من الاختبارات. ويمكن التحكم في مستوى المعنوية العائلي عند القيام بعدد من الاختبارات ذات الدرجة الواحدة من الحرية، وذلك باستخدام أحد طرق التقدير المتزامنة - سواء كانت طريقة بونفروني أو طريقة شيفيه (عند وجود متضادات) أو طريقة توكي (عند وجود مقارنات ثنائية). ويمكن للمرء ببساطة أن ينشئ فترات الثقة المناسبة ويستخلص من كل من هذه الفترات النتيجة المناسبة للاختبار. ولا يسمح

هذا الأسلوب بالقيام باختبارات درجة واحدة من الحرية مع التحكم في مستوى المعنوية العالي في فحسب، بل يعطى، أيضا، معلومات عن حجم أية تأثيرات موجودة.

مثال يرغب المحلل في مثال شركة كتون للأغذية باختبار ما إذا كان أي زوج μ_1 و μ_2 من متوسطات مستويات العامل مختلفين أم لا. ولذلك، فإن المحلل كان مهتما بإجراء اختبارات تتضمن الفرضيات البديلة التالية:

$$\begin{array}{lll} \text{اختبار ١: } H_0: \mu_1 = \mu_2 & \text{اختبار ٢: } H_0: \mu_1 = \mu_3 & \text{اختبار ٣: } H_0: \mu_1 = \mu_4 \\ H_a: \mu_1 \neq \mu_2 & H_a: \mu_1 \neq \mu_3 & H_a: \mu_1 \neq \mu_4 \\ \text{اختبار ٤: } H_0: \mu_2 = \mu_3 & \text{اختبار ٥: } H_0: \mu_2 = \mu_4 & \text{اختبار ٦: } H_0: \mu_3 = \mu_4 \\ H_a: \mu_2 \neq \mu_3 & H_a: \mu_2 \neq \mu_4 & H_a: \mu_3 \neq \mu_4 \end{array}$$

وإذا ثبت مستوى المعنوية العالي عند $\alpha = 0.10$.

وقد استخدم المحلل طريقة توكي للمقارنات المتعددة للحصول على جميع المقارنات التالية واستعمل قاعدة القرار:

إذا احتوت فترة الثقة القيمة 0، استنتج H_0

فيما عدا ذلك استنتج H_a

لقد حصلنا سابقا على فترات الثقة هذه ونعيد النتائج هنا بالإضافة إلى الاستنتاجات المناسبة:

$$\begin{array}{ll} \text{اختبار ١: } -5.3 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 9.3 & \text{اختبار ٢: } -11.3 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq -3.3 \\ \text{استنتج } H_0 & \text{استنتج } H_0 \\ \text{اختبار ٣: } 4.0 \leq \mu_4 - \mu_1 \leq 20.0 & \text{اختبار ٤: } -5 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq 12.5 \\ \text{استنتج } H_0 & \text{استنتج } H_0 \\ \text{اختبار ٥: } 6.7 \leq \mu_4 - \mu_2 \leq 21.3 & \text{اختبار ٦: } 7 \leq \mu_4 - \mu_3 \leq 15.3 \\ \text{استنتج } H_a & \text{استنتج } H_a \end{array}$$

وهكذا نرى أن جميع الفروق الثنائية بين تصميم الغلاف 4 وبين باقي التصميم لها دلالة إحصائية (أي أن الفروق بين هذه المتوسطات لامتساوي الصفر)، بينما بقيت الفروق الثنائية كافة ليس لها دلالة إحصائية.

وغالبا ما يتم تلخيص نتائج هذه الاختبارات الثنائية بتشكيل فئات من مستويات العامل لا تختلف متوسطاتها بعضها عن بعض وفقا لاختبارات الدرجة الواحدة من الحرية. وفي مثالنا هنا لدينا فئتان هما:

المجموعة ٢	المجموعة ١
تصميم الغلاف ٤ : $\bar{Y}_4 = 27$	تصميم الغلاف ١ : $\bar{Y}_1 = 15$
	تصميم الغلاف ٢ : $\bar{Y}_2 = 13$
	تصميم الغلاف ٣ : $\bar{Y}_3 = 19$

تعليقات

١- يمكن استخدام طريقة بونفرونوني لإجراء اختبارات متعددة كل منها بدرجة حرية واحدة ليس عن طريق فترات الثقة فحسب، ولكن، أيضا، مع أي من إحصاءاتي الاختبار F^* أو t^* . فلنفترض مثلا أننا نرغب في إجراء أربعة اختبارات كل منها بدرجة واحدة من الحرية وبمستوى معنوية عائلي $\alpha = 0.10$ ، فببساطة يجري كل اختبار F^* أو t^* بمستوى معنوية منفرد يساوي $0.025 = 10/4$.

٢- عند استخدام طريقة توكي للمقارنات المتعددة لاختبار فروق ثنائية، فتدعى هذه الاختبارات أحيانا اختبارات فروق مهمة فعلا.

(٧-١٥) تحليل تأثيرات عامل عندما يكون كميًا

عندما يكون العامل المدروس كميًا، يمكن أن يحضى تحليل تأثيرات العامل إلى ما وراء القيام بمقارنات متعددة ليشمل دراسة طبيعة دالة الاستجابة. اعتبر مثلاً دراسة تجريبية أجريت للبحث في تأثير أسعار منتج ما على المبيعات. وتمت دراسة خمسة مستويات للأسعار هي (28 سنتا، 29 سنتا، 30 سنتا، 31 سنتا، 32 سنتا)، وكانت

الوحدة التحريبية عملاً تجارياً. وبعد اختبار مبدئي لمعرفة ما إذا كان متوسط المبيعات يختلف باختلاف مستويات الأسعار المدروسة، قد يرغب المحلل القيام بمقارنات متعددة لفحص ما إذا كان "التسعر الفردي" يبدأ من 29 سنتاً، يؤدي في الواقع إلى زيادة المبيعات أكثر من "التسعر الزوجي" يبدأ من 28 سنتاً، بالإضافة إلى أسئلة أخرى مهمة. وبالإضافة إلى ذلك، قد يرغب المحلل في دراسة ما إذا كان متوسط المبيعات هو دالة معينة في السعر وذلك لدى الأسعار الذي درست في هذه التجربة وعندما يتم تحديد هذه العلاقة فقد يرغب المحلل في استخدامها لتقدير حجم المبيعات لمستويات أسعار لم تُدرس في هذه التجربة.

وبالطبع تعتبر طرق تحليل الانحدار التي نوقشت في الجزئين I و II مناسبة لتحليل دالة الاستجابة، ويجب التنويه هنا بأن الدراسات وحيدة العامل التي نوقشت في هذا الفصل تحوي بشكل شبه دائم على تكرارات عند مستويات العامل المختلفة بحيث يمكن إجراء اختبار نقص التوفيق للدالة استجابة معينة. ولهذا الغرض، يجب تذكر أن مجموع مربعات الخطأ في تحليل التباين (14.26) في مطابق لمجموع مربعات الخطأ البحث في الفصل الرابع في (4.11)، وسنوضح هذه العلاقة بالمثال التالي.

مثال

في دراسة لخفض تكلفة المواد الخام في مصنع لتشكيل الزجاج، قام محلل عمليات بجمع البيانات التحريبية في الجدول (١٥-٤) وذلك لعدد القطع المقبولة التي انتجت من كميات متساوية من المواد الخام بواسطة 28 من العمال الذين يعملون بالقطعة والذين تلقوا تدريباً خاصاً كجزء من التجربة. وقد تم استخدام أربعة مستويات للتدريب (6، 8، 10، 12 ساعة) بحيث يخصص سبعة من العمال عشوائياً لكل مستوى، وكلما زاد عدد القطع المنتجة كلما دل هذا على زيادة كفاءة العامل في الاستفادة من المواد الخام.

تحليل مبدئي. اختبر المحلل في البداية ما إذا كان متوسط عدد القطع المقبولة هو نفسه لمستويات التدريب الأربعة أم لا. فاستخدم نموذج التحاين (15.1):

$$Y_{ij} = \mu_i + e_{ij} \quad (15.39)$$

جدول (٤-١٥) بيانات مثال المطربين الذين يعملون بالقطعة

المعالجات		j						
		(عدد ساعات التدريب)						
		i						
		7	6	5	4	3	2	1
1	٦ ساعات	41	43	42	36	39	39	40
2	٨ ساعات	48	50	51	50	49	48	53
3	١٠ ساعات	58	59	53	59	56	58	53
4	١٢ ساعة	61	62	62	61	59	62	63

والبدائل وإحصاء الاختبار المناسبة هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

ليست جميع المتوسطات μ متساوية H_a :

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE}$$

أعطى برنامج حاسوب لنموذج تحاين وحيد العامل النتائج المبينة في الشكل (٤-١٥). وقد بين تحليل الرواسب (مناقشته في الفصل ١٦) أن نموذج التحاين (15.1) ملائم هنا. وهكذا استمر المحلل في الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$ ، فكانت قاعدة القرار كما يلي:

$$\text{إذا كانت } F^* \leq F(95; 4, 24) = 3.01 \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كانت } F^* > 3.01 \text{ استنتج } H_a$$

ومن النتائج المطبوعة في الشكل (٤-١٥)، نحصل على:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{602.8926}{4.2619} = 141.5$$

وبما أن $F^* = 141.5 > 3.01$ ، فقد استنتج المحلل H_a ، أي أن تأثيرات مستويات التدريب مختلفة وتحتاج إلى مزيد من التحليل. القيمة P -الإحصاء الاختبار كانت 0^* كما هو مبين في الشكل (٤-١٥).

دراسة تأثيرات المعالجات. لقد تركز اهتمام المحلل بعد ذلك على مقارنات متعددة لكافة الأزواج من متوسطات المعالجات، وقد استخدم خيار توكي للمقارنات المتعددة في برنامج الحاسوب الذي استخدمه المحلل. وأعطى المخرج للموضع في الجزء الأسفل من شكل (١٥-٤). هذا المخرج يعطي نتائج الاختبارات بدرجة واحدة من الحرية التي نُفذت وفقاً لطريقة توكي للمقارنات المتعددة وذلك من أجل جميع المقارنات الثنائية (لم تظهر فترات الثقة لمقارنات الثنائية في المخرج). وقد وُضعت كل مستويات العامل التي استنتج الاختبار أن متوسطاتها متنى متساوية في المجموعة نفسها.

ولقد وُضعت شكل التلخيص هذا للاختبارات ذات درجة الحرية الواحدة سابقاً في مثال شركة ككتون للأغذية. وعندما نحوي مجموعة ما على مستوى عامل واحد، كما هو الحال لكل المجموعات في المخرج المعروض في الشكل (١٥-٤)، فهذا يعني أن جميع الاختبارات ذات درجة الحرية الواحدة التي تتضمن مستوى العامل هذا وكلاً من مستويات العامل الأخرى قد أدت إلى استنتاج H_0 ، أي أن مستويي العامل موضع المقارنة غير متساويين.

هناك نقطتان مهمتان يجب ملاحظتهما من النتائج في شكل ١٥-٤: (١) جميع فروق مستويات العامل متنى متنى مهمة إحصائياً. (٢) هناك بعض الدلالة بأن الفروق بين متوسطات مستويات العامل المتحاورة تتناقص مع تزايد عدد ساعات التدريب، أي أنه يبدو أننا نحصل على عالٍ يتلاشى مع زيادة مدة التدريب.

تقدير دالة الاستجابة. هذه النتائج كانت متفقة مع توقعات المحلل. وكان ظنه أن متوسطات المعالجات μ ستتبع، في الغالب، دالة استجابة تربيعية في مستوى التدريب. ولقد دعم رسم الحاسوب للبيانات هذا التوقع. ويرغب الآن بحث هذه النقطة أكثر بتوفيق نموذج انحدار تربيعي. والنموذج الذي سيحري توقيقه واختباره هو:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_{11} x_i^2 + \varepsilon_{ij} \quad (15.40)$$

شكل (١٥-٤) جزء من مخرج الحاسوب لملل للفردين الذين يعملون بالقطعة (SPSS^{١٥} لراجع [15.3])

	n_j ↓ COUNT	\bar{y}_j ↓ MEAN	STANDARD DEVIATION
GROUP			
GRP01	7	40.0000	2.3094
GRP02	7	49.8571	1.7728
GRP03	7	56.5714	2.6367
GRP04	7	61.4286	1.2724
TOTAL	28	51.9643	8.4129

معالجة →

SOURCE	D.F.	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARES
BETWEEN GROUPS	3	$SSTR \rightarrow 1808.6778$	602.8926 ← $MSTR$
WITHIN GROUPS	24	$SSE \rightarrow 102.2856$	4.2619 ← MSE
TOTAL	27	$SSTO \rightarrow 1910.9634$	

F RATIO	F PROB.
141.461	0.0000

↑
القيمة F_{α}
ذات الجانب الواحد

MULTIPLE RANGE TEST

TUKEY-HSD PROCEDURE
RANGES FOR THE 0.050 LEVEL -

3.90 ← $q(.95; 4, 24)$

HOMOGENEOUS SUBSETS

SUBSET 1		SUBSET 3	
GROUP	GRP01	GROUP	GRP03
MEAN	40.0000	MEAN	56.5714
-----		-----	
SUBSET 2		SUBSET 4	
GROUP	GRP02	GROUP	GRP04
MEAN	49.8571	MEAN	61.4286
-----		-----	

جدول (١٥-٥) مصفوفات X و Y لكامل المتربين الذين يعملون بالقائمة

		x	x^2	
40		1	-3	9
39		1	-3	9
39		1	-3	9
36		1	-3	9
42		1	-3	9
43		1	-3	9
41		1	-3	9
53		1	-1	1
48		1	-1	1
49		1	-1	1
50		1	-1	1
51		1	-1	1
50		1	-1	1
48		1	-1	1
53		1	1	1
58		1	1	1
56		1	1	1
59		1	1	1
53		1	1	1
59		1	1	1
58		1	1	1
63		1	3	9
62		1	3	9
59		1	3	9
61		1	3	9
62		1	3	9
62		1	3	9
61		1	3	9

$X =$

حيث Y_{ij} و μ معرفتان كالسابق، والثابت β هي معالم الانحدار، ويرمز β_0 لعدد ساعات التدريب عند مستوى التدریب (X_i) معبأ عنه كإغراف عن متوسط كل مستويات التدریب، أي أن $\beta_0 = X_i - 9$. والمصفوفتان X و Y لتحليل الانحدار معطيتان في الجدول (١٥-٥). وقد أعطت تشغيل حزمة انحدار متعدد حاسوبية دالة الانحدار المقدرة التالية:

$$\hat{Y} = 53.52679 + 3.55000x - .13250x^2 \quad (15.41)$$

ويوضع الجدول (١٥-٦) تحليل التباين لنموذج الانحدار (15.40). ولتمام المقارنة نعيد عرض تحليل التباين لنموذج التحاين (15.39) في الجدول (١٥-٦) ب. وبما أن البيانات تحوي تكرارات، فيمكن للمحلل اختبار النقص في توفيق نموذج الانحدار (15.40).

جدول (١٥-٦) تحليل التباين لحال المتدربين الذين يعملون بالقطعة

(أ) نموذج الانحدار (15.40)			
مصدر	SS	df	MS
انحدار	1,808.100	2	904.05
خطأ	102.864	25	4.11
المجموع	1,910.964	27	
(ب) نموذج تحليل التباين (15.39)			
مصدر التغير	SS	df	MS
انحدار	1,808.678	3	602.89
خطأ	102.286	24	4.26
المجموع	1,910.964	27	
(ج) نموذج التحاين لإعبار النقص في التوفيق			
مصدر التغير	SS	df	MS
انحدار	1,808.100	2	904.05
خطأ	102.864	25	4.11
النقص في التوفيق	.578	1	.58
الخطأ البحت	102.286	24	4.26
المجموع	1,910.964	27	

وقد استفاد من حقيقة أن مجموع مربعات خطأ التحاين في (14.26) مطابق لمجموع مربعات الخطأ البحث للانحدار في (4.11). فكلاهما يقيس التشتت حول المتوسط عند أي مستوى معطى لـ X (أي حول متوسط المعالجة المقترن). عندئذ يمكن الحصول على مجموع مربعات نقص التوفيق مباشرة من النتائج السابقة:

$$SSLF = SSE - SSPE = 102.864 - 102.286 = .578 \quad (15.42)$$

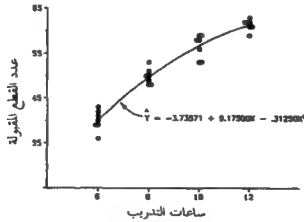
وبما أنه يوجد هنا $c = r = 4$ مستويات لـ X و $p = 3$ معالم في نموذج الانحدار، فإنه يقترن مع $SSLF = .578/1 = .578$. ويحوي الجدول (٦-١٥) تحليل التباين لنموذج الانحدار بحيث تم تقسيم مجموع مربعات الخطأ ودرجات الحرية إلى مركبتين نقص التوفيق والخطأ البحث.

وتكون البدائل (7.57a) لاختبار نقص التوفيق هنا هي:

$$H_0: E\{Y\} = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2$$

$$H_a: E\{Y\} \neq \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2$$

شكل (٥-١٥) رسم انحدار ودالة استجابة تربيعية توفيقية- معال المتربين الذين يعملون بالقطعة.



وتكون إحصاءة الاختبار (7.57b) كما يلي:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSPE}$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، تصبح قاعدة القرار (7.57c) كالتالي:

إذا كانت $F^* \leq F(0.95; 1, 24) = 4.26$ استنتج H_0

إذا كانت $F^* > 4.26$ استنتج H_a

ونحسب إحصاءة الاختبار من جدول (٦-١٥) ج:

$$F^* = \frac{58}{4.26} = 13.6$$

وبما أن $13.6 > 4.26$ فقد استنتج المحلل أن دالة الاستجابة التربيعية توفيق جيد. وبالتالي فقد استخدم دالة الانحدار التوفيقية في (15.41) لمزيد من تقويم العلاقة بين متوسط عدد القطع المقبولة من الإنتاج وبين مستوى التدريب، وذلك بعد أن عبر عن دالة الاستجابة التوفيقية بدلالة المتغير المستقل الأصلي X (عدد ساعات التدريب).

$$\hat{Y} = -3.73571 + 9.17500X - 3.1250X^2$$

ويعرض الشكل (٥-١٥) دالة الاستجابة المقترنة هذه.

مراجع ورد ذكرها

- [15.1] Cochran. W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1957, p. 74.
- [15.2] Miller, R. G., Jr. *Simultaneous Statistical Inference*. 2nd ed. New York : Springer Verlag, 1981.
- [15.3] *SPSS User's Guide*. 2nd ed. Chicago : SPSS, 1986.

مسائل

(١٥-١) نعد إلى شكل (٥-١٤) لثلاث المتدربين الذين يعملون بالقطعة. فلتقدير

متوسط المعالجة μ باستخدام التقدير بفترة، هل سيكون صحيحاً أن

نستخدم لتباين المقدّر \bar{Y}_1 :

$$s^2\{\bar{Y}_1\} = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{(2.3094)^2}{7}$$

عوضاً عن (15.5) :

$$s^2\{\bar{Y}_1\} = \frac{MSE}{n_1} = \frac{4.2619}{7}$$

ماهي مزايا استخدام (15.5)؟ وماهي المساوئ؟

(٢٠١٥) بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٤-١٥). اقترح أحد الطلاب عندما طُلب منه أن يشرح في الفصل استخدام فترات الثقة لمقارنة متوسطي معالجتين، أن يضع 99% فترة ثقة للمقارنة الثانية $D = \mu_2 - \mu_3$. وقد اختار هذه المقارنة بالذات لأن متوسطي العينتين \bar{Y}_2 و \bar{Y}_3 هما الأكبر والأصغر على التوالي. وقد قال الطالب. "إن فترة الثقة هذه مفيدة على وجه الخصوص. فإذا لم تحتضن الصفر، فإنها ستدل، بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ، على أن متوسطات مستويات العامل "غير متساوية".

أ - أشرح أسباب خطأ اقتراح الطالب.

ب - كيف يجب بناء فترة الثقة بحيث يكون اقتراح الطالب صحيحا بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ؟

(٣٠١٥) فحص أحد المتدربين مجموعة من البيانات التجريبية للبحث عن المقارنات التي "تبدو مفيدة" وحسب عائلة من فترات الثقة لبونفروني لهذه المقارنات بـ 90% عامل ثقة عاللي. وعندما أُخبرَ بأنه لا يمكن أن يطبق طريقة بونفروني لأن المقارنات قد اقترحت من البيانات، قال المتدرب: "لن يكون هناك أي فرق" إذ ساستخدم الصيغ نفسها للتقديرات النقطية وللأخطاء المعيارية المقدرة حتى ولو لم تكن المقارنات اقترحت من البيانات". ما هو ردك.

(٤٠١٥) اعتبر التراكيب الخطية التالية التي تهتمنا في دراسة وحيدة العامل تتضمن أربعة مستويات:

$$\begin{aligned} (i) & \mu_1 + 3\mu_2 - 4\mu_3 \\ (ii) & 3\mu_1 + .5\mu_2 + .1\mu_3 + .1\mu_4 \\ (iii) & \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} - \mu_4 \end{aligned}$$

أ - ما هي التراكيب الخطية التي تعتبر مقارنات؟ أذكر المعاملات لكل من هذه المقارنات.

ب - أعط مقدرًا غير منحاز لكل من هذه التراكيب الخطية. واعط كذلك التباين المقدّر لكل مقدر بفرض أن $n_1 = n$.

(٥-١٥) في دراسة تحاين وحيدة العامل تكون من $r=6$ معالجات وحجوم عينات $n_i=10$

أ - بافتراض أنه ستوضع مقارنات ثنائية لمتوسطات للمعالجات بـ 90% معامل ثقة عائلي، أوجد المضاعفات T و S و B للأعداد التالية من المقارنات

الثانية في العائلة : $g=2, 5, 15$ ما هو التعميم الذي تقترحه نتأهلك؟

ب - بافتراض أن المقارنات لمتوسطات المعالجات مستقر بـ 90% معامل ثقة عائلي، أوجد المضاعفات T و B للأعداد التالية من التضادات في العائلة:

$g=2, 5, 15$ ما هو التعميم الذي تقترحه نتأهلك؟

(٦-١٥) اعتم دراسة وحيدة العامل بـ $r=5$ معالجات وحجوم عينات $n_i=5$

أ - أوجد مضاعفات T و S و B إذا كانت $g=2, 5, 10$ من المقارنات الثانية

ستم بـ 95% معامل ثقة عائلي. ما هو التعميم الذي تقترحه نتأهلك؟

ب - ماذا ستكون المضاعفات T و S و B لحجوم عينات $n_i=20$ ؟ هل

التعميم الذي حصلت عليه من الفقرة (أ) مازال صحيحا؟

(٧-١٥) عند القيام بمقارنات متعددة، لماذا يكون من المناسب استخدام طريقة

المقارنات المتعددة التي تؤدي إلى أضيق فترات ثقة مُستخرجة مما لدينا من

بيانات عينة؟ ناقش.

(٨-١٥) اعتبر دراسة وحيدة العامل بـ $r=2$ من المعالجات وحجوم عينات $n_i=10$

أوجد المضاعفات T و S و B لـ $g=1$ من المقارنات الثانية بـ 99% معامل

ثقة عائلي. ما هو التعميم الذي تقترحه نتأهلك؟

(٩-١٥) بالرجوع إلى مسألة تخمين الإنفاجية، (٤-١٠)، إليك بعض النتائج

الحسابية الإضافية:

	\bar{y}_i	n_i	مستوى نفقات البحث والتطوير	i
	6.878	9	منخفض	1
$MSE = .6401$	8.133	12	معتدل	2
	9.200	6	مرتفع	3

أ - جهز رسم خط لتوسطات العامل المقترنة \bar{y}_i . ماذا يقترح هذا الرسم بالنسبة لتأثير مستوى نفقات البحث والتطوير على متوسط تحسين الإنتاجية؟

ب- قدر متوسط تحسين الإنتاجية لشركات ذات مستويات عالية لنفقات البحث والتطوير، استخدم 95% فترة ثقة.

ج - أوجد 95% فترة ثقة لـ $\mu_2 - \mu_1 = D$ فسر فترة الثقة هذه.

د - أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية لتوسطات المعالجات، استخدم طريقة توكي بـ 90% معامل ثقة عائلي. أذكر استنتاجاتك و جهز تلخيصا يبينيا بوضع خط تحت المقارنات غير المهمة في رسم الخط الذي حصلت عليه في الفقرة (أ).

هـ - هل طريقة توكي التي استخدمت في الفقرة (د) هي الطريقة الأكثر كفاءة التي يمكن استخدامها هنا؟ أشرح.

(١٠-١٥) بالرجوع إلى مسألة لون الاسميان (١٤-١١)، فيما يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

	\bar{y}_i	n_i	اللون	i
	29.4	5	أزرق	1
$MSE = 9.70$	29.6	5	أخضر	2
	28.0	5	برتقالي	3

أ - جهز رسم احتمال طبيعي لتوسطات مستويات العامل \bar{y}_i ماذا يقترح هذا الرسم بالنسبة لتأثير اللون على معدل الاستجابة؟ هل إستنتاجك موافق لنتيجة الاختبار في مسألة (١٤-١١)؟

ب- قدر متوسط معدل الاستجابة للاستبيانات الزرقاء، استخدم 90% فترة ثقة.

ج- أوجد 90% فترة ثقة لـ $\mu_2 - \mu_3 = D$ فسر تقدير الفترة هذه وعلى ضوء نتيجة اختبار التحاين في المسألة (١١-١٤) (د)، هل يبدو مفاجئا أن تحتوي فترة الثقة على الصفر؟ اشرح.

(١١-١٥) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٢-١٤).

أ - جهّز رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقسّمة \bar{Y}_i . ماذا يقترح هذا الرسم بالنسبة لتأثير اللياقة البدنية السابقة على متوسط الزمن اللازم للعلاج؟.

ب- قدّر بـ 99% فترة ثقة متوسط عدد الأيام اللازمة للعلاج لأشخاص لهم لياقة بدنية متوسطة.

ج- أوجد فترات ثقة لـ $\mu_2 - \mu_3 = D_1$ و $\mu_2 - \mu_1 = D_2$ ، استخدم طريقة يونفيريوي بـ 99% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك.

د - هل ستكون طريقة توكي أكثر فعالية للاستخدام في الفقرة (ج-)? اشرح.

هـ- لو رغب الباحث بتقدير $\mu_2 - \mu_3 = D_3$ ، أيضا، بـ 95% معامل ثقة عائلي، فهل سيحتاج إلى تعديل المضاعف B المستخدم في الفقرة (ج)? وهل ستكون هذه هي الحالة، أيضا، لو أن طريقة توكي كانت الطريقة المستعملة؟

(١٢-١٥) بالرجوع إلى مسألة العروض النقدية (١٣-١٤).

أ - جهّز رسم احتمال طيعي لمتوسطات مستويات العامل \bar{Y}_i . ماذا يقترح هذا الرسم بخصوص تأثير عُمر المالك على متوسط العرض النقدي؟

ب - قدر متوسط العرض النقدي للمالكين صغار السن، استخدم 99% فترة ثقة.

ج - ضح 99% فترة ثقة لـ $\mu_2 - \mu_3 = D$ فسر تقديرك بفترة.

د - أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات، استخدم طريقة توكي بـ 90% معامل ثقة عاللي. فسر نتائجك وقدم تلخيصا بيانيا عن طريق إعداد رسم عطف ثم ضع خطا تحت المقارنات غير المهمة. هل تتفق نتائجك مع تلك التي حصلت عليها في الجزء (أ)؟
هـ- هل ستكون طريقة بونفيروني أكثر كفاءة من طريقة توكي التي استخدمت في الفقرة (د)؟ اشرح.

(١٣-١٥) بالرجوع إلى مسألة آلات التعبئة (١٤-١٤).

أ - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقترنة \bar{Y}_i ماذا يقترح هذا الرسم بخصوص التشتت في متوسطات الكميات المعبأة للآلات الست؟

ب - ضع 95% فترة ثقة لمتوسط الكمية المعبأة للآلة .

جـ - أوجد 95% فترة ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2 = D$ فسر تقدير الفترة هذا.

د - يهتم المستشار على وجه الخصوص بمتوسط الكميات المعبأة بالآلات 1 و 4 و 5. ضع فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات الثلاثة هذه استخدم طريقة بونفيروني بـ 90% معامل ثقة عاللي. فسر نتائجك وجهّز تلخيصا بيانيا باستخدام رسم عطف لمتوسطات مستويات العامل المقترنة مع وضع خط تحت الفروق غير المعنوية. هل تتفق استنتاجاتك مع تلك التي حصلت عليها في (أ)؟
هـ- هل ستكون طريقة توكي أكثر كفاءة من طريقة بونفيروني التي استخدمت في الفقرة (د)؟ اشرح.

(١٤-١٥) بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٤-١٥).

أ - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقترنة \bar{Y}_i ماذا يقترح هذا الرسم بخصوص التشتت في متوسط الوقت المنصرم لكل من الوكلاء الخمسة؟

ب- ضع 90% فترة ثقة لتوسط الرقت المنصرم للوكيل .

ج- أوجد 90% فترة ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2 = D$ فسر تقدير الفترة هذا.

د- يرغب مدير التسويق في مقارنة متوسطات الأوقات المنصرمة للوكلاء

1 و 3 و 5. أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات

المعالجات الثلاثة هذه. استخدم طريقة بونفيروني بـ 90% معامل ثقة

عائلي. فسر نتائجك ووجهز تلخيصا بيانيا باستخدام رسم خط

لمتوسطات مستويات العامل المقترنة مع وضع خط تحت الفروق غير

المعنوية، هل تتفق استنتاجاتك مع تلك التي حصلت عليها في (أ)؟

هـ- هل ستكون طريقة توكي أكثر كفاءة من طريقة بونفيروني التي

استخدمت في الفقرة (د)؟

(١٥-١٥) بالرجوع إلى مسائل تحسين الإنتاجية (١٤-١٠) و (١٥-٩).

أ - قتر الفرق في متوسط تحسين الإنتاجية بين المصانع ذات المستوى

المنخفض أو المتوسط في نفقات البحث والتطوير والمصانع ذات

المستوى العالي في النفقات، استخدم 95% فترة ثقة. استخدم متوسطا

غير مرجح لفئة النفقات المنخفضة والمتوسطة. فسر تقديرك هذا.

ب - تتناسب أحجام العينات لمستويات العامل الثلاثة مع أحجام المجتمع

ويرغب الاقتصادي بتقدير متوسط الكسب في الإنتاجية في العام

الماضي لجميع المصانع في المجتمع. قدر المتوسط الإجمالي لتحسين

الإنتاجية هذا بـ 95% فترة ثقة.

ج- مستخدما طريقة شيفه، أوجد فترات الثقة للمقارنات التالية بـ 90%

معامل ثقة عائلي:

$$D_1 = \mu_3 - \mu_2 \quad D_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_1 \quad L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3$$

حلل نتائجك وقدم وصفا لاستنتاجاتك.

د - هل ستكون طريقة بونفيروني أكثر كفاءة من طريقة شيفه في الفقرة (ج)؟ أشرح.

(١٦-١٥) مسألة علاج إعاداج التأهيل (١٢-١٤).

أ - قتر المتضادة $(\mu_2 - \mu_1) - (\mu_3 - \mu_1) = L$ بـ 99% قوة ثقة. فسر تقدير الفترة هذا.

ب- قدر المقارنات التالية باستخدام طريقة بونفيروني بـ 95% معامل ثقة عاللي:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_1 - \mu_2 & D_3 &= \mu_2 - \mu_3 \\ D_2 &= \mu_1 - \mu_3 & L_1 &= D_1 - D_3 \end{aligned}$$

حلل نتائجك وقدم وصفا لاستنتاجاتك.

ج- هل ستكون طريقة شيفه أكثر كفاءة من طريقة بونفيروني في الفقرة (ب)؟ أشرح.

(١٧-١٥) بالرجوع إلى مسألة العروضي النقدية (١٣-١٤).

أ - قتر المتضادة $(\mu_2 - \mu_1) - (\mu_3 - \mu_1) = L$ بـ 99% قوة ثقة. فسر تقدير الفترة هذا.

ب- قدر المقارنات التالية بـ 90% معامل ثقة عاللي، مستخدما طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_2 - \mu_1 & D_3 &= \mu_3 - \mu_1 \\ D_2 &= \mu_3 - \mu_2 & L_1 &= D_2 - D_3 \end{aligned}$$

فسر نتائجك.

(١٨-١٥) بالرجوع إلى مسألة آلات التصنيع (١٤-١٤). اتيحت الآلات 1 و 2

جديدة منذ خمس سنوات، واتيحت الآلات 3 و 4 بعد تجديدها منذ خمس سنوات، بينما الآلات 5 و 6 اتيحت جديدة السنة الماضية.

أ - قتر المتضادة

$$\bar{L} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

بـ 95% قوة ثقة. فسر تقدير الفترة هذا.

ب- قُدِّر المقارنات التالية بـ 90% معامل ثقة عالٍ، استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_1 - \mu_2 & L_2 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2} \\ D_2 &= \mu_3 - \mu_4 & L_3 &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6}{4} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \\ D_3 &= \mu_5 - \mu_6 & L_4 &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{4} - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2} \\ L_1 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \end{aligned}$$

فسِّر نتائجك. ماذا يمكن للمستشار أن يتعلمه من هذه النتائج عن الفروق بين آلات التعبئة الست.

(١٩٠١٥) بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٥٠١٤). يقيم الوكيلان 1 و 2 بتوزيع البضائع، فقط، والوكيلان 3 و 4 يقومان بتوزيع قسائم ذات قيمة مالية ويقوم الوكيل 5 بتوزيع كل من البضائع والقسائم.
أ - قُدِّر المتضادة:

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

بـ 90% فترة ثقة، فسر تقدير الفترة هذا.

ب - قُدِّر المقارنات التالية بـ 90% معامل ثقة عالٍ. استخدم طريقة شيفه:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_1 - \mu_2 & L_2 &= \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} - \mu_5 \\ D_2 &= \mu_3 - \mu_4 & L_3 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \\ L_1 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_5 \end{aligned}$$

فسِّر نتائجك.

جـ- هل ستكون طريقة بوتنفوروني أكثر كفاءة من طريقة شيفه في الفقرة (ب)؟ أشرح.

د- من بين كل الجوائز التشجيعية، الموزعة، يقوم الوكيل 1 بتوزيع 25 في المئة منها، ويقوم الوكيل 2 بتوزيع 20 في المئة، ويقوم الوكيل 3 بتوزيع 20 في المئة، ويقوم الوكيل 4 بتوزيع 20 في المئة ويقوم الوكيل 5 بتوزيع 15 في المئة. قنر المتوسط الإجمالي للوقت المنصرم لتوزيع الجوائز بـ 90% فترة ثقة.

(٢٠-١٥) بالرجوع إلى مسائل تحسين الإنتاجية (١٠-١٤) و(٩-١٥).

أ - استخدم اختبار درجة واحدة من الحرية لتحديد ما إذا كان $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$ أم لا، اضبط المخاطرة α عند 0.05، واستخدم إحصاء الاختبار (15.37). اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب - اختر ما إذا كانت جميع أزواج متوسطات مستويات العوامل مختلفة أم لا، استخدم اختبارات ذات درجة حرية واحدة مبنية على طريقة توكي بـ $\alpha = 0.05$. شكل فئات من مستويات العامل التي لا تختلف متوسطاتها.

(٢١-١٥) بالرجوع إلى مسألة العروض التقليدية (١٣-١٤).

أ - استخدم اختبار ذو درجة واحدة من الحرية لتحديد ما إذا كان $\mu_5 - \mu_4 = \mu_6 - \mu_4$ أم لا، اضبط المخاطرة α عند 0.1. استخدم إحصاء الاختبار (15.38). اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب - لكل زوج من أزواج متوسطات العامل اختر ما إذا كان المتوسطان مختلفين أم لا، استخدم اختبارات ذات درجة حرية بناءً على طريقة توكي بـ $\alpha = 0.10$ ، شكّل مجموعات من مستويات العامل التي لا تختلف متوسطاتها.

(٢٢-١٥) بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٥-١٤).

أ - استخدم اختبار ذو درجة حرية واحدة لتحديد ما إذا كان $(\mu_3 + \mu_4)/2 = (\mu_1 + \mu_2)/2$ أم لا، اضبط المخاطرة α عند 0.10،

واستخدم إحصاءة الاختبار (15.37). أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب- لكل زوج من أزواج متوسطات العامل اختر ما إذا كان المتوسطان مختلفين أم لا، استخدم اختبارات ذات درجة حرية واحدة مبنية على طريقة توكي ب- 10. α ، شكّل فئات من مستويات العامل التي لا تختلف متوسطاتها.

(٢٣-١٥) بالرجوع إلى مسألة توكيز المحلول (٤-١٥). افترض أن المحلل يرغب في البداية باستخدام نموذج التحاين (14.2) لتحديد ما إذا كان تركيز المحلول يتأثر بمقدار الوقت الذي مضى منذ تجهيزه.

أ - أعرض نموذج تحليل التباين.

ب - جهز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقسّرة \bar{Y} . ماذا يقترح هذا الرسم حول العلاقة بين تركيز المحلول والوقت؟
ج - أوجد حلول تحليل التباين.

د - اختر ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا، استخدم مستوى معنوية 0.025. α ، أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

هـ - قم بمقارنات ثنائية لمتوسطات مستويات العامل بين جميع الفئات الزمنية المتجاورة، استخدم طريقة بوتشوروني ب- 95% معامل ثقة عالتي. هل تقترح نتائجك أن علاقة الانحدار غير خطية؟ وهل تتفق نتائجك مع تلك في الفقرة (ب)؟

(٢٤-١٥) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٤-١٢). طوّر أحد المتخصصين في الإحصاء الحيوي سلماً (تدرجياً) لحالة اللياقة البدنية كما يلي:

حالة اللياقة البدنية	قيمة السلم (التبريج)
تحت المتوسط	83
متوسط	100
فوق المتوسط	121

أ - باستخدام سلم حالة اللياقة البدنية، قم بتوفيق نموذج الانحدار من المرتبة الأولى (2.1) لحذر عدد الأيام اللازمة للعلاج Y على حالة اللياقة البدنية X .

ب - أوجد الرواسب وارسمها مقابل X هل يبدو أن نموذج الانحدار خطي يشكل توفيقاً للبيانات؟

ج - قم باختيار F لتحديد ما إذا كان هناك نقص في التوفيق لدالة انحدار خطية أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ ، أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د - هل يمكنك إجراء اختبار للنقص في توفيق دالة انحدار تربيعية هنا؟ اشرح.

(٢٥-١٥) بالرجوع إلى مسألة آلات التعبئة (١٤-١٤). اقترح مهندس صيانة أن الفروق في متوسطات التعبئة للآلات الست يرتبط إلى حد كبير بطول الوقت الذي مضى منذ أن تلقت الآلة آخر صيانة عامة وقد بينت تقارير الصيانة أن أطوال الأوقات (بالشهور) كانت كما يلي:

آلة التعبئة	عدد الشهور	آلة التعبئة	عدد الشهور
1	4	4	5.3
2	3.7	5	1.4
3	6.1	6	2.1

أ - قم بتوفيق نموذج انحدار كثرة حدود من الدرجة الثانية (9.1) وذلك لحذر الكمية المعبأة على عدد الشهور التي مضت منذ آخر صيانة عامة X .

ب - أوجد الرواسب وارسمها مقابل X . هل يبدو أن دالة الانحدار تربية توفيق البيانات؟

ج - قم باختبار F لتحديد ما إذا كان يوجد نقص في توفيق دالة الانحدار التربيعية، استخدم $\alpha = 0.01$ ، أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.
د - اعتبر ما إذا كان يمكن حذف الحد التربيعي في دالة الاستجابة من النموذج، استخدم $\alpha = 0.01$. أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

تمارين

(٢٦-١٥) أثبت أنه عندما يكون $r = 2$ و $n_1 = n$ ، فإن q المعرفة في (15.27) تكافئ $\frac{q}{\sqrt{2}}$ ، حيث q معرفة في (1.62).

(٢٧-١٥) أكمل استنباط (15.25) مبتدئاً بـ (15.30).

(٢٨-١٥) أثبت أنه عندما يكون $r = 2$ ، فإن χ^2 المعرفة في (15.34a) يكافئ $[k(1-\alpha/2; n-r)]^2$

(٢٩-١٥) ضع الفرضيات البديلة للاختبار (15.36) في هيئة مصفوفات $C\beta = 0$ كما في (8.66) وبين أن إحصاء الاختبار (8.71) تختزل إلى F^* المعرفة في (15.38).

مشاريع

(٣٠-١٥) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC والمشروع (٣٣-١٤). أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين المناطق الأربع، استخدم طريقة توكي بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك واعرض استنتاجاتك. جهّز رسم خط لتوسطات مستويات العامل المقدر وضع خطأ تحت جميع المقارنات غير المهمة.

(٣١-١٥) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SMSA والمشروع (٣٥-١٤). أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين المناطق الأربع، استخدم طريقة توكي بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك واعرض استنتاجاتك. جهّز رسم

عط المتوسطات مستويات مستويات العامل المقتررة وضع خطأ تحت جميع المقارنات غير المهمة.

(٣٢-١٥) بالرجوع إلى المشروع (٣٦-١٤)(د).

أ - من أجل كل تكرار، ضع فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات الثلاث، استخدم طريقة توكي بـ 95% معامل ثقة عاللي. ومن ثم حدد ما إذا كانت كل فترات الثقة للتكرار صحيحة إذا علمت أن $\mu_1 = 80$ و $\mu_2 = 60$ و $\mu_3 = 160$.

ب - ما هي النسبة من بين الـ 100 تكرارا التي تكون جميع فترات الثقة فيها صحيحة؟ هل هذه النسبة قريبة من التوقعات النظرية؟ ناقش.

تشخيصات وتدابير علاجية III

عند مناقشتنا لتحليل الانحدار، أكدنا على أهمية فحص مصداقية نموذج الانحدار للدراس، وأشرنا إلى فعالية رسوم الرواسب وتشخيص أخرى في استطلاع أي حيود كبير عن النموذج المبدي. وفحص للمصداقية لا يقل أهمية في تحليل التباين عنه في تحليل الانحدار. وستابع في هذا الفصل استخدام رسوم الرواسب لتشخيص صلاحية نماذج تحليل التباين، بالإضافة إلى اختبارات رسمية لتساوي تباينات الخطأ. ونناقش، أيضا، استخدام التحويلات كتدبير علاجي لتحسين مصداقية نموذج تحليل التباين، وستطرق إلى تأثير الحيدان عن نموذج التحاين على استقرائات التقدير والاختيار.

ولأسباب تربوية، كما في تحليل الانحدار، فقد ناقشنا طرق الاستقراء قبل مناقشة التدابير العلاجية والتشخيصية. ولكن بالطبع، فإن التسلسل الفعلي لتطوير واستخدام أي نموذج إحصائي هو بالعكس:

- ١- تفحص ماإذا كان النموذج المقترح مناسباً للبيانات التي لديك.
- ٢- إذا لم يكن النموذج المقترح مناسباً، فمُ بتدابير علاجية مثل تحويل البيانات أو تعديل النموذج.

٣- بعد مراجعة مصداقية النموذج واستكمال أية تدابير علاجية لازمة وتقييم فعاليتها، يمكن القيام باستقرائات تستند إلى النموذج.

من غير الضروري، ومن غير الممكن عادة، أن يكون نموذج التحاين ملائماً تماماً. وكما سنرى لاحقاً، فإن نماذج التحاين متبعة بشكل معقول ضد أنواع معينة من الحيود

عن النموذج، مثل كون حدود الخطأ غير موزعة تماماً وفق التوزيع الطبيعي ولذلك، فإن الهدف الرئيس لفحص مصداقية النموذج هو اكتشاف حيود جذري عن الشروط التي يفرضها النموذج.

(١٠-١٦) تحليل الرواسب

يمثل تحليل الرواسب في نماذج التحاين إلى حد بعيد ما يقابله من نماذج الانحدار. ولذلك، سنكتفي بمناقشة مختصرة لبعض النقاط الأساسية في استخدام تحليل الرواسب في نماذج التحاين.

الرواسب

لقد عرفنا الرواسب e_y لنموذج تحاين متوسطات الخلايا (14.2) في (14.17):

$$e_y = Y_y - \hat{Y}_y = Y_y - \bar{Y}_i \quad (16.1)$$

وكما في الانحدار فإن الرواسب المعيرة.

$$\frac{e_y}{\sqrt{MSE}} \quad (16.2)$$

مفيدة أحياناً. وفي أحيان أخرى، كما سنرى قريباً، تكون رواسب بديلة أخرى مفيدة مثل:

$$\frac{e_y}{s_i} \quad (16.3)$$

حيث s_i انحراف العينة المعياري للملاحظات المأخوذة عند المستوى i من مستويات العامل، كما عرفناه في (14.37).

رسوم الرواسب

تتضمن رسوم الرواسب المفيدة لنماذج تحليل التباين: (١) رسوم مقابل القيم التوفيقية، (٢) رسوم مقابل الزمن أو أي رسوم تسلسلية أخرى، (٣) رسوم نقطية و(٤) رسوم احتمال طبيعي. ولقد تطرقنا إلى جميع هذه الرسوم سابقاً. وسنوضح تطبيقاتها في تقويم مصداقية نماذج تحليل التباين عن طريق مثال.

مثال. يحوي الجدول (١٠-١٦) الرواسب لمثال مانع الصدأ في الفصل الخامس عشر.

ولتسهيل عملية العرض، فإن المعالجات موضحة في أعمدة الجدول. ولقد حصلنا على الرواسب من البيانات في الجدول (١٥-٢). وعلى سبيل المثال، فإن الراسب للوحدة التحريية الأولى التي عولجت بمناع الصدأ A هو:

$$e_{11} = Y_{11} - \hat{Y}_{11} = Y_{11} - \bar{Y}_L = 43.9 - 43.14 = .76$$

ويجوي الشكل (١٦-١) رسماً للرواسب مقابل القيم التوفيقية. ويختلف هذا الرسم الذي جُهِّز بواسطة برنامج الحاسب الآلي مينيئاب، في مظهره عن الرسوم المشابهة في تحليل الانحدار، وذلك لأن القيم التوفيقية \hat{Y}_i في نموذج التحاين تبقى نفسها لجميع المشاهدات الخاصة بمستوى عامل معطى. تذكر من (14.15) أن $\hat{Y}_i = \bar{Y}_i$.

ويجوي الشكل (١٦-١) ب على رسم نقطي للرواسب لكل مستوى عامل. وهذه الرسوم مشابهة لرسوم الرواسب مقابل القيم التوفيقية في (١٦-١) أ، فيما عدا أن محور الرواسب هنا هو المحور الأفقي، ومن فوائد رسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية في الشكل (١٦-١) أ تسهيل تقويم العلاقة بين مقادير تباينات الخطأ ومتوسطات مستويات العامل - ومن مساوئه أنه قد تكون بعض متوسطات مستويات العامل بعيدة بعضها عن بعض مما قد يجعل مقارنة مستويات العامل أكثر صعوبة. وقد عولجت هذه الصعوبة في الشكل (١٦-١) ب إذ أمكن وضع الرسوم النقطية قريبة بعضها من بعض مما سهل المقارنة بين مستويات العامل.

ويجوي الشكل (١٦-١) ج رسم احتمال طبعي للرواسب. وهذا الرسم هو بالضبط الرسم نفسه الذي رأيناه في نماذج الانحدار.

لم نقدم أي رسوم تسلسلية للرواسب هنا، وذلك لأن بيانات مثال مانع الصدأ لم ترتب وفقاً للزمن أو وفق تسلسل منطقي آخر.

وكما سنرى تقرّح جميع الرسوم في الشكل (١٦-١)، أن نموذج التحاين مناسب لبيانات مانع الصدأ.

جدول (١-١٦) الرواسب لثال مانع الصدا

الصف				
<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>j</i>
<i>i</i> = 4	<i>i</i> = 3	<i>i</i> = 2	<i>i</i> = 1	
-4.27	.45	.36	.76	1
4.73	1.35	-2.34	-4.14	2
.23	.55	3.26	3.56	3
.03	-1.55	1.16	.66	4
-1.17	2.05	-1.74	1.06	5
-.17	.15	2.96	4.56	6
2.73	2.65	-3.34	.46	7
-1.77	-2.75	-1.34	-4.24	8
.43	-4.15	1.36	.46	9
-.77	1.25	-.34	-3.14	10

تشخيص الحيود عن نموذج التحاين

سنناقش الآن كيف يمكن أن تكون رسوم الرواسب مفيدة في تشخيص حالات

الحيود التالية عن نموذج التحاين (14.2):

- ١- عدم ثبات تباين الخطأ.
- ٢- عدم استقلالية حدود الخطأ.
- ٣- القاصيات.
- ٤- حذف متغيرات مستقلة مهمة.
- ٥- عدم طبيعية حدود الخطأ.

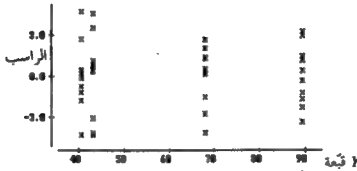
عدم ثبات تباين الخطأ. يتطلب نموذج التحاين (14.2) أن يكون لحدود الخطأ σ^2 تباين ثابت لكل مستويات العامل. وأفضل طريقة للدراسة ملائمة هذا الفرض عندما لا تكون أحجور العينات كبيرة جداً هي عن طريق رسوم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية، أو من الرسوم التغطية للرواسب. وعندما يكون تباين الخطأ ثابتاً، يجب أن تبين رسوم الرواسب القدر نفسه من تبعثر الرواسب حول الصفر، وذلك لكل مستوى عامل. وهذا ما حصل في مثال مانع الصدا في الشكل (١-١٦) أ و (١-١٦) ب.

ويبين الشكل (٢-١٦) نموذج لرسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية عندما

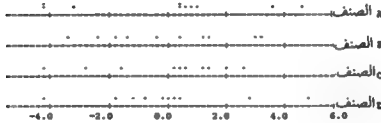
لا يكون لحدود الخطأ تباين ثابت. ويصور هذا الرسم حالة تكون فيها لحدود الخطأ للمستوى الثالث للعامل تباين أكبر من تباين حدود الخطأ لمستوي العامل الآخرين.

شكل (١٦-١) رسوم رواسب تشخيصية - مثال مانع الصفا

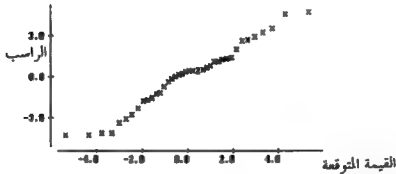
(أ) رسم الرواسب مقابل \bar{Y}



(ب) رسوم رواسب نقطية



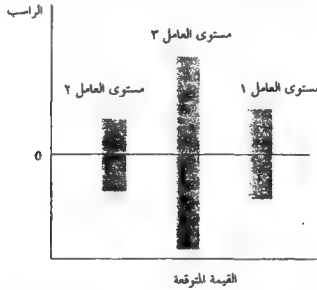
(ج) رسم احتمال طبيعي



وعندما تكون أحجام العينات لمستويات العامل المختلفة كبيرة، فإن رسم المدرج التكراري للرواسب لكل معالجة - بحيث ترتب عموديا ويستخدم سلم القياس نفسه،

مثل الرسم النقطي في الشكل (١-١٦) ب — تعتبر طريقة فعّالة لفحص ثبات تباين حدود الخطأ، بالإضافة إلى تقويم ما إذا كانت حدود الخطأ موزعة طبيعياً. ولقد تم تطوير العديد من الاختبارات الإحصائية لفحص تساوي σ من التباينات بشكل رسمي، وستناقش اثنين من هذه الاختبارات في الفقرة (٢-١٦).

شكل (٢-١٦) نموذج لرسم موابس مقابل القيم المترقمة عندما لا يكون لحدود الخطأ تباين ثابت لكل مستويات العامل

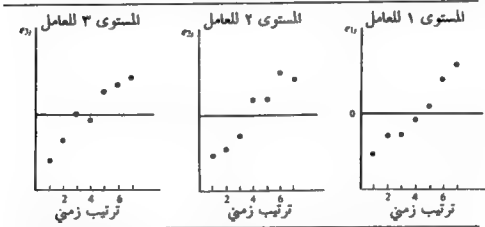


عدم استقلالية حدود الخطأ. ينبغي القيام برسم تسلسلي للرواسب، حيثما كانت البيانات مجموعة وفق تسلسل زمني، وذلك لفحص ما إذا كانت حدود الخطأ مرتبطة ارتباطاً تسلسلياً. ويجري الشكل (٣-١٦) الرواسب لتحجرة تتناول تفاعل مجموعات. وقد تم تطبيق ثلاث معالجات مختلفة، وسُجل تفاعل المجموعات على أشرطة فيديو. وكُررت كل معالجة سبع مرات. وقاس المنحرف بعد ذلك عدد التفاعلات من خلال عرض الأشرطة وفق ترتيب عشوائي. ويقترح الشكل (٣-١٦) بشكل قوي أن المنحرف بدأ بتبين عدداً أكبر من التفاعلات مع اكتسابه للمزيد من الخبرة من مشاهدة الأشرطة، وكنتيجة لذلك، فإن الرواسب في الشكل (٣-١٦) تبدو مرتبطة تسلسلياً. وفي هذه

الحالة، فإن إضافة حد خطي إلى النموذج يمثل تأثير الزمن، قد يكون كافياً لضمان استقلالية حدود الخطأ في النموذج المعدل.

وقد تؤدي التأثيرات المتصلة بالزمن إلى زيادة أو تخفيض تباين الخطأ مع الزمن. فعلى سبيل المثال، يمكن تجرب أن يأخذ قياسات أكثر دقة مع مرور الزمن. ويصور الشكل (١٦-٤) رسوماً تسلسلية للرواسب بحيث يتناقص تباين الخطأ مع مرور الزمن.

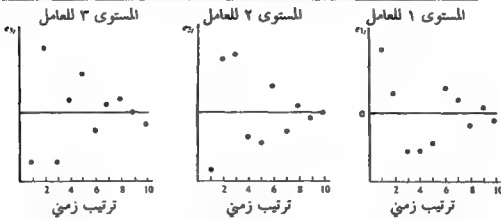
شكل (١٦-٣) رسوم تسلسلية للرواسب للدراسة تفاعل المجموعات توضح التأثير المتصل بالزمن



وعندما تكون البيانات مرتبة وفق تسلسل منطقي آخر كتسلسل جغرافي مثلاً، فإن رسم الرواسب مقابل هذا الترتيب يساعد على التحقق من كون حدود الخطأ مرتبطة تسلسلياً وفق ذلك الترتيب أم لا.

قيم قاصية. مما يسهل اكتشاف القيم القاصية استخدام رسوم الرواسب مقابل القيم التوفيقية، والرسوم النقطية للرواسب ورسوم الصلوق، ورسوم الجذع والورقة. وتبين هذه الرسوم بسهولة أي مشاهدة قاصية، أي المشاهدة التي تختلف عن قيمتها التوفيقية اختلافاً أكبر بكثير من بقية المشاهدات. ومن الحكمة، كما ذكرنا في الفصل الرابع، فإنه من الحكمة نذ المشاهدات القاصية، فقط، في حالة كونها نتيجة لأسباب محددة مثل سوء استخدام الأجهزة أو خطأ فاضح في قياسات المشاهد، أو خطأ في التسجيل.

شكل (٥-١٦) رسوم تسلسلية للرواسب توضح تناقص تباين الخطأ مع مرور الزمن



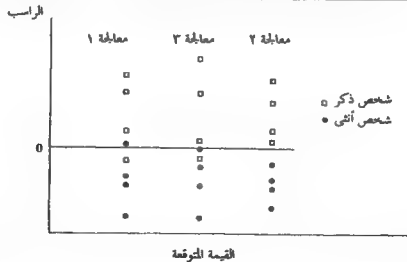
حذف متغيرات مستقلة مهمة. يمكن، أيضاً، استخدام تحليل الرواسب لدراسة ما إذا كان نموذج التباين وحيد العامل نموذجاً ملائماً. ففي تجربة للتعليم تتضمن ثلاث معالجات حوافز، حصلنا على الرواسب الموضحة في الشكل (٥-١٦). ولا يفصح رسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية في الشكل (٥-١٦) بصورة إجمالية عن أي غطية غير عادية. ومع ذلك، تساءل المجرّب ما إذا كانت تأثيرات المعالجات تختلف وفقاً لجنس الشخص. ويوضح الشكل (٥-١٦) رواسب الذكور بمربع، بينما يوضح رواسب الإناث بنقطة. ومن النتائج في شكل (٥-١٦) يتضح بقوة أن تأثير المعالجات يختلف وفقاً للجنس وذلك من أجل كسلي من معالجات الحوافز المدروسة. وبالتالي، سيكون من المفيد أكثر أن نستخدم نموذجاً متعدد العوامل يميز كلاً من المعالجة المخفزة والجنس كمُتغيرين مستقلين.

و نلاحظ أن تحليل الرواسب هنا لا يرفض النموذج وحيد العامل الأصلي. ولكن تحليل الرواسب يشير إلى أن النموذج الأصلي يتجاهل فروقا في تأثيرات المعالجات ربما يكون من المهم ملاحظتها. وبما أن هناك في العادة العديد من المتغيرات المستقلة التي يكون لها بعض التأثير على المتغير التابع، فعلى المحلل أن يتناول في تحليل الرواسب تلك المتغيرات المستقلة التي يكون لها على الأرجح تأثير مهم على المتغير التابع.

حدود خطأ غير طبيعية. يمكن دراسة عدم طبيعية حدود الخطأ من المدرجات التكرارية ورسوم النقط ورسوم الصندوق ورسوم الاحتمال الطبيعي للرواسب. وبالإضافة إلى ذلك، يمكن القيام بمقارنة التكرارات الملحوظة مع التكرارات المتوقعة لو كانت الرواسب تتبع التوزيع الطبيعي، وعندما يمكن القيام باختبارات كاي مربع لجودة التوفيق، أو أية اختبارات مشابهة. والمناقشة في الفصل الرابع حول هذه الطرق الخاصة بتقويم طبيعة حدود الخطأ قابلة للتطبيق هنا تماماً.

وعندما تكون أحجام العينات لمستويات العامل كبيرة، فيمكن دراسة خاصية الطبيعية لكل معالجة على حدة. أما عندما تكون أحجام العينات لمستويات العامل صغيرة، فيمكن للمرء أن يضم الرواسب e لجميع المعالجات في مجموعة واحدة، شريطة أن يكون هناك دليل واضح على عدم وجود فروق في تباينات الخطأ للمعالجات المدروسة. ولقد فعلنا هذا في مثال مانع الصدأ في الشكل (١٦-١) جـ. حيث لا يبين هذا الشكل أي حدود كبير عن فرض الطبيعية، والنمط الذي تتبعه النقاط هو نمط خطي إلى حد مقبول. باستثناء ما كان منها في الذيلين - ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية هو 0.987. مما يدعم، أيضاً، معقولية فرض الطبيعية.

شكل (١٦-٥) رسم للرواسب مقابل القيم التوافقية موضحاً حذف مطور مستقل مهم



وعندما تكون أحجام العينات لمستويات العامل صغيرة، ويتوفر دليل على أن تباينات حدود الخطأ لمستويات العامل المختلفة غير متساوية، فينفي استخدام الرواسب المعيرة (16.3) قبل ضم جميع الرواسب لدراسة طبيعتها، وإلا فقد يكون هناك ما يشير إلى دليل على عدم طبيعية الرواسب، لا شيء إلا لأن تباينات حدود الخطأ غير متساوية.

ملاحظة

كما أشرنا في نماذج الانحدار، فإن الرواسب e_i ليست متغيرات عشوائية مستقلة، وهي في نموذج التحاين (14.2) خاضعة للقيود المذكورة في (14.18). وتبعاً لذلك فإن الاختبارات الإحصائية التي تتطلب أن تكون المشاهدات مستقلة لن تكون صالحة تماماً للرواسب. ولكن، على أية حال، لو كان عدد الرواسب لكل مستوى عامل غير صغير فسيكون تأثير الارتباطات بسيطاً. ولقد ذكرنا سابقاً أن الرسوم البيانية للرواسب أقل خضوعاً لتأثيرات الارتباط من الاختبارات الإحصائية، ذلك لأن الرسوم البيانية تتضمن الرواسب بمفردها ولا تتضمن دوال في الرواسب.

(٢٠١٦) اختبارات لتساوي التباينات

تتوفر عدة اختبارات رسمية لدراسة ما إذا كان r من المجتمعات تباينات متساوية أم لا، وهذا مما يتطلبه نموذج التحاين. وستدرس اثنين من هذه الاختبارات هما: اختبار بارتل و اختبار هارتلي. ويفترض كلاهما أن كلا من المجتمعات r طبيعية. ويفترض كل من الاختبارين، أيضاً، أن لدينا عينات عشوائية مستقلة من كل مجتمع. واختبار بارتل هو اختبار متعدد الأغراض ويمكن استخدامه سواء كانت أحجام العينات متساوية أم غير متساوية، بينما يُطبق اختبار هارتلي عندما تكون أحجام العينات متساوية، وهو مصمم بحيث يكون حساساً ضد فروق كبيرة بين أكبر وأصغر تباينين من تباينات المجتمعات.

اختبار بارتل (Bartlett)

الفكرة الأساسية لاختبار بارتل بسيطة. لتكن s_1^2, \dots, s_r^2 تباينات عينة من r من المجتمعات الطبيعية، ولتكن df_i درجات الحرية المرتبطة بتباين العينة s_i^2 . فالتوسط

الحسابي المرجح لتباينات العينات، مستخدمين درجات الحرية المصاحبة df كأوزان. هو متوسط مربعات الخطأ:

$$MSE = \frac{1}{df_T} \sum_{i=1}^r df_i s_i^2 \quad (16.4)$$

حيث:

$$df_T = \sum_{i=1}^r df_i \quad (16.4a)$$

وبطريقة مشابهة، فإن الوسط الهندسي للتباينات s_i^2 ونرمز له بـ $GMSE$ هو:

$$GMSE = \left[(s_1^2)^{df_1} (s_2^2)^{df_2} \dots (s_r^2)^{df_r} \right]^{1/df_T} \quad (16.5)$$

و يمكن إثبات أنه لأي مجموعة معطاة من قيم s_i^2 ، تصح العلاقة التالية بين هذين

المتوسطين:

$$GMSE \leq MSE \quad (16.6)$$

ويكون هذان المتوسطان متساويين عندما تكون الـ s_i^2 جميعها متساوية، وكلما زاد تشتت الـ s_i^2 فيما بينها، كلما تباعد هذان المتوسطان إحداهما عن الآخر. وبالتالي إذا كانت النسبة $MSE/GMSE$ قريبة من 1، فهذا دليل على أن تباينات المجتمعات متساوية. بينما إذا كانت النسبة $MSE/GMSE$ كبيرة، فهذا مؤشر إلى أن تباينات المجتمعات غير متساوية. وسنحصل على الاستنتاجات نفسها لو أننا اعتبرنا:

$$\log GMSE - \log (MSE / GMSE) = \log MSE$$

وقد بين بارتلت أن دالة في $\log GMSE - \log MSE$ في حالة حجوم كبرى

للعينات، ستبقي تقريبا توزيع χ^2 بـ 1- r من درجات الحرية، وذلك عند تساوي تباينات المجتمعات. وإحصاء الاختبار هي:

$$B = \frac{df_T}{C} (\log_e MSE - \log_e GMSE) \quad (16.7)$$

حيث

$$C = 1 + \frac{1}{3(r-1)} \left[\left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{df_i} \right) - \frac{1}{df_T} \right] \quad (16.7a)$$

ويكون الحد C دائما أكبر من 1.

ونختزل إحصاء الاختبار (16.7) إلى:

$$B = \frac{1}{C} \left[(df_T) \log_e MSE - \sum_{i=1}^r (df_i) \log_e s_i^2 \right] \quad (16.8)$$

وللتقرير بين:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2 \quad (16.9a)$$

ليست جميع σ_i^2 متساوية: H_a

نحسب إحصاء الاختبار B . وبما أن B تتوزع تقريبا وفق χ^2 بـ $r - 1$ درجة حرية عندما تكون H_0 صحيحة. وأن القيم الكبيرة لـ B ، كما رأينا، تؤدي إلى استنتاج H_a ، وقاعدة القرار المناسبة التي تضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند القيمة α هي:

$$\text{إذا كان } B \leq \chi^2_{(1-\alpha, r-1)} \text{ استنتج } H_0 \quad (16.9b)$$

$$\text{إذا كان } B > \chi^2_{(1-\alpha, r-1)} \text{ استنتج } H_a$$

حيث $\chi^2_{(1-\alpha, r-1)}$ هو المئين $100(1 - \alpha)$ لتوزيع χ^2 بـ $r - 1$ ، درجة حرية. ويعطي الجدول A.3 معينات لتوزيع χ^2 . ويمكن اعتبار التقريب χ^2 مناسبا عندما تبلغ جميع درجات الحرية df_i أربعة أو أكثر. وعند استخدام اختبار بارتل في نموذج تحليل التباين وحيد العامل (14.2)، يكون:

$$df_i = n_i - 1 \quad df_T = \sum_{i=1}^r (n_i - 1) = n_T - r$$

مثال. يحوي الجدول (٢-١٦) بيانات عن الوقت اللازم لإكمال عملية إنتاج معينة في كل فترة من فترات العمل الثلاث في مصنع ما. وتُفذت العملية وفق فترة العمل 1 عشرين مرة. ووفق الفترة الثانية 17 مرة، ووفق الفترة الثالثة 21 مرة. وتم التحقق من أن توزيع المجتمعات الثلاث قريب من التوزيع الطبيعي. ونرغب الآن في استخدام اختبار بارتل لتحديد ماإذا كانت تباينات فترات العمل σ_i^2 هي نفسها للفترة الثلاث أم لا.

ويوضح الجدول (٢-١٦) الحسابات اللازمة لاختبار بارتل. وبحساب C من (16.7a) و B من (16.8) نحصل على:

$$C = 1 + \frac{1}{3(3-1)} \left[\left(\frac{1}{19} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} \right) - \frac{1}{55} \right] = 1.02449$$

و:

$$B = \frac{1}{1.02449} [55(6.18631) - 338.32164] = \frac{192541}{1.02449} = 18794$$

نفرض أننا نريد ضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند $\alpha = 0.05$ ، فسنحتاج عندئذ لـ $(1-0.95; 3-1)$ χ^2 ونجد من الجدول A.3 أن $(1-0.95; 3-1)$ χ^2 وبذلك تكون قاعدة القرار كما يلي:

إذا كان $B \leq 5.99$ استنتج H_0

إذا كان $B > 5.99$ استنتج H_a

وبما أن $B = 1.88 \leq 5.99$ نستنتج H_0 أي أن تباينات المجتمعات الثلاثة متساوية.

والقيمة P - للاختبار هي $= P\{\chi^2(2) > 1.8794\} = 0.39$.

جدول (٧-١٦) الحسابات اللازمة لاختبار بارلت لتساوي تباينات المجتمعات الثلاثة

مجموع i	s_i^2	$df_i = n_i - 1$	$(df_i)s_i^2$	$\log_e s_i^2$	$(df_i) \log_e s_i^2$
1	415	19	7,885	6.02828	114.53732
2	698	16	11,168	6.54822	104.77152
3	384	20	7,680	5.95064	119.01280
المجموع		$df_T = 55$	26,733		338.32164
$MSE = 26,733 \div 55 = 486.05$					
$\log_e MSE = 6.18631$					

ملاحظة

في المثال السابق، كان بإمكاننا تجنب حساب المقام C . فحتى قبل القسمة على C يمكن رؤية أن البسط في إحصاء الاختبار 1.92541 ، يقع تحت القيمة المخرجة 5.99 . وبما أن $C > 1$ دائماً فإن تأثير القسمة على C هو أن يجعل إحصاء الاختبار B أصغر. وهكذا يمكن للمرء حساب البسط في B أولاً، وبحسب المقام C ، فقط، في حالة أن بإمكانه التأثير على الناتج.

تحويل بوكس Box . كما ذكرنا سابقاً، ينبغي عدم استخدام كاي مربع كتقريب لتوزيع إحصاء اختبار بارلت (16.7) تحت فرض تساوي تباينات المجتمع إذا كان أي

من درجات الحرية أقل من أربعة. ويمكن استخدام تقريب طوره بوكس عندما تكون بعض درجات الحرية df صغيرة وهو كذلك مناسب لأعداد أكبر من درجات الحرية. وهذا التقريب يستخدم التوزيع F . ومبني على إحصاءة اختبار بارقليت المعدلة B' :

$$B' = \frac{f_2 BC}{f_1 (A - BC)} \quad (16.10)$$

حيث:

$$f_1 = r - 1 \quad (16.40a)$$

$$f_2 = \frac{r+1}{(C-1)^2} \quad (16.10b)$$

$$A = \frac{f_2}{2 - C + \frac{2}{f_2}} \quad (16.10c)$$

ولاختبار الفرضيات البديلة في (16.9a)، تكون قاعدة القرار المناسبة لضبط عفاطرة الخطأ من النوع I عند α هي:

$$H_0: B' \leq F(1 - \alpha; f_1, f_2) \quad \text{إذا كان} \quad (16.11)$$

$$H_a: B' > F(1 - \alpha; f_1, f_2) \quad \text{إذا كان}$$

حيث $F(1 - \alpha; f_1, f_2)$ هو المئين 100(1 - α) للتوزيع F بدرجات حرية f_1 و f_2 . ويعطي الجدول A.4 معينات التوزيع F . وسوف لا تكون قيمة f_2 في العادة، عددا صحيحا مما يستوجب القيام باستيفاء في الجدول F . وكما يوضح المثال التالي ينبغي استخدام الاستيفاء العكسي.

مثال. سنستخدم مرة أخرى المثال في الجدول (٢-١٦). فقد وجدنا سابقا:

$$C = 1.02449 \quad B = 1.8794$$

ونحتاج الآن لـ:

$$f_1 = 3 - 1 = 2$$

$$f_2 = \frac{3+1}{(1.02449-1.0)^2} = 6,669.3$$

$$A = \frac{6,669.3}{2 - 1.02449 + \frac{2}{6,669.3}} = 6,834.63$$

$$B' = \frac{6,669.3(1.8794)(1.02449)}{2[6,834.63 - 1.8794(1.02449)]} = .94$$

ولضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$ ، نحتاج لقيمة $F(.95; 2, 6; 669.3)$.

ومن الجدول A.4 نجد أن:

$$F(.95; 2, 120) = 3.07 \quad F(.95; 2, \infty) = 3.00$$

والاستيفاء العكسي مشابه للاستيفاء الخطي فيما عدا أننا نستخدم القيم المعكوسة

لتحديد الكسر من الفرق بين 3.00 و 3.07 وذلك كما يلي:

$$F(.95; 2; 6,669.3) = 3.07 + \frac{\frac{1}{6,669.3} - \frac{1}{120}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{120}} (3.00 - 3.07) = 3.001$$

وبالتالي تكون قاعدة القرار:

$$H_0 \text{ استتج } B' \leq 3.001 \text{ كان}$$

$$H_a \text{ استتج } B' > 3.001 \text{ كان}$$

وعا أن $3.001 \leq .94 = B'$ ، فنستج H_0 ، أي أن تباينات المجتمعات الثلاثة

متساوية. وهذا هو القرار نفسه الذي حصلنا عليه من إحصاءة اختبار بارتلليت والتقريب

كاي مربع والقيمة p - لاختبار بارتلليت المعدل هي $.39 = p\{F(2, 6,669.3) > .94\}$ وهي

القيمة نفسها التي حصلنا عليها من إحصاءة اختبار بارتلليت وكاي مربع التقريبي.

تعليقات

١- اختبار بارتلليت حساس تماماً لأي حيود عن شروط الطبيعية، بمعنى أنه إذا كانت

المجتمعات في الواقع غير طبيعية، فإن مستوى المعنوية الفعلي يمكن أن يختلف بشكل

كبير عن المستوى المحدد. وبالتالي إذا كانت المجتمعات تمجد بشكل كبير عن الطبيعية،

فإنه لا يوصى باستخدام اختبار بارتلليت لاختبار تساوي التباينات. وبدلاً عنه ينبغي

استخدام اختبار لامعلمي متيج. ويذكر المرجع (16.2) علينا من هذه الاختبارات.

٢- إن اختبار F لتساوي متوسطات مستويات مستويات عامل، وكما سنرى من الفقرة

(١٦-٤)، لا يتأثر كثيرا بعدم تساوي التباينات عندما تكون أحجام العينات في مستويات العامل متساوية تقريبا، وذلك طالما كانت الفروق بين التباينات غير كبيرة بشكل غير اعتيادي. ولذلك إذا كانت المجتمعات طبيعية بشكل معقول وبحيث يمكن استخدام اختبار بارتل وت كانت أحجام العينات لا تختلف اختلافا شديدا، فإن استخدام قيمة صغرة لمستوى المعنوية α هو أمر مبرر، عند اختبار تساوي التباينات لغرض تحديد مصداقية نموذج تحاين طالما أنه بهمنا، فقط، اكتشاف الفروق الكبيرة بين التباينات.

اختبار هارتلي

إذا كان لكل من تباينات العينة s_i^2 وعدتها r العدد نفسه من درجات الحرية أي $df_i = df = df$ ، فهناك اختبار بسيط يُعزى لهارتلي للتقرير فيما بين:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2 \quad (16.12)$$

ليست جميع σ_i^2 متساوية: H_a

وهذا الاختبار يعتمد بشكل تام على أكبر تباين عينة ونرمز له بـ $\max(s_i^2)$ وأصغر تباين عينة ونرمز له بـ $\min(s_i^2)$ وتكون إحصاءة الاختبار:

$$H = \frac{\max(s_i^2)}{\min(s_i^2)} \quad (16.13)$$

ومن الواضح أن قيم H القريبة من 1 تدعم H_0 ، بينما قيم H الكبيرة تدعم H_a . ولقد تمت جدولة توزيع H عندما تكون H_0 صحيحة، ويعطى الجدول أ-١٢ بعض مئينات مختارة لتوزيع H . ويعتمد توزيع H على عدد المجتمعات r ، وعدد درجات الحرية المشترك df . وكما ذكرنا سابقا، فإن اختبار هارتلي، تماما مثل اختبار بارتل، يفترض أن المجتمعات طبيعية.

وتكون قاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$\text{إذا كان } H \leq H(1 - \alpha, r, df) \text{ استتج } H_0 \quad (16.14)$$

$$\text{إذا كان } H > H(1 - \alpha, r, df) \text{ استتج } H_a$$

حيث $H(1 - \alpha, r, df)$ هو المئين 100(1 - α) لتوزيع H عندما تكون H_0 صحيحة لـ r

من المجتمعات ودرجات حرية df لكل تباين عينة.

وعندما يُستخدم اختبار هارتلي في نموذج التحاين وحيد العامل (14.2) مع أحجام عينة متساوية $n_i = n$ يكون $df = n - 1$.

مثال. في دراسة لجاذبية أربعة أنواع من اعلانات التلفاز التجارية، جُمعت 10 مشاهدات لكل إعلان، وكانت تباينات العينات كما يلي:

$$s_1^2 = 293 \quad s_2^2 = 146 \quad s_3^2 = 985 \quad s_4^2 = 528$$

وقبل الشروع في تحليل التباين، فقد تقرر أن كل المجتمعات قرية من الطبيعية مما يسمح باستخدام اختبار هارتلي للتحقق مما إذا كانت تباينات المعالجات الأربع متساوية أم لا:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \sigma_i^2 \text{ متساوية}$$

ويضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$ وللقيم $r = 4$ و $n - 1 = 9$ نحتاج من الجدول A.12 للقيمة $6.31 = H(95; 4, 9)$. وبالتالي تكون قاعدة القرار المناسبة:

$$\text{إذا كان } H \leq 6.31 \text{ استتج } H_0$$

$$\text{إذا كان } H > 6.31 \text{ استتج } H_a$$

ولدينا $\max(s_i^2) = 985$ و $\min(s_i^2) = 146$ وبالتالي:

$$H = \frac{985}{146} = 6.75$$

وبما أن $6.75 > 6.31 = H$ ، فستتج H_a ، أي أن تباينات المعالجات الأربع غير متساوية.

تعليقات

١- يتطلب اختبار هارتلي أن تكون أحجام العينات متساوية. أما إذا كانت أحجام العينات غير متساوية ولكنها لا تختلف بشكل كبير فلا يزال بالإمكان استخدام اختبار هارتلي كاختبار تقريبي. ولهذا الغرض يُستخدم متوسط عدد درجات الحرية لدخول الجدول A.12.

- ٢- اختبار هارتلي، مثله مثل اختبار بارتل، بالغ الحساسية للحدود عن فرض طبيعية المجتمعات ويجب عدم استخدامه في حالة وجود كبيرة عن هذا الفرض.
- ٣- يمكن تبرير استخدام قيم صغيرة لمستوى المعنوية α عند استخدام اختبار هارتلي لتحديد مصداقية نموذج تخمين بالنسبة لتساوي تباينات المعاملات، وللأسباب نفسها التي ذكرت في اختبار بارتل.

(٣-١٦) تحويلات

عندما تشير رسوم الرواسب أو أية تشخيصات أخرى إلى أن نموذج تخمين غير ملائم للبيانات التي لدينا، فهناك عدد من الإجراءات التصحيحية التي يمكن أن نختار منها. وأحدها هو تعديل النموذج، ومن مساوئ هذا الأسلوب أنه قد يؤدي أحيانا إلى تحليل معقد نوعا ما. والأسلوب الآخر هو استخدام تحويلات على البيانات، والأسلوب الثالث المفيد عندما تكون الصعوبة الأساسية هي الحدود الكبير عن الطبيعية هو استخدام اختبارات لامعلمية كاختبار الوسيط أو اختبار كروسكال واليس المبني على الرتب (سيقاش في الفصل ١٧).

و استخدام التحويلات هو الموضوع الأساس في هذه الفقرة. وما أننا ناقشنا التحويلات في الفصل الرابع في تحليل الانحدار، فإن مناقشتنا له هنا ستكون موجزة.

تحويلات لتثبيت التباينات

يوجد العديد من الحالات التي تكون فيها تباينات حدود الخطأ غير ثابتة، وكل من هذه الحالات يتطلب تحويلا مختلفا لتثبيت التباين.

التباين متناسب مع μ . عندما يتغير تباين حدود الخطأ، لأي مستوى عامل، (ويُرمز له بـ σ^2) بشكل متناسب مع متوسط مستوى العامل μ فستتحو إحصاءات العينة $\bar{y}_i/\sqrt{1}$ إلى أن تكون ثابتة. حيث \bar{y}_i هو تباين العينة لملاحظات المستوى i للعامل، كما عُرف في (14.37). وتعرض لمثل هذه الحالة، غالبا، عندما يكون المتغير المشاهد y هو عملية تعداد أو عدد، مثل عدد المحاولات لشخص ما قبل أن يحصل على الحل الصحيح. وفي مثل هذه الحالة يكون تحويل الجذر التربيعي مفيدا لتثبيت التباينات:

إذا كان σ_i^2 يتناسب مع μ_i :

$$Y' = \sqrt{Y} \quad \text{أو} \quad Y' = \sqrt{Y+1} \quad (16.15)$$

الانحراف المعياري متناسب مع μ_i . عندما يكون الانحراف المعياري لحدود الخطأ لأي مستوى عامل متناسباً مع المتوسط، تنحوي إحصاءات العينة s_i / \bar{Y}_i إلى أن تكون ثابتة. وفي هذه الحالة، فإن التحويل المقيد لثبیت التباينات هو التحويل اللوغاريتمي:

$$Y' = \log Y \quad \text{إذا كان } \sigma_i^2 \text{ متناسباً مع } \mu_i \quad (16.16)$$

الانحراف المعياري متناسب مع μ_i^2 . عندما يكون الانحراف المعياري لحد الخطأ متناسباً مع مربع متوسط مستوى العامل، ينحوي s_i / \bar{Y}_i^2 إلى أن يكون ثابتاً. وفي هذه الحالة، فإن التحويل الملائم هو تحويل المقلوب:

$$Y' = 1 / Y \quad \text{إذا كان } \sigma_i^2 \text{ متناسباً مع } \mu_i^2 \quad (16.17)$$

المغير التابع نسبة. يكون المغير المشاهد Y_i أحياناً، عبارة عن نسبة. فعلى سبيل المثال، قد تكون المعالجات طرق تدريب مختلفة ووحدة المشاهدة فصل تدريب في الشركة، والمغير المشاهد Y_i هو نسبة المستعملين من الفصل i لطريقة التدريب i الذين انتفعوا بشكل كبير من التدريب. لاحظ هنا أن n_i تعني عدد الفصول التي تلقت طريقة التدريب i وليس عدد الطلاب.

ومن المعروف تماماً أنه في حالة ذي الحدين، يعتمد تباين نسبة العينة على النسبة الحقيقية. وعندما يبقى عدد الحالات الذي تبنى عليه كل نسبة عينة بدون تغيير، فإن التباين يكون.

$$\sigma^2(p_i) = \frac{\pi_i(1-\pi_i)}{m} \quad (16.18)$$

حيث تدل π_i على نسبة المجتمع للمعالجة i و m هو عدد الحالات المشترك الذي تبنى عليه كل نسبة عينة، وبما أن $\sigma^2(p_i)$ يعتمد على نسبة المعالجة π_i ، فإن تباينات حدود الخطأ لا تكون ثابتة إذا كانت النسب π_i مختلفة. والتحويل الملائم في هذه الحالة هو تحويل قوس الجيب:

$$Y' = 2 \arcsin \sqrt{Y} \quad \text{إذا كانت للمشاهدة نسبة:} \quad (16.19)$$

وعندما يتنى النسب p على أعداد مختلفة من الحالات (مثلاً، في مثالنا التوضيحي السابق). قد توجد أعداد مختلفة من المستخدمين في كل فصل تدريبي، فينبغي استخدام التحويل (16.19) بالإضافة إلى تحليل المربعات الدنيا المرجحة كما وُصفت في الفقرة (٨-١١).

مثال. دل إختبار هارتلي، في مثال الاعلانات التجارية، على أن تباينات الخطأ للإعلانات الأربعة غير متساوية. ولمعرفة التحويل الأفضل لتثبيت التباينات، نحتاج لفحص العلاقة بين تباينات العينة s_i^2 ومتوسطات مستويات العامل المقدر \bar{Y}_i والبيانات بعد تلخيصها (لم تعط المشاهدات الأصلية) هي:

4	3	2	1	i
528	985	146	293	s_i^2
117.4	211.8	31.9	65.2	\bar{Y}_i

ونحسب الآن النسب s_i^2 / \bar{Y}_i و s_i / \bar{Y}_i و s_i / \bar{Y}_i^2 ، والنتائج كما يلي:

$\frac{s_i}{\bar{Y}_i^2}$	$\frac{s_i}{\bar{Y}_i}$	$\frac{s_i^2}{\bar{Y}_i}$	i
.0040	.26	4.5	1
.0119	.38	4.6	2
.0007	.15	4.7	3
.0017	.20	4.5	4

ويبدو أن العلاقة s_i^2 / \bar{Y}_i هي العلاقة الأكثر ثباتاً، ولذلك فقد يكون تحويل الجذر التربيعي (16.15) هو التحويل المفيد لتثبيت تباينات الخطأ هنا.

تحويلات لتصحيح نقص الطيعة

عندما تتوزع حدود الخطأ وفق التوزيع الطبيعي ولكن تباينات غير متساوية، فإن تحويل البيانات لتثبيت التباينات سيُدْمَر الطيعة. ولكن، لحسن الحظ، في التطبيقات العملية يسر نقص الطيعة وعدم تساوي التباينات جنباً إلى جنب. وبالإضافة إلى ذلك، فإن التحويل الذي يساعد في تصحيح نقص تساوي التباينات يكون عادة فعالاً، أيضاً، في جعل توزيع حدود الخطأ يقترب من التوزيع الطبيعي. ولكن من الحكمة كما ذكرنا في الفصل الرابع فحص الرواسب عند التحويل للتأكد من أنه كان فعالاً في تثبيت التباينات وجعل توزيع حدود الخطأ طبيعياً بشكل معقول.

تعليقات

١- عند الحاجة إلى تحويل البيانات، يمكن للمرء أن يعمل بشكل تام مع البيانات المحولة لاختبار تساوي متوسطات مستويات مستويات العامل. ولكن من جهة أخرى، فإنه غالباً ما يفضل عند تقدير تأثيرات مستويات العامل أن تغير فترة الثقة المبنية على المتغير المحول إلى فترة الثقة المبنية على المتغير الأصلي وذلك لتسهيل عملية الفهم لدلالة النتائج.

٢- تم الحصول على التحويلات المقترحة سابقاً عن طريق المناقشة التالية. افترض أن Y متغير عشوائي بمتوسط μ وتباين σ^2 هو دالة في μ ، وليكن $\sigma_y^2 = g(\mu)$. ومن أجل تحويل ما لـ Y وليكن $Y' = h(Y)$ ، مستخدمين مفكوك متسلسلة تايلور، يمكن إثبات أن:

$$\sigma_{Y'}^2 \approx [h'(\mu)]^2 g(\mu) \quad (16.20)$$

حيث $h(\mu)$ هي المشتقة الأولى لـ $h(Y)$ عند μ . ونحن نبحث عن ذلك التحويل h بحيث يكون $\sigma_{Y'}^2$ ثابت، وللسهولة ليكن 1 وبالتالي نرغب بما يلي:

$$[h'(\mu)]^2 g(\mu) = 1$$

أو:

$$h'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{g(\mu)}} \quad (16.21)$$

المعادلة (16.21) هي معادلة تفاضلية وحلها هو (مع إهمال الثابت الكيفي):

$$h(\mu) = \frac{d\mu}{\sqrt{g(\mu)}} \quad (16.22)$$

ولتوضيح استخدام (16.22)، افترض أن σ_y^2 متناسبة مع μ ، ولتكن

$$\sigma_y^2 = k\mu = g(\mu) \quad \text{، فنحصل من (16.22) على:}$$

$$h(\mu) = \int \frac{d\mu}{\sqrt{g(\mu)}} = \frac{2}{\sqrt{k}} \sqrt{\mu}$$

وهكذا، فإن تحويل الجذر التربيعي $Y' = \sqrt{Y}$ سيؤدي إلى تباين ثابت لـ Y' ،

$$\text{و } Y' = (2/\sqrt{k})\sqrt{Y} \text{ سيؤدي إلى تباين ثابت يساوي 1.}$$

وتبين المعادلة (16.20) بشكل واضح أن التحويل الذي تم الحصول عليه بهذه الطريقة يثبت التباين بشكل تقريبي، فقط. ولذلك فمن المهم فحص الرواسب للمتغير بعد التحويل للوقوف على مدى فعالية التحويل في تثبيت التباينات بالفعل.

(١٦-٤) تأثيرات الحيود عن النموذج

لقد تطرقنا في الفقرات السابقة لمدى فائدة تحليل الرواسب وتقنيات تشخيصية أخرى في تقييم مصداقية نموذج تحاين للبيانات التي لدينا. وقد ناقشنا استخدام التحويلات لتثبيت التباينات بصورة رئيسة، ولكن، أيضاً، وكتيجة جانبية لذلك، الحصول على توزيعات للخطأ تكون قريبة من التوزيع الطبيعي. والسؤال الذي يبرز الآن هو ماهي تأثيرات أية حيود متبقية عن النموذج على الاستقرارات التي تقوم بها. لقد قام شيف (المراجع 16.3) بمراجعة شاملة للعديد من الدراسات التي تبحث في هذه التأثيرات وسنلخص هنا النتائج.

عدم الطبيعية

لايشكل نقص الطبيعية، في نموذج التحاين المثبت. أمراً مهماً طالما كان الحيود عن الطبيعية غير مفرط. ويمكن التنويه في هذا المجال إلى أن تفرطح توزيع الخطأ (سواء أكان أكثر تفرطحاً من التوزيع الطبيعي أم أقل) أكثر أهمية من التواء توزيع الخطأ من حيث التأثير على الاستقرارات. وتكون التقديرات النقطية لمتوسطات مستويات العامل وللمقارنات غير منحازة سواء كانت المجتمعات طبيعية أم لا. ولكن اختبار F لتساوي متوسطات مستويات العامل يتأثر قليلاً بنقص الطبيعية سواء في مستوى المعنوية أو في قوة الاختبار. وهكذا يكون الاختبار F منيعاً إزاء الحيود عن الطبيعية. فعلى سبيل المثال، قد يكون مستوى المعنوية المحدد هو 0.05، ولكن مستوى المعنوية الفعلي في حالة توزيع غير طبيعي للخطأ قد يكون 0.04 أو 0.065. وبصورة تقليدية يكون مستوى المعنوية الذي نحصل عليه في حال عدم الطبيعية أكبر بقليل من المستوى المحدد، بينما تكون قوة الاختبار أقل بشكل بسيط من القيمة المحسوبة. وكذلك فإن تقديرات الفترة المنفردة لمتوسطات مستويات العامل وللمتضادات، وطريقة شيف للمقارنات المتعددة،

لا تتأثر، أيضاً، بشكل كبير بالنقص في الطبيعية طالما كانت أحجام العينات غير مفرطة في صغرها.

وبالنسبة لنموذج التحاين II العشوائي (الذي سُنْاقش في الفصل التالي) يكون للنقص في الطبيعية تبعات أكثر خطورة. وهنا ستكون تقديرات مركبات التباين غير منحازة، ولكن معامل الثقة الفعلي لتقديرات الفترة يمكن أن يختلف بشكل كبير عن القيمة المحددة له.

عدم تساوي تباينات الخطأ

عندما تكون تباينات الخطأ غير متساوية، فإن اختبار F لتساوي متوسطات مستويات العامل في نموذج التحاين المثبت يتأثر تأثيراً طفيفاً، فقط، إذا كانت أحجام العينات لجميع مستويات العامل إما متساوية أو لا تختلف اختلافاً كبيراً. وعلى وجه التحديد، فإن عدم تساوي تباينات الخطأ يرفع مستوى المعنوية بشكل بسيط فوق المستوى المحدد. وبصورة مماثلة، فإن طريقة شيفه للمقارنات المتعددة المبنية على الاختبار F ، لا تتأثر تأثيراً كبيراً بعدم تساوي تباينات العينة عندما تكون أحجام العينات متساوية أو متساوية تقريباً. وهكذا، فإن الاختبار F والتحليل ذات الصلة، منيعة إزاء عدم تساوي التباينات، وذلك عندما تكون أحجام العينات تقريباً متساوية. ومن جهة أخرى، قد تتأثر مقارنات بمفردها بين متوسطات مستويات العامل تأثيراً كبيراً لعدم تساوي التباينات، وبمبىح يمكن أن تختلف معاملات الثقة المحددة والفعلية بشكل ملحوظ في مثل هذه الحالات.

ولا يودي استخدام أحجام عينات متساوية لكل مستويات العامل إلى تقليص تأثيرات عدم تساوي التباينات على استقرارات من التوزيع فحسب، بل يسط، أيضاً، الإجراءات الحسابية. وهكذا، فإن البساطة والمتانة تسيران، هنا على الأقل، جنباً إلى جنب. وفي نموذج التحاين العشوائي، يمكن أن يكون لعدم تساوي تباينات الخطأ آثار واضحة على استقرارات تتعلق بمركبات التباين حتى لو كانت أحجام العينات متساوية.

عدم استقلالية حدود الخطأ

يمكن أن يكون للنقص في استقلالية حدود الخطأ آثار خطيرة على الاستقرارات في تحليل التباين، وذلك لكل من نماذج التحاين المثبتة والعشوائية. وبما أنه من الصعب، غالباً، تصحيح هذا الخلل، فمن المهم تلافيه منذ البداية كلما أمكن ذلك. واستخدام التعشية في تلك المراحل من الدراسة التي يُتوقع أن تقود إلى حدود خطأ مرتبطة، يمكن أن يشكل سياسة الضمان الأكثر أهمية. وعلى أي حال يمكن أن تكون التعشية غير ممكنة في حالة بيانات الملاحظة. وفي هذه الحالة عند وجود حدود خطأ مرتبطة يمكن للمرء أن يعدل النموذج. فعلى سبيل المثال، في مناقشتنا السابقة المبينة على الشكل (١٦-٣)، ذكرنا أن إدخال حد خطي في النموذج خاص بتأثير تعلّم المحلل يمكن أن يؤدي إلى إزالة الارتباط في حدود الخطأ. ويمكن أن يكون تعديل النموذج، بسبب وجود حدود خطأ مرتبطة، ضرورياً، أيضاً، في الدراسات التجريبية. في أحد الحالات، طلبت المجربة من 10 أشخاص إعطاء درجات تصنيف لأربعة أنواع جديدة من نكهات شراب فاكهة، وكذلك للنكهة القياسية، وذلك على سلم قياس يتراوح بين 0 و100. وقد طبقت نموذج تحليل التباين وحيد العامل ولكنها وجدت درجات ارتباط أعلى بين الرواسب لكل شخص. وتبعاً لذلك، فقد عدلت نموذجها إلى نموذج تصميم قياسات متكررة (الفصل ٢٨). وهذه النماذج مصممة للحالات التي يُعطى فيها العنصر التحريبي نفسه كلاً من المعالجات المختلفة ويتوقع أن توجد اختلافات بين العناصر.

مراجع ورد ذكرها

- [16.1] MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.
- [16.2] Glaser, R. E. "Bartlett's Test of Homogeneity of Variances." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 1, ed. S. Kotz and N. L. Johnson. New York: John Wiley & Sons, 1982, pp. 189-91.
- [16.3] Scheffé, H. *The analysis of Variance*. New York: John Wiley & Sons, 1959.

مسائل

(١-١٦) بالرجوع إلى الأشكال (٣-١٦) و (٤-١٦)، ما هي الملامح في الرسوم التسلسلية للرواسب التي تمكنك من تشخيص أن تبيان الخطأ يتغير فوق الزمن في واحدة من حالتين، بينما يكون للتأثير في الحالة الأخرى، طبيعة مختلفة؟ وهل يمكنك القيام بتشخيص تأثيرات الزمن من رسم نقطي للرواسب؟

(٢-١٦) اقترح أحد طلاب فصل رسم انحرافات المشاهدات Y حول المتوسط الإجمالي المقدّر \bar{Y} ، وذلك للمساعدة في تقويم مصداقية نموذج التحاين (14.2). هل ستساعد هذه الانحرافات في دراسة استقلال حدود الخطأ وفي ثبات تباين حدود الخطأ؟ وفي طبيعة حدود الخطأ؟ ناقش.

(٣-١٦) عرض أحد المستشارين وهو يناقش تطبيقات التحاين مايلي: "في بعض الأحيان أجد أن تأثيرات المعالجات في التجربة لا تتضح من خلال الفروق بين متوسطات المعالجات. ولذلك فمن المهم مقارنة رسوم الرواسب للمعالجات". وقال أحد الحاضرين لاحقاً "لا أظن أنني فهمت الإشارة إلى رسوم الرواسب: اشرح.

(٤-١٦) بالرجوع إلى مسألة تحسين الإنتاج (١٠-١٤)، كانت الرواسب كما يلي:

i	1	2	3	4	5	6
منخفض	.72	1.32	-.08	-1.08	.02	-.28
معتدل	-1.43	-.03	1.27	.47	-.33	-.43
مرتفع	-.70	.50	.90	-1.40	.40	.30
i	7	8	9	10	11	12
منخفض	-.58	.82	-.88			
معتدل	.77	-.23	.17	.57	-1.03	.27
مرتفع						

أ - جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل مستوى عامل. ما هي أنواع الحيوذ عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ - يرغب الاقتصادي في بحث ما إذا كان موقع الإدارة العامة للشركة مرتبط بتحسين الانتاجية. ومواقع الادارات العامة كما يلي (أوروبا E، أمريكا U).

<i>j</i>												<i>i</i>
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
			U	U	U	U	E	E	E	E	U	1
E	E	E	U	U	U	U	U	E	E	E	E	2
						E	U	U	E	U	E	3

جهّز رسوما نقطية للرواسب توضح فيها مقر الإدارة العامة. وهل يبدو أنه من الممكن تحسين نموذج التحاين بإضافة موقع الادارة العامة كعامل ثان؟ اشرح.

(١٦-٥) بالرجوع إلى مسألة لون الاستبيان (١٤-١١)، كانت الرواسب كما يلي:

<i>j</i>					<i>i</i>
5	4	3	2	1	
5.6	-2.4	1.6	-3.4	-1.4	1
-6	1.4	-4.6	-6	4.4	2
0.0	1.0	-1.0	-3.0	3.0	3

أ - جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل لون، ماهي الحيوذ عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ - المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة جغرافيا. جهّز رسوم تسلسلية للرواسب. ماذا يمكن دراسته من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟
 د - احسب الرواسب المعيرة (16.2) أوجد الفترات المتمركزة التي يجب أن يقع فيها تقريبا 50 في المئة و 90 في المئة من الرواسب المعيرة لو كانت حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي يتبين ثابت. ما هي النسب الفعلية للرواسب داخل هذه الفترات؟ وهل هذه النتائج متسقة مع تلك في الفقرة (ب)؟.

(٦-١٦) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٤-١٧).

أ - احسب الرواسب و جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل مستوى عامل. ماهي الحيدود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟
 ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية و هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ - المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهّز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ماذا وجدت؟

د - احسب الرواسب المعيرة (16.2). أوجد الفترات المتمركزة التي يجب أن يقع فيها تقريبا 50 في المئة من الرواسب المعيرة لو كانت حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي يتبين ثابت. ماهي النسب الفعلية للرواسب داخل هذه الفترات؟ وهل هذه النتائج متسقة مع تلك في الفقرة (ب)؟
 (٧-١٦) بالرجوع إلى مسألة العروض النقدية (١٤-١٣):

أ - أوجد الرواسب و جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل مستوى عامل - ما هي أنواع الحيدود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ ماهي استنتاجاتك؟.

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضاً، معامل ارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية ملائماً هنا؟

جـ - المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهّز رسوماً تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟.

د - تم إبلاغ أحد المدراء التنفيذيين في منظمة المستهلكين بأن تجار السيارات المستعملة في المنطقة اتجهوا إلى تقديم عروض نقدية أقل خلال إجازة نهاية الأسبوع (مساء الجمعة وحتى غاية الأحد) منها في الأوقات الأخرى. وأزمنة تقديم العروض هي كما يلي: (عطلة نهاية الأسبوع: W، أي وقت آخر: O):

	j												i
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
W	W	O	W	O	W	O	W	O	W	O	W	O	1
O	W	W	O	O	W	O	W	O	W	W	W	O	2
W	O	W	W	W	O	O	O	W	O	W	O	O	3

جهّز رسوماً نقطية توضح فيها وقت تقديم العرض. وهل يبدو أنه من الممكن تحسين نموذج التحاين (14.2) بإضافة وقت تقديم العرض كمعامل ثان؟ اشرح.

(٨-١٦) بالرجوع إلى مسألة آلات الصبغة (١٤-١٤):

أ - احسب الرواسب و جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل آلة. ما هي أنواع الحيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ ماهي استنتاجاتك؟

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضاً، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية ملائماً هنا؟.

جـ - المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهّز رسوماً تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟.

(٩-١٦) بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٥-١٤):

أ - أوجد الرواسب وجّهز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل وكيل. ما هي أنواع الجيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ ماهي استنتاجاتك؟.

ب - جّهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

جـ - المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جّهز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ما هي استنتاجاتك؟

(١٠-١٦) لعبة حاسوبية. تسابقت أربع فرق في 20 محاولة للعبة تجارية مرمجة بالحاسب الآلي. وتضمنت كل محاولة لعبة جديدة، وكان هدف كل فريق أن يجعل ربحه أكبر مما يمكن في المحاولة المعطاة. وقام باحث بتوفيق نموذج التحاين (14.2) لتحديد ما إذا كانت متوسطات الأرباح للفرق الأربع هي نفسها وحصل على الرواسب التالية:

i	j									
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	.10	.28	.10	.47	.83	.65	.28	-.08	.10	-.26
2	-1.44	-1.44	-1.12	-1.28	-.95	-.62	-.29	-.46	-.29	.03
3	-.93	-.70	-.81	-.59	-.25	-.36	-.14	.00	-.14	.09
4	-.15	.11	.25	-.02	-.15	-.29	-.02	.11	.38	.25

i	j									
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	-.45	-.63	-1.00	-.63	-.45	-.08	.10	.10	.28	.28
2	.20	.20	.36	.69	.85	1.02	.85	1.02	1.18	1.51
3	.20	.43	.31	.09	.20	.43	.54	.54	.43	.65
4	-.02	-.42	-.29	-.42	-.15	-.15	.25	.11	.25	.38

الرواسب لكل فريق معطاة حسب الترتيب الزمني. جّهز رسوم راسب مناسبة

لدراسة ما إذا كانت حدود الخطأ مستقلة من محاولة لأخرى لكل فريق. ماهي استنتاجاتك؟.

(١١-١٦) خدمة طائرة مروحية. قام أحد عملي العمليات في قسم الشرطة بدراسة عدد مرات استخدام طائرة الطوارئ المروحية خلال فترة 20 يوما لكل فترة من فترات اليوم (الوردية ١: ٢ ص - ٨ ص، الوردية ٢: ٨ ص - ٢٢ ص، الوردية ٣: ٢٢ ص - ٨ م الوردية ٤: ٨ م - ٢ ص). وكانت البيانات كما يلي بالترتيب الزمني).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4	5	3	4	6	3	2	5	7	1	2	4	7	4	5	0	4	1	6	1
2	2	0	0	3	2	1	0	3	1	0	0	1	1	0	1	3	1	2	2	0
3	1	2	3	0	4	3	1	4	2	0	2	3	2	3	4	0	1	3	2	4
4	5	2	4	4	6	5	3	5	7	3	1	0	2	3	3	4	1	5	2	3

وبما أن البيانات هنا هي بيانات عدّ، فقد كان المحلل قلقا بشأن فرضيات الطبيعية وتسوي التباينات في نموذج التحاين (14.2).

أ - جهّز رسوم رواسب مناسبة للدراسة ما إذا كانت تباينات الخطأ متساوية للورديات الأربع. ماهي استنتاجاتك؟

ب - احسب \bar{y}_i و s_i^2 لكل وردية. تفحص ما إذا كانت أي من العلاقات (16.15) أو (16.16) أو (16.17) هي الأكثر ملاءمة هنا. ماذا تستنتج؟.

ج - أوجد الرواسب المهيّرة (16.3) و جهّز رسم احتمال طبيعي.

أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية معقولا هنا؟.

د - قرر المحلل أن يطبق تحويل الجذر التربيعي (16.15) أوجد البيانات المحوّلة $y' = \sqrt{y}$ ومن ثمّ احسب الرواسب.

هـ - جهّز رسوما مناسبة للرواسب التي حصلت عليها في الجزء (د) وذلك لدراسة تساوي تباينات الخطأ للورديات الأربع وأوجد رسم احتمال طبيعي ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. ماهي استنتاجاتك؟.

(١٦-١٢) سرعات اللف. في تجربة لدراسة تأثير سرعة لف الحيط (١ بطيء، ٢ طبيعي، ٣ سريع، ٤ أقصى سرعة) على مكب طوله ٧٦ ياردة، وتمّ القيام بـ ١٦ تكرارا ويتضمن كل تكرار ١٠٠٠٠ مكب وذلك عند كل سرعة من سرعات اللف الأربع - والمتغير المستقل هنا هو عدد مرات انقطاع الحيط أثناء عملية الإنتاج، النتائج (مرتبة حسب الزمن) هي كما يلي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4	3	2	4	4	2	4	5	6	3	4	4	3	2	3	4
2	6	7	4	6	8	3	9	5	5	9	2	7	6	4	6	7
3	14	10	13	6	11	12	6	7	17	12	9	10	12	14	6	12
4	23	9	19	16	21	18	24	11	25	16	11	13	20	7	15	17

بما أن البيانات هنا هي بيانات عدّ، فقد كان الباحث قلقا بشأن افتراضات

الطبيعية وتساوي التباينات لنموذج التحاين (14.2).

أ - جهّز رسوم رواسب مناسبة للدراسة ما إذا كانت تباينات الخطأ

متساوية من أجل السرعات الأربع. ماهي استنتاجاتك؟

ب - احسب \bar{y}_i و s_i^2 لكل سرعة لف. تفحص ما إذا كانت أي من

العلاقات (16.15) أو (16.16) أو (16.17) هي الأكثر ملاءمة هنا.

ماذا تستنتج؟

ج - أوجد الرواسب المعيرة (16.3) وجهّز رسم احتمال طبيعي.

أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة

تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعة معقولاً هنا؟

د - قرر الباحث أن يطبق التحويل اللوغاريتمي (16.16)، أوجد البيانات

المحولة $y' = \log_{10} y$ ومن ثم احسب الرواسب.

هـ - جهّز رسوما مناسبة للرواسب التي حصلت عليها في الجزء (د)،

وذلك لدراسة تساوي تباينات الخطأ لسرعات اللف الأربع.

وجهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي. أوجد معامل الارتباط بين

الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعة. ماهي

استنتاجاتك؟

(١٣-١٦) استخدم الاستيفاء العكسي لايجاد المئينات التالية:

أ - $F(.95; 3, 360)$

ب - $F(.99; 200, 4)$

ج - $F(.90; 400, 500)$

(١٤-١٦) بالرجوع إلى مسألة تحسين الإنتاجية (١٤-١)، فيما يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

i	1	2	3
s_i	.8136	.7572	.8672

افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا.

أ - تفحص ماإذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا باستخدام

اختبار بارتلليت، استخدم $\alpha = .05$. أذكر الفرضيات البديلة وقاعدة

القرار والنتيجة، ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - هل ستوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في (أ) لو أنك

استخدمت اختبار بارتلليت المعدل؟.

ج - هل ستكون الاختبارات في (أ) و (ب) مناسبة لو أن توزيع حدود

الخطأ كان بعيدا جدا عن الطبيعية؟

(١٥-١٦) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٤-١٢) افترض أن حدود

الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا.

أ - تفحص ماإذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا باستخدام

اختبار بارتلليت، استخدم $\alpha = 0.10$. اذكر الفرضيات البديلة وقاعدة

القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - هل ستوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في الجزء (أ) لو

أنك استخدمت اختبار بارتلليت المعدل؟

ج - هل ستكون الاختبارات في (أ) و (ب) مناسبة لو أن توزيع حدود

الخطأ كان بعيدا جدا عن الطبيعية؟.

(١٦-١٦) بالرجوع إلى مسألة العروض التقديرية (١٣-١٤). افترض أن حدود الخطأ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي.

- أ - تفحص ما إذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا باستخدام اختبار بارنلت، استخدم $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟
- ب - هل ستوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في (أ) لو أنك استخدمت اختبار هارتلي؟

(١٧-١٦) بالرجوع إلى مسألة آلات التعبئة (١٤-١٤). افترض أن حدود الخطأ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي.

- أ - تفحص باستخدام اختبار بارنلت ما إذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟
- ب - هل ستوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في (أ) لو أنك استخدمت اختبار هارتلي؟

(١٨-١٦) بالرجوع إلى مسألة خدمة الطائفة الموحدة (١١-١٦). افترض أن حدود الخطأ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي.

- أ - بالنسبة للبيانات غير المحركة، استخدم اختبار بارنلت لاختبار ما إذا كانت تباينات معالجات الخطأ متساوية أم لا، استخدم $\alpha = 0.10$. ما هي القيمة P للاختبار؟ هل نتائجك متسقة مع التشخيصات في (١١-١٦)؟

- ب - أعد اختبار بارنلت للبيانات المحركة في المسألة (١١-١٦). ما هي استنتاجاتك الآن؟

(١٩-١٦) بالرجوع إلى مسألة سرعات اللف (١٢-١٦). افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا.

أ - بالنسبة للبيانات غير المحولة، استخدم اختبار هارتلي لاختبار ما إذا كانت تباينات معالجات الخطأ متساوية أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. ما هي القيمة P للاختبار؟ هل تالحدك متسقة مع التشخيصات في (١٢-١٦)؟

ب - أعد اختبار هارتلي للبيانات المحولة في المسألة (١٢-١٦) د . ما هي استنتاجاتك الآن؟.

تقارن

(٢٠-١٦) بالرجوع إلى الشكل (٣-١٦). عدّل نموذج التحاين (14.2) بحيث يتضمن حد اتجاه خطي لتأثيرات الزمن. هل هذا النموذج المعدّل لايزال نموذج تحاين؟ لايزال نموذجاً خطياً؟.

(٢١-١٦) (تحتاج حساب التفاضل) استخدم (16.22) لإيجاد التحويل المناسب عندما يكون: (١) $\sigma_i = k\mu_i$ ، (٢) $\sigma_i = k\mu_i^2$.

مشاريع

(٢٢-١٦) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC وإلى المشروع (٣٣-١٤):

أ - أوجد الرواسب وجهاز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل منطقة. هل تقترح رسومك وجود أية حيود خطية عن نموذج التحاين (14.2)؟

ب - جهاز رسم احتمال طبيعي للرواسب وأوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو افتراض الطبيعية معقولاً هنا؟

ج - افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريباً. تفحص باستخدام اختبار بارتلليت ما إذا كانت تباينات خطأ المناطق الجغرافية متساوية أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اذكر الفرضيات البديلة وقاعدة القرار والنتيجة . ما هي القيمة P للاختبار؟

(٢٣-١٦) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC. يراد اختبار ما إذا كان متوسط طول الإقامة (المتغير 2) هو نفسه في للمناطق الجغرافية الأربع (المتغير 9) أم لا. ولكن هناك قلق بشأن فرضيات الطبيعية وتساوي التباينات في نموذج التحاين (14.2).

أ - أوجد الرواسب وارسمها مقابل القيم التوفيقية وذلك لدراسة ما إذا كانت تباينات الخطأ متساوية للمناطق الجغرافية الأربع أم لا. ماهي استنتاجاتك؟

ب - احسب \bar{y} و s_y لكل منطقة جغرافية وتفحص ما إذا كانت أي من العلاقات (16.15) أو (16.16) أو (16.17) هي الأكثر ملاءمة هنا. ماذا تستنتج؟

ج - استخدم التحويل العكسي (16.17) للحصول على البيانات المحولة $y' = 1/y$.

د - أوجد الرواسب عند توفيق نموذج التحاين (14.2) للبيانات المحولة. ارسم هذه الرواسب مقابل القيم التوفيقية لدراسة تساوي تباينات الخطأ للمناطق الجغرافية الأربع. وجهز كذلك رسم احتمال طبيعي للرواسب وأوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. ماهي استنتاجاتك؟

هـ - افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا. تفحص باستخدام اختبار بارنيت ما إذا كانت تباينات خطأ المناطق الجغرافية متساوية أم لا، استخدم $\alpha = .10$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

و - افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب للبيانات المحولة y' . اختر ما إذا كان متوسط طول الإقامة هو نفسه في المناطق الجغرافية الأربع أم لا. اضبط المخاطرة α عند .01. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

(٢٤-١٦) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SMSA والمشروع (٣٥-١٤):

أ - أوجد الرواسب وجهاز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل منطقة. هل

تقترح رسومك وجود أية حيود خطية عن نموذج التحاين (14.2).

ب - جهاز رسم احتمال طبيعي للرواسب و أوجد معامل الارتباط بين

الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو

افتراض الطبيعية معقولاً هنا؟

ج - افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا. نفحص

باستخدام اختبار بارنيليت ما إذا كانت تباينات خطأ المناطق الجغرافية

متساوية أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة

القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

تخطيط حجم العينات، اختبارات المعلمية ونموذج تطبيق عشوائي

سنناقش في هذا الفصل التخطيط لحجوم عينات خاصة بدراسات تحليل التباين، مما يُعتبر جزءاً لا يتجزأ من مثل هذه الدراسات. وسناقش، أيضاً، اختبارات بدلية للاختبار F لتقرير ما إذا كانت متوسطات المعالجات متساوية أم لا. وأخيراً سنقدم نموذج التحاين II لدراسات تحليل تباين وحيدة العامل، وهو النموذج المناسب عندما تكون مستويات المعالجات عينة عشوائية من مجتمع أكبر من المستويات.

(١٧-١) التخطيط لحجوم العينات بأسلوب القوة

تصميم دراسات تحاين

من المهم تخطيط أحجام العينات في دراسات تحليل التباين، كما هو الحال في الدراسات الأخرى، وذلك وصولاً إلى الحماية المطلوبة ضد الوقوع في الأخطاء من النوع I و II، أو وصولاً إلى دقة كافية للتقديرات المهمة كي تكون تقديرات مفيدة. وهذا التخطيط ضروري للتأكد من أن أحجام العينات كبيرة بالقدر الكافي لاكتشاف فروق مهمة باحتمال عالٍ. وفي الوقت نفسه، يجب ألا تكون أحجام العينات كبيرة جداً إلى الحد الذي تصبح معه تكلفة الدراسة باهظة وتُسفر باحتمال عالٍ عن أهمية إحصائية لفروق ثانوية. ولذلك يُعتبر تخطيط أحجام العينات جزءاً لا يتجزأ من التصميم لدراسة تحليل تباين.

وبصورة عامة، سنفترض في هذه المناقشة أن أحجام العينات متساوية لمستويات

العامل كافة، مما يعكس أن لها جميعا الأهمية نفسها تقريبا. وفي الحقيقة إذا كان الاهتمام الرئيس منصبا على المقارنات الثنائية لجميع مستويات العامل، فيمكن إثبات أن تساوي أحجوم العينات يجعل دقة المقارنات المختلفة أكبر ما يمكن. وسبب آخر لتساوي أحجوم العينات هو أن حيودا معينا عن نموذج التحاين المفترض، كما ذكرنا في الفقرة ١٦-٤، لن يكون مزعجا إذا كان لجميع مستويات العامل حجم العينة نفسه. وعلى أية حال، ستكون هناك أحيائين يصبح عدم تساوي أحجوم العينات فيها مناسبا، وعلى سبيل المثال، عند مقارنة أربع معالجات مع معالجة حيادية، فقد يكون من المنطقي جعل حجم العينة للمعالجة الحيادية أكبر. وستعلق فيما بعد على تخطيط أحجوم العينات في مثل هذه الحالة.

ويمكن تخطيط أحجوم العينات من خلال التحكم: (١) بمجازفة ارتكاب أخطاء من النوع I ومن النوع II، (٢) بعرض فترات الثقة المطلوبة أو (٣) بمركب من هذين الأسلوبين. وفي هذه الفقرة، سنعتبر تخطيط أحجوم عينات بأسلوب القوة، وهو أسلوب يسمح بالتحكم في مجازفة ارتكاب أخطاء من النوع I ومن النوع II، وسنحتاج من البداية لاعتبار قوة اختبار F .

قوة اختبار F

نشر قوة اختبار F إلى احتمال أن تؤدي قاعدة القرار إلى النتيجة H_0 عندما تكون H_0 صحيحة بالفعل. وعلى وجه التحديد تُعطى القوة بالعلاقة التالية:

$$P(F^0 > F(1 - \alpha, r-1, n_T - r) | \Phi) \quad (17.1)$$

حيث Φ هي معلمة اللامركزية، أي مقياس لدى عدم تساوي المتوسطات μ_i :

$$\Phi = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\frac{\sum n_i (\mu_i - \mu)^2}{r}} \quad (17.1a)$$

و:

$$\mu = \frac{\sum n_i \mu_i}{n_T} \quad (17.1b)$$

وعندما يكون لجميع عينات مستويات العامل أحجوم متساوية n ، تصبح المعلمة

⊕ كالتالي:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{r} \sum (\mu_i - \mu)^2} \quad , \quad n_i \equiv n \quad , \quad (17.2)$$

حيث:

$$\mu = \frac{\sum \mu_i}{r} \quad (17.2a)$$

ولتحديد احتمالات القوة، يجب أن نستفيد من توزيع F اللامركزي وهو توزيع المعانية لـ F^* عندما تكون H_0 صحيحة. والحسابات الناتجة معقدة تماماً، ولكن تم تجهيز رسوم بيانية لجعل تحديد احتمالات القوة بسيطة نسبياً. ويحوي الجدول A.8 رسوم بيروسون - هارتلي البيانية لقوة الاختبار F . ويعتمد المنحني المناسب للإفادة منه على عدد مستويات العامل، وعلى أحجام العينات ومستوى المعنوية المستخدم في قاعدة القرار، وتستخدم رسوم بيروسون وهازلتي البيانية كما يلي:

١- تشير كل صفحة إلى قيمة مختلفة لـ r_1 أي عدد درجات الحرية للبسط في F^* . وفي نموذج التحاين (14-2) لدينا $r_1 = r - 1$ ، أي عدد مستويات العامل مطروحا منه واحد. ويحوي الجدول A.8 رسوما لقيم $r_1 = 2, 3, 4, 5, 6$ كما هو مبين في الزاوية اليسرى العليا من كل رسم بياني.

٢- تم استخدام مستويين للمعنوية، ونرمز لهما بـ $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.01$. ويوجد تدريجان لـ X وذلك وفقا لمستوى المعنوية المستخدم. وبالإضافة إلى ذلك، فإن المجموعة اليسرى من المنحنيات في كل رسم تشير إلى $\alpha = 0.05$ ، بينما تشير المجموعة اليمنى إلى $\alpha = 0.01$.

٣- وتوجد مجموعة منفصلة من المنحنيات لقيم مختلفة لـ r_2 ، أي لدرجات حرية المقام في F^* . وفي نموذج التحاين (14.2)، فإن $r_2 = n_T - r$. وفي أعلى الرسم فهرست المنحنيات وفقاً لقيم r_2 ، وبما أن قيمة مختارة، فقط، لـ r_2 قد استخدمت في هذه الرسوم، فسنحتاج إلى القيام بعملية استيفاء من أجل قيم وسيطة لـ r_2 .

٤ - يمثل المحور X المعلمة Φ ، أي معلمة اللامركزية كما هي معروفة في (17-1a).

٥ - ويعطى المحور Y القوة $1 - \beta$ ، حيث β هي مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II.

أمثلة

١ - اعتبر الحالة عندما تكون $n_1 = 2$ ، $n_2 = 10$ ، $\phi = 3$ و $\alpha = 0.05$. فنحدد عندئذ من الجدول A. 8 في ملحق الجدول أن القوة $1 - \beta = 0.983$.

٢ - افترض في مثال شركة كتتون للأغذية في الفصل ١٤ أن المحللة ترغب في معرفة قوة قاعدة القرار المذكورة في الفقرة ٨-١٤، عندما تكون هناك فروق جوهرية بين متوسطات مستويات العامل. وترغب على وجه التحديد بأن تأخذ في اعتبارها الحالة التي تكون فيها $\mu_1 = 12.5$ ، $\mu_2 = 13$ ، $\mu_3 = 18$ و $\mu_4 = 21$ ، فيكون المتوسط المرجح في (17-1b) كما يلي:

$$\mu = \frac{2(12.5) + 3(13) + 3(18) + 2(21)}{10} = 16$$

وهكذا تتحدد قيمة ϕ كما يلي:

$$\phi = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{2(-3.5)^2 + 3(-3)^2 + 3(2)^2 + 2(5)^2}{4} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sigma} (5.33)$$

لاحظ أننا لانزال نحتاج إلى معرفة σ ، الانحراف المعياري لحدود الخطأ e_i في النموذج. افترض أننا نعرف من خبرة سابقة أن $\sigma = 2.5$ تقريباً. فعندئذ لدينا:

$$\phi = \frac{1}{2.5} (5.33) = 2.13$$

وبالإضافة إلى ذلك لدينا في هذا المثال:

$$n_1 = r - 1 = 3$$

$$n_2 = n_T - r = 6$$

$$\alpha = 0.05$$

وهكذا نجد من الرسم في الصفحة أن القوة $1 - \beta = 0.72$ تقريباً.

وبعبارة أخرى هناك حوالي 72 فرصة من 100 بأن تؤدي قاعدة القرار إلى اكتشاف فروق في متوسط أحجام المبيعات للتصاميم الأربعة للعلب عندما تكون الفروق هي تلك المحددة آنفاً.

تعليقات

١ - نخطط أي قيمة Φ بقيم عديدة ومختلفة من متوسطات مستويات العامل μ ولذلك، في مثال شركة كتون للأغذية، تؤدي القيم $\mu_1 = 12.5$, $\mu_2 = 13$, $\mu_3 = 18$, $\mu_4 = 21$ والقيم $\mu_1 = 12.5$, $\mu_2 = 13$, $\mu_3 = 18$, $\mu_4 = 21$ إلى القيمة نفسها $\Phi = 2.13$ وبالتالي تؤدي إلى القوة نفسها.

٢ - كلما كبرت Φ ، أي كلما ازدادت الفروق بين متوسطات مستويات العامل، كلما ازدادت القوة، وبالتالي يصغر احتمال ارتكاب خطأ من النوع II لأي قيمة معطاة α لارتكاب خطأ من النوع I. وكذلك كلما صغرت المخاطرة α المحددة، تصغر القوة لأي قيمة معطاة Φ ، وبالتالي تزداد المخاطرة بارتكاب خطأ من النوع II.

٣ - بما أن العديد من الدراسات وحيدة العامل تُحرى بسبب ما توقعه من اختلاف متوسطات مستويات العامل، والرغبة في تقصي هذه الفروق، فعالها ما توضع للمخاطرة α ، المستخدمة في بناء قاعدة القرار لتحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا، كبيرة نوعاً ما (مثلاً 0.05 أو 0.10 بدلاً من 0.01) وذلك لزيادة قوة الاختبار.

٤ - لم توضع القيمة $v_1 = 1$ في رسم بيرسون - هارتلي في الجدول أ-8 وذلك لأن هذه الحالة تقابل عملية المقارنة بين متوسطي مجتمعين. وكما ذكرنا سابقاً، فإن اختبار F في هذه الحالة يكافئ اختبار t ذا الجانبين، ويمكن لذلك استخدام رسوم القوة لاختبار t ذي الجانبين الموضحة في الجدول A.5 بمعلمة لامر كثرية.

$$\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (17.3)$$

ودرجات حرية $2 - n_1 - n_2$.

استخدام الجدول أ-٩

إحدى الطرق لتطبيق أسلوب القوة في تخطيط بحجوم العينات هي استخدام رسوم القوة لتوزيع F الموضحة في الجدول أ-8. ولكننا نحتاج في هذه الرسوم إلى

أسلوب المحاولة والخطأ. وبدلاً من ذلك هناك جدول تزودنا بحجوم العينات بشكل مباشر. ونوضح في الجدول أ-١٠ تحديدًا لحجوم العينات عندما يكون لجميع مستويات العامل حجم العينة نفسه أي عندما تكون $n_1 = n_2 = \dots = n_k$. وتتم عملية تحديد العينات باستخدام الجدول أ-١٠ عن طريق معلمة اللامزكوية (17-2) وذلك لحجوم عينات متساوية. ولكن بدلاً من أن يكون المطلوب تحديدًا مباشرًا لمستويات μ التي تقتضي التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II، فإن الجدول أ-١٠ يتطلب، فقط، تحديدًا لأصغر مدى لتوسطات مستويات العامل يكون معه اكتشاف فروق بين التوسطات μ باحتمال عالٍ أمرًا مهمًا. ونرمز لهذا المدى الأصغري بـ Δ :

$$\Delta = \max(\mu_i) - \min(\mu_j) \quad (17.4)$$

ويجب القيام بتحديد المقادير الثلاثة التالية عند استخدام الجدول أ-١٠:

- ١ - المستوى α الذي يتم عنده التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I.
- ٢ - مقدار المدى الأصغري Δ لـ μ الذي يكون اكتشافه باحتمال عالٍ مهمًا.
- ويجب، أيضًا، تحديد المقدار σ ، أي الانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمالية لـ Y ، وذلك لأن الدخول إلى الجدول أ-١٠ يتم بدلالة النسبة:

$$\frac{\Delta}{\sigma} \quad (17.5)$$

- ٣ - المستوى β وهو مستوى التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II وذلك من أجل التحديدات المطبقة في الفقرة ٢. إذ يتم الدخول إلى الجدول أ-١٠ بدلالة القوة $1 - \beta$.

ويوجد أربعة مستويات للتحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند استخدام الجدول أ-١٠ هي (2, 1, 05, 01) $\alpha =$ ، ويمكن، أيضًا، التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II عند أحد المستويات التالية (3, 2, 1, 05) $\beta =$ وذلك من خلال تحديد القوة $1 - \beta$ ويعطي الجدول أ-١٠ أحجام العينات اللازمة للدراسات التي

تحتوي على $r = 2, \dots, 10$ من مستويات العامل أو المعالجات.

مثال. ترغب شركة تلك أسطولا كبيرا من الشاحنات أن تحدد ماإذا كان لأربعة أنواع من إطارات الجليد متوسط عمر الإستهلاك نفسه (بالآف الأميال) أم لا. ومن المهم استنتاج أن للأأنواع الأربعة من إطارات الجليد متوسطات أعمار مختلفة عندما يكون الفرق بين متوسطي أفضل وأسوأ نوع هو 3 أو أكثر (آلف ميل).

ولذلك يكون تحديد المدى الأصغري بـ $\Delta = 3$. ومن المعلوم من الخبرة السابقة أن الانحراف المعياري للعمر الإستهلاكي لهذه الإطارات هو 2 (آلف ميل) تقريبا. وترغب الإدارة بضبط مخاطرة اتخاذ قرارات خاطئة عند المستويات التالية:

$$\alpha = .05 \quad \text{أو} \quad 1 - \beta = .90 \quad \text{القوة}$$

$$\beta = .10$$

وبالدخول إلى الجدول أ-١٠ للقيم $\Delta/\sigma = 3/2 = 1.5$, $\alpha = .05$, $1 - \beta = .90$ نجد أن $n = 14$. وهكذا يجب استخدام 14 إطارا لكل نوع وذلك لضبط مخاطرة اتخاذ قرارات خاطئة عند المستويات المطلوبة.

تحديد Δ/σ بصورة مباشرة. ويمكن، أيضا، استخدام الجدول أ-١٠ عند تحديد المدى الأصغري مباشرة بدلالة وحدات من الانحراف المعياري σ . وليكن تحديد Δ في هذا الحالة $k\sigma$ بحيث يصبح لدينا من (5-17):

$$\frac{\Delta}{\sigma} = \frac{k\sigma}{\sigma} = k$$

ويمكن بهذه الطريقة الدخول مباشرة إلى الجدول أ-١٠ بقيمة k المحددة. مثال. افترض في مثال إطارات الجليد أن من المهم اكتشاف فروق بين متوسطات الأعمار الإستهلاكية في حدود مدى لمتوسطات الأعمار الإستهلاكية يبلغ $k = 2$ أو أكثر، أي يساوي انحرافين معياريين أو أكثر. افترض، أيضا، أن التحديدات الأخرى هي:

$$\alpha = .10 \quad \text{أو} \quad 1 - \beta = .90 \quad \text{القوة}$$

$$\beta = .05$$

ونجد من الجدول أ-١٠ وللقيم $k = 2$, $r = 4$ أننا سنحتاج إلى اختيار $n = 9$ من كل نوع من الإطارات، وصولاً إلى الوقاية المطلوبة من مخاطر القرار الخاطئ.

ملاحظة

بالرغم من أن تحديد Δ / σ مباشرة لا يتطلب تخطيطاً مسبقاً لقيمة الانحراف المعياري σ ، ولكن ليس لهذا فائدة كبيرة كما قد يبدو، ذلك لأن أي تحديد ذي معنى لـ Δ بدلالة وحدات من σ سيتطلب في الغالب معرفة مقدار الانحراف المعياري.

بعض التعليقات الإضافية

١ - إن للتحديد الدقيق لـ Δ / σ تأثيراً كبيراً على أحجام العينات عندما تكون Δ / σ صغيرة، بينما يكون له تأثير أقل عندما تكون Δ / σ كبيرة. فعلى سبيل المثال، عندما تكون $r = 3$ ، $\alpha = .05$ و $\beta = .10$ ، نجد من الجدول أ-١٠ :

n	Δ / σ
27	1.0
13	1.5
8	2.0
6	2.5

وهكذا نرى أنه ما لم تكن Δ / σ صغيرة جداً فلا ينبغي القلق عند تحديد Δ / σ .

٢ - إن تخفيض أي من المحاطرتين α أو β أو تخفيضهما معا يزيد في أحجام العينات المطلوبة.

وعلى سبيل المثال، عندما تكون $r = 4$ ، $\alpha = .10$ و $\Delta / \sigma = 1.25$ نجد:

n	$1 - \beta$	β
13	.80	.20
16	.90	.10
20	.95	.05

٣ - إن أي خطأ معتدل في التخطيط المسبق لقيمة σ يمكن أن يؤدي لأخطاء كبيرة في حساب أحجام العينات المطلوبة، بالرغم من أن أحجام العينات المطلوبة لاتزال «في ملعب الكرة نفسه». فعلى سبيل المثال، عندما تكون $\alpha = .05$ ، $\beta = .10$ و $r = 5$ نجد أن:

n	Δ / σ	σ
5	3.0	1
15	1.5	2
31	1.0	3

وفي ضوء الطبيعة التقريبية للتخطيط لقيمة σ فمن المرغوب عموماً البحث عن

بحجوم العينات المطلوبة من أجل مدى من القيم المحتملة لـ σ قبل التقرير في بحجوم العينات التي ستستخدم.

٤ - يعتمد الجدول A.10 على معلمة اللامركزية ϕ في (17-2) مع أننا لم نقم بتحديد متوسطات مستويات مستويات العامل μ المنفردة التي يكون من المهم معها استنتاج اختلاف بين متوسطات مستويات العامل. اعتبر مرة أخرى مثال إطارات الجليد حيث يراد اختبار $r = 4$ أنواع من الإطارات والمدى الأصغري لمتوسطات الأعمار الاستهلاكية الأربعة μ الذي يراد اكتشافه باحتمال عالٍ هو $A = 3$ (بالآلاف الأميال). وقيما يلي مجموعات من القيم الممكنة لـ μ والمدى لكل منها هو $A = 3$:

الحالة	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	$\sum(\mu_i - \mu)^2$
1	24	27	25	26	5.00
2	25	25	26	23	4.75
3	25	25	25	28	6.75
4	25	25	26.5	23.5	4.50

وعلى الرغم من أن المدى هو نفسه للحالات الأربع إلا أن الحد $\sum(\mu_i - \mu)^2$ في معلمة اللامركزية ϕ في (17-2) يختلف في كل حالة وتبعا لذلك فإن القوة تختلف. لاحظ أن الحد $\sum(\mu_i - \mu)^2$ أصغر ما يكون في الحالة الرابعة حيث أن قيمة اثنين من متوسطات مستويات العامل تساوي μ ويقع الاثنان الآخران على مسافات متساوية من μ . ويمكن تبين أنه من أجل أي مدى معطى A يكون الحد $\sum(\mu_i - \mu)^2$ أصغر ما يكون عندما تكون متوسطات العامل باستثناء اثنين منها عند القيمة μ . بينما يقع الاثنان هذان الباقيان على مسافات متساوية حول μ وبالتالي لدينا:

$$\min \sum_{i=1}^r (\mu_i - \mu)^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{2}\right)^2 + 0 + \dots + 0 = \frac{\Delta^2}{2} \quad (17.6)$$

وبما أن قوة الاختبار تتغير مباشرة بتغير $\sum(\mu_i - \mu)^2$ ، فإن استخدام (17-6) في حساب الجدول A.10 يضمن كون القوة مساوية على الأقل لـ $(1-\beta)$ لأي مركب من قيم μ ذات المدى A .

(٢-١٧) التخطيط لحجوم العينات عن طريق التقدير

يمكن استخدام أسلوب التقدير لتخطيط أحجام العينات إما مترامناً مع التحكم في الأخطاء من النوع I ومن النوع II أو لذاته. وجوهر هذا الأسلوب هو تحديد المقارنات الرئيسة ذات الأهمية وتحديد العرض لفترات الثقة من أجل أحجام مختلفة للعينات وبمعلومية مسبقاً لقيمة تخطيطية للانحراف المعياري σ . وهذه الطريقة تكرارية إذ تبدأ بقيم مبدئية تتوسمها أحجام العينات المطلوبة. ويمكن تأسيس هذه القيم المبدئية لأحجام العينات المطلوبة على التحكم بمخاطر ارتكاب أخطاء من النوع I ومن النوع II حيث يتم مسبقاً تحديد هذه المخاطر. وعندما يكون عرض فترات الثقة بناءً على أحجام العينات المبدئية مقبلاً تتوقف عملية التكرار، ولكن عندما يكون عرض واحدة أو أكثر من فترات الثقة أكبر مما ينبغي فعندئذ نكرر فنحرب أحجام عينات أكبر، وإذا كان عرض واحدة أو أكثر من فترات الثقة أضيق مما ينبغي فنحرب أحجام عينات أصغر، وتستمر هذه العملية حتى يتم الوصول إلى أحجام العينات التي تؤدي إلى عرض الفترات المقنع الذي نريده.

مثال.

سنخطط لأحجام العينات في مثال إطارات الجليد باستخدام طريقة التقدير وبمعلومية أن أحجام العينات متساوية لكل أنواع الإطارات أي أن $n_1 = n_2 = \dots = n_r$. وقد أشارت الإدارة إلى رغبتها في الحصول على ثلاثة أنواع من التقديرات.

١ - مقارنة بين متوسطي العمر الاستهلاكي لكل نوعين من الإطارات:

$$\mu_1 - \mu_2$$

٢ - مقارنة بين متوسطي العمر الاستهلاكي بين النوعين الأغلى من الإطارات (١ و ٤) والنوعين الأرخص من الإطارات (٢ و ٣).

$$\frac{\mu_1 + \mu_4}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}$$

٣ - مقارنة بين متوسط العمر الاستهلاكي للأنواع القومية من الإطارات (١، ٢، ٤) وبين النوع المحلي (٣):

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4}{3} - \mu_3$$

وفضلا عن ذلك فقد أشارت الإدارة إلى رغبتها في استخدام 0.95 كمعامل ثقة عائلي لمجموعة المقارنات بكاملها.

وسنحتاج في البداية إلى قيمة تخطيطية للانحراف المعياري للعمر الاستهلاكي للإطارات. افترض أننا نرى من الخيرة السابقة أن قيمة الانحراف المعياري $\sigma = 2$ (ألف ميل) تقريبا. بعد ذلك نحتاج إلى قيمة مبدئية لحجوم العينات المطلوبة ولنعتبر $n = 10$ كنقطة ابتداء.

ونعرف من (15.18) أن تباين المتضادة المقترنة \hat{L} عندما تكون $n_i = n$ هو:

$$\sigma^2\{\hat{L}\} = \frac{\sigma^2}{n} \sum c_i^2, \quad n_i = n$$

وهكذا، وبمعلومية $\sigma = 2$ و $n = 10$ فإن توقعاتنا للانحرافات المعيارية للمقدرات

المطلوبة هي:

الانحراف المعياري المتوقع	التباين المتوقع	المتضادة
0.89	$\frac{(2)^2}{10} [(1)^2 + (-1)^2] = .80$	المقارنات الثنائية
0.63	$\frac{(2)^2}{10} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right] = .40$	الأنواع مرتفعة ومنخفضة الثمن
0.73	$\frac{(2)^2}{10} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2 \right] = .53$	الأنواع القومية والمحلية

وسنستخدم طريقة شيفة للمقارنات المتعددة، وسنحتاج لهذا الغرض مضاعف شيفة S

في (15.34a) لقيم $r = 4$, $nr = 10(4) = 40$, $n_T = .95$, $1 - \alpha$:

$$S^2 = (n-1) F(1-\alpha; r-1, n_T-r) = 3 F(.95, 3, 36) = 3 (2.87) = 8.61$$

أو $S = 2.93$ وبذلك يكون عرض فترات الثقة المتوقع هو:

العرض المتوقع لفترة الثقة $\pm S\sigma\{\bar{L}\}$	المتضادة
$\pm 2.93(.89) = \pm 2.61$ (آلاف الأميال)	مقارنات ثنائية
$\pm 2.93(.63) = \pm 1.85$ (آلاف الأميال)	الأنواع مرتفعة ومنخفضة الثمن
$\pm 2.93(.73) = \pm 2.14$ (آلاف الأميال)	الأنواع القومية والمحلية

وقد اقتنعت الإدارة بهذه القيم لعرض الفترات. وقد قررت على أي حال أن تزيد أحجام العينات من 10 إلى 15 في حالة أن الانحراف المعياري الفعلي للعميل الاستهلاكي لأعمار الإطارات كان أكبر من القيمة المثبتة $\sigma = 2$ (ألف ميل).

تعليقات

١ - بما أنه لا يمكن عادة التأكد من أن القيمة التخطئية للانحراف المعياري صحيحة، فننصح بدراسة مدى من قيم الانحراف المعياري قبل التقرير في حجم العينة.

٢ - إذا كانت أحجام العينات المطلوبة غير متساوية، فلا يزال بالإمكان استخدام الطريقة التكرارية التي وُصفت آنفاً مع أسلوب التقدير. وعلى سبيل المثال، افترض أننا نريد مقارنة أربع نكهات جديدة من شراب فاكهة مع معالجة حيادية، هي النكهة الموجودة حالياً. فقد يرغب المرء في أن يزيد حجم العينة في المعالجة الحيادية من أجل زيادة الدقة في هذه المقارنات الأساسية. وافترض أن حجم العينة للمعالجة الحيادية سيكون ضعف أحجام العينات في مستويات العامل الأخرى. فيمكننا أن نخلل حجم العينة في المعالجة الحيادية بـ $2n$ وبقية أحجام العينات بـ n ثم نحضي كالمسابق بتحديد مبدئي لـ n ونستخدم الصيغة (15.18) لإيجاد تباين تقدير المتضادة.

(٣-١٧) تخطيط أحجام العينات لإيجاد "الفضل" معالجة

يكون الهدف الرئيس للدراسة أحياناً هو إيجاد مستوى العامل أو المعالجة التي لها أكبر أو أصغر متوسط μ . فعلى سبيل المثال، في مثال إطارات الجليد، ربما نرغب في تحديد النوع من بين الأنواع الأربعة التي يتمتع بأطول عمر استهلاكي.

ولقد طور بيشهوفر طريقة، وضع بناءً عليها الجدول أ-١١، وتسمح لنا بتحديد أحجام العينات بحيث ينتج أعلى (أقل) متوسط مقرر \bar{y}_i لمستوى عامل من أعلى (أقل) متوسط مجتمع μ باحتمال $1-\alpha$. ولتحديد الاحتمال $1-\alpha$ نحتاج إلى الانحراف المعياري σ وإلى أصغر فرق δ يهمنا اكتشافه، بين أول أعلى (أقل) متوسط

مستوى عامل وثاني أعلى (أقل) متوسط مستوى عامل. ويفترض الجدول أ-١١
حجوم عينات متساوية لجميع مستويات العامل وأن نموذج تحليل التباين (14.2)
مناسب.

مثال

افترض في مثال إطارات الجليد أن الهدف الرئيس هو معرفة نوع الإطار الذي له
أطول عمر استهلاكي. وبأنه يوجد $r=4$. ونقدر كما في السابق أن $\sigma = 2$ (ألف
ميل). وبالإضافة إلى ذلك، نهتم باكتشاف فرق في حدود $\lambda = 1$ (ألف ميل) بين
النوع ذي المتوسط الأعلى والنوع ذي المتوسط الذي يليه. وأن احتمال التعرف بشكل
صحيح على النوع ذي متوسط العمر الإستهلاكي الأعلى، عندما تكون $\lambda = 1$ ، هو
 $1-\alpha = 0.90$ أو أكثر.

والقيمة التي يعطيها الجدول أ-١١ هي $\lambda \sqrt{n/\sigma}$. ونجد من الجدول أ-١١
للقيم $r=4$ واحتمال $1-\alpha=0.90$ أن $\lambda \sqrt{n/\sigma} = 2.4516$. وبما أن قيمة $\lambda = 1$ نجد:

$$\frac{(1)\sqrt{n}}{2} = 2.4516$$

$$\sqrt{n} = 4.9032 \quad \text{أو} \quad n = 25$$

ولذلك، عندما يزيد متوسط العمر الإستهلاكي لأفضل نوع عن النوع الذي يليه
بما لا يقل عن 1 (ألف ميل) وعندما تكون $\sigma = 2$ (ألف ميل) فإن حجوم عينات من
25 إطارا لكل نوع ستزودنا بضمان 0.90 على الأقل بأن النوع ذا المتوسط المقدر
الأعلى \bar{y}_i هو النوع ذو متوسط المجتمع الأعلى.

ملاحظة

عندما لا يكون التخطيط لقيمة الانحراف المعياري دقيقا، فإن عملية تحديد المجتمع
ذي المتوسط الأعلى (الأقل) بشكل صحيح ستتأثر بالطبع. ولن يكون الحال مختلفا
بالنسبة للطرق الأخرى، حيث أن عدم الدقة في تحديد قيمة الانحراف المعياري تؤثر على
مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II أو على عرض فترات الثقة التي نحصل عليها في الواقع.

(٤-١٧) اختبار الرتب لكروسكال - والاس (KRUSKAL - WALLIS)

لقد ذكرنا أن اختبار F في تحليل التباين منيع ضد الحيود عن الطيية، طالما كان هذا الحيود غير مفرط. وفي بعض المناسبات التي لن يكون اختبار F مناسبا فيها، بسبب الحيود الكبير عن الطيية، يمكننا استخدام اختبار لامعلمي. وستناقش الآن اثنين من هذه الاختبارات. اختبار كروسكال - والاس في هذه الفقرة واختبار الوسيط في الفقرة التالية.

إحصاءة اختبار كروسكال - والاس

يعتمد اختبار كروسكال - والاس على رتب المشاهدات. واختبار تساوي متوسطات المعالجات بهذا الاختبار، فإن الفرض الوحيد المطلوب حول توزيعات المجتمعات هو أنها متصلة ولها الشكل نفسه. وهكذا يجب أن يكون لتوزيعات المجتمعات التشتت نفسه، الالتواء نفسه، إلخ، ولكن يمكنها أن تختلف بالنسبة لموقع المتوسط. ونفرض كذلك أن العينات من المجتمعات المختلفة هي عينات عشوائية مستقلة.

في البداية نرتب جميع المشاهدات Y_{ij} وعدتها n_T فتتخذ رتبا من 1 حتى n_T . وليكن \bar{R}_i متوسط رتب المستوى i للعامل و $\bar{R}_{..}$ هو متوسط الرتب الكلي. فتكون إحصاءة الاختبار عندئذ ببساطة:

$$X_{KW}^2 = \frac{SSTR}{SSTO} = \frac{\sum_{i=1}^r n_i (\bar{R}_i - \bar{R}_{..})^2}{\frac{n_T(n_T+1)}{12}} \quad (17.7)$$

حيث البسط هو مجموع مربعات المعالجات المعتاد، ولكن معبرا عن البيانات لأقيمها ولكن برتها، بينما المقام هو تباين الرتب، 1, 2, ..., n_T ويمكن إعادة صياغة X_{KW}^2 بشكل مكافئ كما يلي:

$$X_{KW}^2 = \left[\frac{12}{n_T(n_T+1)} \sum_{i=1}^r n_i \bar{R}_i^2 \right] - 3(n_T+1) \quad (17.7a)$$

فإذا كانت n_i كبيرة بشكل معقول (العدد الذي يُنصح به عادة 5 أو أكثر)، فإن

X_{kw}^2 تتوزع تقريبا كتوزيع متغير عشوائي χ^2_{r-1} بـ $r-1$ درجة حرية، وذلك عندما تكون H_0 صحيحة (أي أن كل μ_i متساوية). وكما هو متوقع، فإن القيم الكبيرة لـ X_{kw}^2 تؤدي إلى استنتاج H_a أي أنه (ليس كل μ_i متساوية). ولذلك عند الاختبارين:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \mu_i \text{ متساوية} \quad (17.8a)$$

فإن قاعدة القرار المناسبة في حالة ضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند القيمة α هي:

$$\text{إذا كان } (1-\alpha, r-1) \chi^2 < X_{kw}^2, \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كان } (1-\alpha, r-1) \chi^2 > X_{kw}^2, \text{ استنتج } H_a \quad (17.8b)$$

مثال. تدير شركة سيرفو — داتا مراكز حاسب آلي في ثلاثة مواقع. وتماثل هذه الأجهزة في منشأ الصنع والطراز، ولكنها تخضع لتذبذبات مختلفة في درجة الكمون في خطوط الكهرباء التي تغذي المواقع التي تحتوي هذه الأجهزة. وترغب الإدارة في اختبار ما إذا كان متوسط طول وقت التشغيل في فترات ما بين أعطال أجهزة الحاسب هو نفسه للمواقع الثلاثة أم لا. والفرضيات البديلة هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \mu_i$$

ويجوز الجدول (١٧-١) الفترات الزمنية الفاصلة بين أعطال أجهزة الحاسب للمواقع الثلاثة وذلك لخمس فترات بين الأعطال لكل منها. وعلى الرغم من أن حجم العينات صغيرة إلا أن البيانات تشير إلى أن التوزيعات ملتبسة إلتواء حادا. وفي الجدول نفسه أعطيت البيانات رتبا من 1 إلى 15 وتم حساب متوسط الرتب.

وباستخدام المعادلة (17-7) حصلنا على إحصاء الاختبار:

$$X_{kw}^2 = \left\{ \frac{12}{15(16)} \left[3(8.2)^2 + (4.8)^2 + (11.0)^2 \right] \right\} - 3(16) = 4.8$$

وتم تحديد مستوى معنوية $\alpha = 0.10$ وبما أن $r = 3$ ، سنحتاج لقيمة $\chi^2_{(90,2)}$ ونجد من الجدول A-3 أن $\chi^2_{(90,2)} = 4.61$ ، وهكذا تكون قاعدة القرار للاختبار بين H_0

و H_a هي:

$$\text{إذا كان } X_{kw}^2 < 4.61 \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كان } X_{kw}^2 > 4.61 \text{ استنتج } H_a$$

وعما أن $X_{kw}^2 > 4.8 > 4.61$ نستنتج H_a ، أي أن متوسط الفترات ما بين أعطال أجهزة الحاسب الآلي تختلف في اللوqع الثلاثة. والقيمة P للاختبار هي $P\{ \chi^2(2) > 4.8 \} = 0.09$.

جدول (١٧-١) الفترات الفاصلة بين أعطال أجهزة الحاسب الآلي (بالساعات) في ثلاث مواقع - مثال سورفو - داتا

الرتبة للمتوسطة	الفترات بين الأعطال					للوقع
	5	4	3	2	1	
\bar{R}_i						i
A						
	22	217	90	3	105	Y_{1i} الزمن
8.2	4	14	10	2	11	R_{1i} الرتبة
B						
	14	37	1	43	56	Y_{2i} الزمن
4.8	3	5	1	7	8	R_{2i} الرتبة
C						
	39	86	219	144	183	Y_{3i} الزمن
11.0	6	9	15	12	13	R_{3i} الرتبة
$\bar{R}_i = 8.0$						

تعليقات

١ - لا يتطلب اختبار كروسكال - والاس، مثله في ذلك مثل اختبار F الإعتيادي، أن تكون حجوم العينات متساوية.

٢ - إذا كانت n_i صغيرة بحيث لا يكون التوزيع التقريبي U ملائماً، فيجب عندئذ استخدام جداول خاصة أخرى لإجراء اختبار كروسكال - والاس، أنظر على سبيل المثال جدول أولين في المرجع 17.1.

٣- في حالة وجود تعادل بين بعض المشاهدات، تُعطى كل من المشاهدات المتعادلة متوسط الرتب التي تنطوي عليها هذه المشاهدات. وهكذا لو أن مشاهدتين تعادلتا في المواقف التي كان ينبغي أن تأخذ بدون التعادل المرتبتين ثالث ورابع، فإن كلا منهما سيعطى القيمة المتوسطة للرتبتين وهي 3.5. ولو ظهر الكثير من هذه التعادلات فيجب تعديل احصاءة الاختبار (17.7).

٤- يمكن، أيضاً، استخدام اختبار كروسكال - والاس للاختبار مابين الفرضيات البديلة التالية:

$$H_0: \text{جميع المجتمعات متطابقة} \quad (17.9)$$

$$H_a: \text{ليست جميع المجتمعات متطابقة}$$

وتتجنب هذه العبارة في قاعدة القرار الفرضية السابقة بكون كل المجتمعات متطابقة فيما عدا مواقع المتوسطات. ولكن لو تمّ التوصل إلى القرار H_0 في (17.9) فلن يتمكن المرء من معرفة سبب هذه الفروق. فمثلاً، يمكن أن تختلف المتوسطات، أو التباينات أو طبيعة الإلتواء أو مركبات من هذه الأسباب.

إحصاءة الاختبار F^*

كثيراً ما تُستخدم احصاءة اختبار بديلة لإحصاءة اختبار كروسكال - والاس X^2 التي تستخدم توزيع كاي مربع، وهي إحصاءة اختبار مبنية على البيانات المرتبة وتستخدم توزيع F . إحصاءة الاختبار البديلة هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} \quad (17.10)$$

وعندما تكون H_0 صحيحة، فإن إحصاءة الاختبار هذه تتبع تقريباً توزيع $F(p-1, n-p)$ ، وذلك عندما تكون أحجام العينات كبيرة.

لنرمز بـ R_i لرتبة Y_i عند ترتيب جميع البيانات من 1 إلى n وكما عرفنا من قبل، فإن R_i هو متوسط الرتب للمستوى i في مستويات العامل، و $\bar{R}..$ هو متوسط الرتب الكلي. ولليانات المرتبة لدينا:

$$\bar{R}_i = \frac{n_i + 1}{2} \quad (17.11)$$

وعندئذ يمكن كتابة إحصاءة الاختبار (17.10) كما يلي:

$$F^* = \frac{\sum n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2}{r-1} + \frac{\sum \sum (R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{n_T - r} \quad (17.12)$$

وقاعدة القرار مع ضبط الخطأ من النوع I عند α هي كالتالي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* < F(1 - \alpha; r-1, n_T - r) \quad (17.13)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* > F(1 - \alpha; r-1, n_T - r)$$

مثال. في مثال سرفو - داتا، نحسب $SSTR$ و SSE بناء على البيانات المرتبة في الجدول

(١٧-١): كما يلي:

$$SSTR = 5[(8.2 - 8.0)^2 + (4.8 - 8.0)^2 + (11.0 - 8.0)^2] = 96.4$$

$$SSE = (11 - 8.2)^2 + (2 - 8.2)^2 + \dots + (6 - 11.0)^2 = 183.6$$

ويكون المتوسط الكلي $\bar{R} = 8.0$ هو $(15 + 1)/2$

ولذلك تكون إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{96.4}{3-1} + \frac{183.6}{15-3} = 3.15$$

ومن أجل $\alpha = 0.10$ نحتاج للقيمة $F(90; 2, 12) = 2.81$ وبما أن $F^* = 3.15 > 2.81$

نستنتج H_0 تماماً كما فعلنا في إحصاءة الاختبار X^2_{KW} . والقيمة P - للاختبار هي

0.08، وهي شبيهة جداً بالقيمة P - لإحصاءة الاختبار X^2_{KW} وهي 0.09.

ملاحظة

يمكن إثبات أن إحصاءة الاختبار (17.10) دالة مباشرة في إحصاءة اختبار

كروسكال - والاس، وعلى وجه التحديد:

$$F^* = \frac{(n_T - r) X^2_{KW}}{(r-1)(n_T - 1 - X^2_{KW})}$$

طريقة اختبار مقارنات ثنائية متعددة

إذا أدى اختبار كروسكال - والاس إلى نتيجة أن متوسطات مستويات العامل

μ غير متساوية، فيُطلب عادة الحصول على معلومات عن القيم المقارنة لهذه

للتوسطات. ويمكن لهذا الغرض استخدام طريقة اختبار عينات كبيرة مشابهة لطريقة يونفروني للمقارنات مثنى مثنى، التي نوقشت في الفقرة ١٥-٥، وهذه الطريقة مؤسسة على رتب المشاهدات، ذلك إذا لم تكن أحجام العينات صغيرة جدا. ويمكن إقامة حدود اختبار لكل الاختبارات مثنى مثنى وعدتها $g = r(r-1)/2$ باستخدام متوسطات الرتب \bar{R}_i ومستوى معنوية عائلي α ، كما يلي:

$$(\bar{R}_i - \bar{R}_r) \pm B \left[\frac{n_r(n_r+1)}{12} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_r} \right) \right]^{1/2} \quad (17.14)$$

حيث:

$$B = z(1 - \alpha/2g) \quad (17.14a)$$

$$g = \frac{r(r-1)}{2} \quad (17.14b)$$

فإذا احتوت حدود الاختبار على الصفر، نستنتج أن المتوسطات المقابلة μ_i و μ_r لا تختلف. أما إذا لم تحتو حدود الاختبار على الصفر، فنستنتج أن متوسطي للمعالجتين المقابلتين مختلفان. وبناء على جميع الاختبارات الثنائية نُكوّن بعد ذلك مجموعات من متوسطات المعالجات التي لا تختلف عناصرها وفقا لطريقة الاختبار التلقائية. وبهذه الطريقة نحصل على معلومات عن القيم للمقارنة لمتوسطات المعالجات μ_i .

مثال لنتائج دراسة سيرفو - داتا في الجدول (١٧-١)، نوّد، إن أمكن، معرفة الموقع ذي المتوسط الأعلى للفترات الفاصلة بين أعطال جهاز الحاسب وعلى ضوء الحيوذ الكبير عن الطبيعية لتوزيع الفترات بين الأعطال فسنبي تحليلاتنا على الرتب، لمستوى معنوية عائلي $\alpha = 0.10$ و $g = r(r-1)/2 = 3(2)/2 = 3$ من الاختبارات الثنائية، فإننا نحتاج لقيمة $B = Z(0.9833) = 2.13$ وبما أن كل أحجام عينات المعالجات متساوية، فإننا نحتاج لحساب الحد الأدنى في (17.14) مرة واحدة فقط:

$$B \left[\frac{n_r(n_r+1)}{12} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_r} \right) \right]^{1/2} = 2.13 \left[\frac{15(16)}{12} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \right]^{1/2} = 6.02$$

وهكذا فإن حدود الاختبار للاختبارات الثنائية الثلاثة هي :

$$A \text{ و } B = 6.02 \pm (4.8 - 8.2) \text{ أو } -2.6 \text{ و } 9.4$$

C و $B \pm 6.02 (4.8 - 11.0)$ أو -2 و 12.2

C و $A \pm 6.02 (4.8 - 11.0)$ أو -3.2 و 8.8

إن الاختبار الوحيد الذي يبين وجود فرق ذي دلالة هو بين الموقعين B و C .
وهكذا نحصل على المجموعتين:

المجموعة ٢	المجموعة ١
الموقع A	الموقع A
الموقع C	الموقع B

وتبين عملية التجميع هذه بأن متوسط الفترات بين أعطال أجهزة الحاسب يختلف بالنسبة للموقعين B و C ، ولكنه لا يختلف لأي زوجين آخرين من المواقع. وهكذا، فإن النتيجة الوحيدة الممكنة عن المقادير المقارنة للمتوسطات من هذه الدراسة هي أن متوسط الفترات بين أعطال أجهزة الحاسب هو في الموقع C أطول منه في الموقع B .

(٥-١٧) اختبار الوسيط

اختبار الوسيط هو اختبار آخر يمكن استخدامه عندما يكون توزيع المجتمعات بعيدا عن الطبيعية. وفي هذا الاختبار نهتم، أيضا، بالاختبار بين الفرضيات البديلة التالية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \mu \text{ متساوية} \quad (17.15a)$$

ويفترض اختبار الوسيط، فقط، أن لجميع المجتمعات الشكل نفسه، ولكن بإمكانها أن تختلف في موقع المتوسط. ويفترض كذلك أن جميع العينات من المجتمعات المختلفة هي عينات عشوائية مستقلة.

إحصاءة اختبار الوسيط

يتم ضم كل بيانات العينة لتحديد قيمة الوسيط للعينة الموحدة. ويتم التحقق، لكل معالجة i ، من عدد المشاهدات التي تكون فوق هذا الوسيط (O_n) وعدد المشاهدات التي لا تحقق ذلك (O_n)، وأخيرا يجري اختبار للتجانس باستخدام إحصاءة الاختبار:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad (17.15b)$$

حيث O_{ij} هو التكرار للمشاهد في أية علية، و E_{ij} هو التكرار المتوقع تحت الفرضية H_0 ، وحيث نفرض تطابق جميع المجتمعات.

وعندما تكون حجم العينات كبيرة بشكل معقول، فإن إحصاء الاختبار χ^2 تنوزع تقريبا تبعا لتوزيع χ^2 بـ $r-1$ درجة حرية، وذلك عندما تكون H_0 صحيحة. وتؤدي القيم الكبيرة لـ χ^2 إلى استنتاج H_0 . وبالتالي قاعدة القرار المناسبة التي تضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند القيمة α هي:

$$\text{إذا كان } \chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha; r-1)} \text{ استنتج } H_0 \quad (17.15c)$$

$$\text{إذا كان } \chi^2 > \chi^2_{(1-\alpha; r-1)} \text{ استنتج } H_a$$

مثال

سنعتبر مرة أخرى مثال سيفرو - داتا الذي يتعلق بالفترات بين أعطال أجهزة الحاسب في ثلاثة مواقع مختلفة. لقد تم الحصول على خمس عشرة مشاهدة إضافية للفترات بين الأعطال في كل موقع، وذلك للحصول على معلومات أكثر دقة. وكان الوسيط لعدد الساعات بين الأعطال للعينات الخمسة التي تتكون من 60 مشاهدة هو 64 ساعة. ويلخص الجدول (٢-١٧) نتائج العينات الثلاث (البيانات الأصلية غير موضحة هنا). والقيم المتوقعة عندما تكون جميع المجتمعات متطابقة موضحة بأقواس في الجدول (٢-١٧). وتم الحصول على هذه القيم بتوزيع التكرار الكلي في كل عمود على أجهزة الحاسب الثلاثة على ضوء نسبة العدد الكلي من المشاهدات لكل جهاز. وفي مثالنا هنا تم الحصول على 20 مشاهدة لكل جهاز ولذلك تم تخصيص التكرارات الثلاثين التي فوق الوسيط بالتساوي لكل جهاز وبطريقة مشابهة تم تخصيص التكرارات الثلاثين التي لا تزيد عن الوسيط بالتساوي لكل جهاز. وهذه هي إذن التكرارات المتوقعة لو كان لكل المجتمعات الوسيط نفسه، أي لو كانت بالتالي متطابقة.

وتُحسب إحصاء الاختبار باستخدام (17.15b)

$$\chi^2 = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} + \dots + \frac{(6-10)^2}{10} = 14.8$$

وقد تم تحديد مستوى المعنوية ليكون $\alpha = 0.05$ و بالتالي سنحتاج للقيمة $5.99 = \chi^2_{(2, 0.95)}$ ، وبذلك تصبح قاعدة القرار:

إذا كان $\chi^2 < 5.99$ استتج H_0

إذا كان $\chi^2 > 5.99$ استتج H_a

وبما أن $5.99 < 14.8 = \chi^2$ ، نستتج H_a . أي أن متوسط عدد الساعات بين أعطال أجهزة الحاسب غير متساوية للمواقع الثلاثة. والقيمة P - للاختبار هي $P\{\chi^2(2) > 14.8\} = .001$.

جدول (٢-١٧) تكرارات الفترات مابين أعطال أجهزة الحاسب في المواقع الثلاثة مثال سوفو - داتا
بيانات مكررة.

عدد المشاهدات					
الموقع	i	فوق الوسيط		ليس فوق الوسيط	
		O_{12}	E_{12}	O_{12}	E_{12}
A	13	(10)	7	(10)	20
B	3	(10)	17	(10)	20
C	14	(10)	6	(10)	20
المجموع	30		30		60

المجموع الوسيط للعينه الموحدة = 64 ساعة

ملاحظة

لا يتطلب اختبار الوسيط، مثله مثل اختبار كروسكال - والاس، كون حجم العينات متساوية.

(٦-١٧) نموذج تحاين II - مستويات العامل عشوائية

ذكرنا سابقا أن هناك بعض المناسبات التي لا يكون لمستويات العامل أو المعالجات المستعملة أهمية خاصة لنهايتها، ولكنها تكون عينة من مجتمع أكبر من مستويات العامل. ونموذج التحاين II مصمم لحالات من هذا النوع. اعتمد على سبيل المثال،

شركة أيبكس للمشاريع، التي تبني مطاعم تحمل أسماء تجارية على جوانب الطرق، ومن ثمّ تمنح للأفراد حقوق امتياز لتشغيل هذه المطاعم وتقدم لهم خدمات إدارية. وتوظف هذه الشركة عددا كبيرا من المسؤولين في شؤون الموظفين الذين يقابلون المتقدمين للعمل في هذه المطاعم. وفي نهاية المقابلة يعطي المسؤول تقديرا ذاتيا لرتبة تصنيف تتراوح بين 0 و 100 ، يشير فيها إلى أهلية المتقدم لشغل هذه الوظيفة أو العمل. افترض الآن أنه اختبر خمسة مسؤولين عشوائيا، وتسمّ عشوائيا تخصيص أربعة مرشحين لكل منهم. وفي هذه الحالة لا ترغب الشركة في إيجاد استقراءات عن المسؤولين الخمسة، الذين اتفق أن تمّ اختيارهم للمهمة، ولكن ترغب في إيجاد استقراءات عن مجتمع كافة مسؤولي شؤون الموظفين. والأسئلة التي يمكن أن تكون محل اهتمام هنا تتضمن: ماهو حجم التشتت في التقديرات بين جميع مسؤولي شؤون الموظفين؟ ماهو متوسط التقديرات لكل المسؤولين؟

ويمكن رؤية الفرق بين هذه الحالة، التي صمّم لها نموذج التحاي II ، والحالة التي يكون فيها نموذج التحاي I المثبت مناسبة، بتعديل مثالنا قليلا. فلو أن شركة أصفر كان لديها خمسة مسؤولين لشؤون الموظفين وتمّ إدخالهم جميعا في الدراسة وكان الاهتمام ينصب على هؤلاء المسؤولين الخمسة، فإن نموذج التحاي I سيكون مناسبة، ذلك لأن مستويات العامل (المسؤولين الخمسة) لم تعد تعتبر عينة من مجتمع أكبر، وأي تكرار للتحربة في الشركة الأصفر سيتضمن المسؤولين الخمسة أنفسهم، ولكن في حالة الشركة الكبيرة، فإن أي تكرار سيتضمن عينة عشوائية جديدة من خمسة مسؤولين وستألف غالبا من موظفين مختلفين.

نموذج متوسطات الاختلايا العشوائي

نموذج التحاي II لتحليل التباين وحيد العامل هو كالتالي:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (17.16)$$

حيث:

μ_i مستقلة و $N(0, \sigma_\mu^2)$

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

μ_i و ε_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة.

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n_i$$

ونموذج التحاين (17.16) مماثل في شكله لنموذج التحاين للمثبت (14.2)، والفرق الرئيس بينهما هو أن متوسطات مستويات متغيرات العامل μ_j مثبتة في نموذج التحاين I، بينما هي في نموذج التحاين II متغيرات عشوائية. ولهذا السبب، يقال عادة لنموذج التحاين (17.16) نموذج التحاين العشوائي. ولاحظ أن نموذج التحاين (17.16) هو نسخة من نموذج متوسطات الخلايا.

معنى حدود النموذج سنشرح معنى حدود النموذج بالرجوع إلى مثال مسؤولي شؤون الموظفين في مثال أيكس للمشاريع. بدل الحد μ_j على متوسط كل رتب التصنيف التي وضعها المسؤول I لو أنه قابل جميع المستخدمين المحتملين والقيمة المتوقعة لـ μ_j هي μ_j . وهكذا فإن μ_j تمثل في هذا المثال متوسط رتب التصنيف لكل المستخدمين المحتملين التي يمكن أن يضعها كافة مسؤولي شؤون الموظفين. ويقاس تشتت μ_j بالتباين σ_j^2 فكلما ازداد اختلاف مسؤولي شؤون الموظفين في متوسطات رتبهم التصنيفية (على سبيل المثال، قد يُعطي بعضهم دائما رتبا تصنيفية أعلى مما يعطيه الآخرون)، كلما كبرت σ_j^2 . ومن جهة أخرى، لو أن كل المسؤولين أعطوا رتبا تصنيفية عند متوسط المستوى نفسه، فإن كل μ_j متساوي μ وبالتالي ستكون $\sigma_j^2 = 0$.

وبمثل الحد μ_j التشتت الموافق للقيم المختلفة للمقدرات الممكنة لمختلف المستخدمين المحتملين. لاحظ أن نموذج التحاين (17.16) يفرض أن لكل الحدود μ_j التباين نفسه σ_j^2 ، وهذا يعني أن نفرض التشتت نفسه من أجل توزيعات الرتب التصنيفية لكافة المستخدمين المحتملين الناتجة عن مسؤولي شؤون الموظفين المختلفين. وعلى أية حال، فيمكن للتوزيعات الناتجة عن مسؤولي شؤون الموظفين المختلفين أن تختلف في متوسطاتها.

وبمثل الشكل (١٧-١) نموذج التحاين II، ففي الأعلى نبين توزيع μ_j ، وهو توزيع طبيعي. وقد اختير بشكل عشوائي عدد من الـ μ_j (اثنان في هذا التوضيح) من هذا التوزيع. وكل منها يؤدي بدوره إلى توزيع لـ $y_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij}$ ، وهي كلها توزيعات

طبيعية ولها التباين نفسه وقد اختر عدد من المشاهدات Y_{ij} (اثان في هذا التوضيح) من كل من هذه التوزيعات.

سمات مهمة للنموذج

١ - القيمة المتوقعة لأي مشاهدة Y_{ij} هي:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu \quad (17.17a)$$

إذ لدينا من (17.16):

$$\begin{aligned} E\{Y_{ij}\} &= E\{\mu_i\} + E\{e_{ij}\} \\ &= \mu + 0 \\ &= \mu \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا التوقع هو المتوسط فوق كل الاختيارات لكل من μ_i و e_{ij} .

٢ - تباين Y_{ij} والذي سنرمز له بـ σ_Y^2 هو:

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma^2 \quad (17.17b)$$

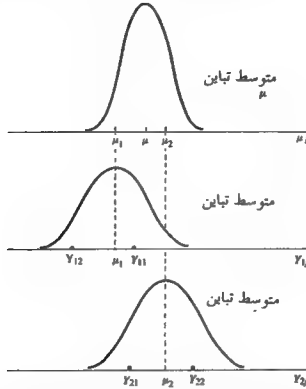
وبالتالي، فإن لكل المشاهدات Y_{ij} التباين نفسه. وحصلنا على النتيجة في (17.17b) لأن نموذج التحاين II يفرض أن μ_i و e_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة. وأن $\sigma_\mu^2 = \sigma^2\{\mu_i\}$ و $\sigma^2\{e_{ij}\} = \sigma^2$ وفقا لنموذج التحاين (17.16). ولأن تباين Y في هذا النموذج عبارة عن مجموع مركبتين هما σ_μ^2 و σ^2 فإن هذا النموذج يدعى أحيانا نموذج مركبات التباين.

٣ - تتبع الـ Y_{ij} التوزيع الطبيعي ذلك لأنها تركيبات خطية في متغيرات طبيعية مستقلة هي μ_i و e_{ij} .

٤ - خلافا لنموذج التحاين I المثبت حيث تكون جميع المشاهدات Y_{ij} مستقلة، فإن Y_{ij} لنموذج التحاين II العشوائي تكون مستقلة، فقط، إذا كانت تتعلق بمستويات عامل مختلفة. ويمكن تبيان أن التباين لأي مشاهدتين Y_{ij} و $Y_{i'j'}$ من المستوى i نفسه للعامل المدروس، هو في نموذج التحاين (17.16):

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{i'j'}\} = \sigma_\mu^2 \quad j \neq j' \quad (17.17c)$$

شكل (١٧-١) تمثيل لنموذج التحاين II



وهكذا، فإن نموذج التحاين العشوائي (17.16) يفترض أن التباين بين أي مشاهدين في مستوى العامل نفسه يبقى ثابتاً في كل مستوى من مستويات العامل. والسبب في أن أي مشاهدين في مستوى العامل نفسه مرتبطتان هو أننا نتوقع، قبل المحاولات العشوائية، أي قبل تنفيذ التجربة، أن تكون المشاهدات متشابهة، ذلك لأن لكل منهما المركبة العشوائية μ نفسها وستختلفان، فقط، بسبب حدود الخطأ ϵ_{ij} .

ولكن حال الانتهاء من اختيار مستويات العامل، فإن نموذج التحاين العشوائي (17.16) يفترض أن أي مشاهدين في مستوى العامل نفسه مستقلتان، ذلك لأن متوسط مستوى العامل μ يصبح عندئذٍ ثابتاً. وتختلف المشاهدتان، فقط، بسبب حدود الخطأ ϵ_{ij} التي يجب أن تكون مستقلة. ولذلك في مثال شركة أيبكس للمشاريع، حالما يتم اختيار مسؤولي شؤون الموظفين، فإن نموذج التحاين العشوائي (17.16)

يفترض أن رتب التصنيف Y_i لأي مسؤول بعينه مستقلة.

ملاحظة

أحياناً يكون مجتمع الـ μ_i صغيراً نوعاً ما، ولذلك يجب معاملته كمجتمع متته. ويمكن القيام بذلك إلا أننا لن نناقش هذه الحالة هنا. وفي حالة كون مجتمع الـ μ_i منتهياً، ولكنه كبير، فإننا سنحصر القليل عند معاملته كمجتمع غير متته. وفي الواقع هذا هو ما عملناه في مثالنا التوضيحي لمسؤولي شؤون الموظفين. فعدد المسؤولين منته، ولكن بسبب وجود العديد منهم فقد عاملنا مجتمع الـ μ_i كمجتمع غير متته. وهكذا نجد حالتين أساسيتين عند معاملة مجتمع الـ μ_i كمجتمع غير متته هما الحالة التي يكون فيها المجتمع منتهياً ولكنه كبير، والحالة التي يتركز فيها اهتمامنا على العملية التي تقف خلف توليد المقادير μ_i .

أُسئلة مهمة . عندما يكون نموذج التحاين II ملائماً، لاهتم عادة بالاستقرعات عن قيم μ_i بالذات التي انطوت عليها الدراسة، كأن نستقرئ مثلاً عن صغيرها وكبيرها، ولكننا نهتم بالاستقرعات عن كل مجتمع الـ μ_i . وعلى وجه التحديد يتركز الاهتمام على متوسط الـ μ_i ، أي μ ، وعلى تشتت μ_i الذي يقاس بـ σ_{μ}^2 . فعلى سبيل المثال، في مثال شركة أيبكس للمشاريع، لن تكون الإدارة عادة مهتمة بمتوسط رتب التصنيف للمسؤولين الخمسة، الذين اتفق أن تضمّنهم الدراسة، كاهتمامها بمتوسط رتب التصنيف لجميع مسؤولي شؤون الموظفين، وبأثير التشتت بين المسؤولين كافة. وعلى الرغم من أن σ_{μ}^2 مقياس مباشر لتشتت μ_i ، فإن تأثير هذا التشتت يقاس عادة بشكل أفضل عن طريق النسبة.

$$\frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2} \quad (17.18)$$

ونلاحظ المميزات التالية لهذه النسبة:

١ - تأخذ النسبة القيم ما بين 0 (عندما تكون $\sigma^2 = \infty$) و 1 (عندما تكون $\sigma^2 = 0$).

٢ - المقام هو σ_T^2 وفقاً لـ (17.17b).

٣ - على ضوء الخاصيتين ١ و ٢، فإن النسبة تقيس النسبة من تباين Y_g الكلي المفسر بتشتت μ_g . وبالرجوع إلى مثال شركة أيبكس للمشاريع، يقيس المقام في النسبة تشتت كل رتب التصنيف لجميع المرشحين التي وضعها المسؤولون كافة، وقيس البسط تشتت متوسطات رتب التصنيف لكل من المسؤولين. وبالتالي، فإن تلك النسبة تقيس الحصة من التشتت الكلي لرتب التصنيف العائدة إلى الفروق بين مسؤولي شؤون الموظفين. فإذا كانت النسبة قريبة من الصفر، فإن الفروق بين مسؤولي شؤون الموظفين ليست ذات دلالة. ومن جهة أخرى، إذا كانت النسبة كبيرة، لنقل 0.5 أو أكثر، فعندئذ يكون الكثير من التشتت الكلي عائداً إلى الفروق بين مسؤولي شؤون الموظفين، وبالتالي، قد ترغب الإدارة في دراسة إمكانية المزيد من التدريبات لمسؤولي شؤون الموظفين لتحسين انتظام وانسجام رتب التصنيف التي يمنحونها.

ملاحظة

يمكن تبين أن معامل الارتباط بين أي مشاهدين من المستوى نفسه للعامل المدروس في نموذج التحاين العشوائي (17.16) هو:

$$\rho\{Y_g, Y_g\} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2} \quad (17.19)$$

ولذلك فإن المقياس في (17.18) هو في الواقع معامل الارتباط بين أي مشاهدين من مستوى العامل نفسه، والذي يعني هنا النسبة من التشتت الكلي لـ Y_g المفسر بتشتت المقادير μ_g .

والنتيجة في (17.19) تتبع من تعريف معامل الارتباط في (13.7):

$$\rho\{Y_g, Y_g\} = \frac{\sigma\{Y_g, Y_g\}}{\sigma\{Y_g\}\sigma\{Y_g\}}$$

فالتغاير معطى في (17.17c) و $\sigma\{Y_g\} = \sigma\{Y_g\} = \sigma_g$ معطى في (17.17b).

اختيار لمرفة ما إذا كان $\sigma_\mu^2 = 0$

سنعتبر في البداية كيفية التقرير بين:

$$H_0: \sigma_\mu^2 = 0 \quad (17.20)$$

$$H_a: \sigma_\mu^2 > 0$$

وتتضمن H_0 أن جميع الـ μ_i متساوية، أي أن $\mu_i = \mu$. وتتضمن H_a أن الـ μ_i تختلف. ففي مثال مسؤولي شؤون الموظفين، تتضمن H_0 أن متوسطات رتب التصنيف لجميع مسؤولي شؤون الموظفين متساوية، بينما تتضمن H_a أنها مختلفة.

وبالرغم من حقيقة أن نموذج التحاين II يختلف عن نموذج التحاين I، إلا أن تحليل التباين في الدراسة وحيدة العامل يجري بالأسلوب نفسه. (ولكن ليس الأمر كذلك في حالات أكثر تعقيدا). ويظهر الفرق بين النموذجين في توقع متوسط المربعات. وبطريقة مشابهة لتلك التي استعملت في نموذج التحاين I، يمكن في حالة نموذج التحاين II تبيان أن:

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \quad (17.21)$$

$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + n' \sigma_\mu^2 \quad (17.22)$$

حيث:

$$n' = \frac{1}{r-1} \left[\left(\sum n_i \right) - \frac{\sum n_i^2}{\sum n_i} \right] \quad (17.22a)$$

وإذا كانت جميع الـ $n_i = n$ ، فعندئذٍ $n' = n$.

ومن الواضح من (17.21) و (17.22) أنه إذا كانت $\sigma_\mu^2 = 0$ ، فإن MSE و $MSTR$ لهما التوقع نفسه σ^2 ، وفيما عدا ذلك، فإن $E\{MSTR\} > E\{MSE\}$ وذلك لأن $n' > 0$ دائما. وبالتالي فإن القيم الكبيرة لإحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} \quad (17.23)$$

ستؤدي إلى استنتاج H_a في (17.20). ومرة أخرى، بما أن F^* تتبع توزيع F عندما تكون H_0 صحيحة، فإن قاعدة القرار التي تضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند α هي نفسها التي استعملت في نموذج التحاين I:

$$(17.24) \quad \text{إذا كان } F \leq F^* (1 - \alpha, r - 1, n_T - r) \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كان } F > F^* (1 - \alpha, r - 1, n_T - r) \text{ استنتج } H_a$$

مثال. يحوي الجدول (٣-١٧) نتائج دراسة لشركة أليكس للمشاريع حول رتب التصنيف التي وضعها مسؤولون من شؤون الموظفين لتقويم مقدرة المتقدمين للعمل في الشركة، حيث تم اختيار خمسة مسؤولين عشوائيا، وتم عشوائيا تخصيص أربعة متقدمين لكل مسؤول. وكانت حسابات التحاين روتينية وقد تمت باستخدام حزمة حاسب آلي. ويوضح الجدول (٤-١٧) النتائج، وكذلك يوضح هذا الجدول توقع متوسط المربعات بشكل عام، وفي هذا المثال على وجه الخصوص.

وباستخدام البيانات في الجدول (٤-١٧)، فإن إحصاء الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{370}{75.6} = 4.89$$

وبافتراض أننا نود ضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع الأول عند $\alpha = 0.05$ ، فإننا سنحتاج لقيمة $F(0.95; 4, 15) = 3.06$ وبالتالي، فإن قاعدة القرار هي:

$$\text{إذا كان } F^* \leq 3.06 \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كان } F^* > 3.06 \text{ استنتج } H_a$$

وبما أن $F^* = 4.89 > 3.06$ فنستنتج H_a ، أي أن $\sigma_\mu^2 > 0$ ، أو بمعنى آخر إن متوسطات رتب التصنيف لمسؤولي شؤون الموظفين تختلف. والقيمة P - للاختبار هي ٠.٠١.

جدول (٣-١٧) رتب التصنيف التي وضعها خمسة مسؤولين من شؤون الموظفين - مثال شركة أليكس للمشاريع

المسؤول	المرشح (j)				متوسط
	1	2	3	4	
A	76	64	85	75	$\bar{Y}_1 = 75$
B	58	75	81	66	$\bar{Y}_2 = 70$
C	49	63	62	46	$\bar{Y}_3 = 55$
D	74	71	85	90	$\bar{Y}_4 = 80$
E	66	74	81	79	$\bar{Y}_5 = 75$
					$\bar{Y} = 71$
					متوسط

جدول (٤-١٧) جدول تحالين لنموذج التحالين II، وحيد العامل - مثال حركة أيبكس للمشروع.

$E(MS)$					مصدر التغير
المثال	عامية	MS	df	SS	
$\sigma^2 + 4\sigma_\mu^2$	$\sigma^2 + n'\sigma_\mu^2$	$MSTR = 370$	4	$SSTR = 1,480$	ما بين المسؤولين
σ^2	σ^2	$MSE = 75.6$	15	$SSE = 1,134$	الخطأ (ما ضمن المسؤولين)
				$SSTO = 2,614$	المجموع

$$n' = \frac{1}{r-1} \left[\left(\sum n_i \right) - \frac{\sum n_i^2}{\sum n_i} \right]$$

إذا كان كل n_i مساوياً n فإن $n' = n$

ملاحظة

سنوضح استنباط توقع متوسط المربعات لنموذج التحالين II عن طريق بيان الخطوات الرئيسة لعملية استنباط $E(MSTR)$ في (17.22) عندما تكون $n_i = n$. ويوازي البرهان هنا البرهان المقابل في نموذج التحالين I. ومن النموذج (17.16) يمكن أن نكتب:

$$\bar{Y}_i = \mu_i + \bar{\epsilon}_i$$

$$\bar{Y} = \bar{\mu} + \bar{\epsilon}$$

حيث $\bar{\epsilon}_i$ و $\bar{\epsilon}$ معرفتان في (14.42) و (14.45)، على التوالي و:

$$\bar{\mu} = \frac{\sum \mu_i}{r}$$

(لاحظ أننا استخدمنا هنا ترميزاً لمتوسط μ_i يختلف عن ذلك الموجود في نموذج التحالين I، وذلك للتأكيد على الطبيعة العشوائية للمتوسط في نموذج التحالين II) ووفقاً لـ (14.47) نحصل على:

$$\bar{Y}_i - \bar{Y} = (\mu_i - \bar{\mu}) + (\bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon})$$

بحيث يكون :

$$\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum (\mu_i - \bar{\mu})^2 + \sum (\bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon})^2 + 2 \sum (\mu_i - \bar{\mu})(\bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon})$$

وعند أخذ التوقع، يسقط الحد الجداثي وذلك بسبب استقلال μ_i و $\bar{\epsilon}_i$ ، ولأن الانحرافات $\bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}$ و $\mu_i - \bar{\mu}$ لها جميعا التوقع صفر. ونعرف من (14.50) أن:

$$E\left\{\sum (\bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon})^2\right\} = \frac{(r-1)\sigma^2}{n}$$

وأيضا، بما أن $\sum (\mu_i - \bar{\mu})^2$ هو البسط في تباين العينة الاعتيادي لـ r من المشاهدات μ_i المستقلة، فنجد من عدم انحياز تباين العينة أن:

$$E\left\{\sum (\mu_i - \bar{\mu})^2\right\} = (r-1)\sigma_\mu^2$$

وبالتالي، نحصل على:

$$E\left\{\frac{n}{r-1} \sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right\} = \frac{n}{r-1} \left[(r-1)\sigma_\mu^2 + \frac{r-1}{n} \sigma^2 \right] = n\sigma_\mu^2 + \sigma^2$$

وهي النتيجة نفسها في (17.22) في حالة $n_0 = n$.

لتقدير μ

عندما يكون نموذج التحاين II ملائما، نهتم بتقدير المتوسط الكلي μ . وسنفرض عند تطويرنا لتقدير فترة لـ μ أن أحجام العينات لجميع مستويات العامل متساوية، أي أن $n_0 = n$.

ونعرف من (17.17a) أن:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu$$

ولذلك فإن مقدرًا غير متحاز لـ μ هو:

$$\hat{\mu} = \bar{Y} \quad (17.25)$$

ويمكن إثبات أن تباين هذا المقدر هو:

$$\sigma^2(\bar{Y}) = \frac{\sigma_\mu^2}{r} + \frac{\sigma^2}{n_r} = \frac{n\sigma_\mu^2 + \sigma^2}{n_r} \quad (17.27)$$

لنذكر هنا أن $n_r = rn$.

وتبين الصيغة (17.26) أن تباين \bar{Y} يتكون من مركبتين. الأولى تدل على تباين

متوسط عينة بناءً على r من المشاهدات عند المعاينة من مجتمع الـ μ ، وهي تعكس

الإسهام العائد لمعاينة مستويات العامل. والركبة الثانية تدل على تباين متوسط عينة بناءً على n_T من المشاهدات عند المعاينة من مجتمعات الـ Y_i معلومية الـ μ_i ، وهي تعكس الإسهام العائد للتشتت ضمن مستويات العامل.

وكمقدّر غير منحاز لـ $\{ \bar{Y}_{..} \}^2 \sigma^2$ نجد:

$$s^2 \{ \bar{Y}_{..} \} = \frac{MSTR}{n_T} \quad (17.27)$$

وهذا المقدّر غير منحاز لأننا نعرف من (17.22)، وعندما تكون $n_i = n$ أن:

$$E\{MSTR\} = n\sigma_p^2 + \sigma^2 \quad (17.28)$$

(نذكر أن $n' = n$ عندما تكون $n_i = n$) وبقسمة النتيجة في (17.28) على n_T نحصل على (17.26).

ويمكن إثبات أن:

$$\frac{\bar{Y}_{..} - \mu_{..}}{s\{ \bar{Y}_{..} \}} \quad (17.29)$$

يتبع توزيع t لنموذج التحاين (17.16) وذلك عندما تكون

$n_i = n$. وبالتالي يمكننا الحصول على حدي الثقة لـ μ بالطريقة المعتادة:

$$\bar{Y} \pm t(1 - \alpha/2; r-1) s\{ \bar{Y} \} \quad (17.30)$$

مثال. ترغب الإدارة في شركة أيكس للمشاريع بتقدير متوسط، رتب التصنيف التي يضعها مسؤولو شؤون الموظفين جميعهم للمستخدمين المحتملين كافة، وذلك باستخدام

90% فترة ثقة. ولدينا من الجدولين (٣-١٧) و (٤-١٧) مايلي:

$$\bar{Y}_{..} = 71 \quad MSTR = 370 \quad n_T = 20$$

ونحتاج لقيمة $t(0.95; 4) = 2.132$ وكذلك:

$$s^2 \{ \bar{Y}_{..} \} = \frac{370}{20} = 18.5$$

وبالتالي يكون $s\{ \bar{Y}_{..} \} = 4.301$ ويكون حدا الثقة $71 \pm 2.132(4.301)$

والـ 90% فترة ثقة المطلوبة هي:

$$62 \leq \mu \leq 80$$

ولذلك نستنتج بـ 90% معامل ثقة أن متوسط رتب التصنيف التي يمنحها جميع مسؤولي شؤون الموظفين لكل المستخدمين المحتملين تتراوح بين 62 و 80. وتقدير الفقرة هنا ليس دقيقاً جداً لأن حجم العينات لمسؤولي شؤون الموظفين وللمستخدمين المحتملين صغيرة نوعاً ما.

ملاحظة

يمكن استنباط تباين $\bar{Y}_{..}$ في (17.26) بسهولة. ونعتبر في البداية:

$$\bar{Y}_{i.} = \mu_i + \bar{\varepsilon}_{i.}$$

حيث $\bar{\varepsilon}_{i.}$ معرفة في (14.42). وبسبب استقلال μ_i و ε_{ij} نجد:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \sigma_{\mu}^2 + \frac{\sigma^2}{r}$$

لنذكر أن $\bar{\varepsilon}_{i.}$ هو المتوسط المعتاد لـ n من المشاهدات المستقلة ε_{ij} .

وفي حالة $n_i = n$ التي نعتبرها هنا نجد:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^r \bar{Y}_{i.}}{r}$$

وفي ضوء استقلال الـ μ_i عن الـ ε_{ij} واستقلال المقادير μ_i فيما بينها والمقادير ε_{ij} فيما

بينها، نجد أن المقادير $\bar{Y}_{i.}$ مستقلة بحيث يكون:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{..}\} = \frac{\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\}}{r} = \frac{\sigma_{\mu}^2}{r} + \frac{\sigma^2}{rn} = \frac{n\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2}{n_r}$$

تقدير $\sigma_{\mu}^2 / (\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2)$

كما ذكرنا سابقاً، فإن النسبة $\sigma_{\mu}^2 / (\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2)$ تكشف بجلاء عن مدى تشتت المقادير μ_i . وللحصول على تقدير يفضو لهذه النسبة، سنفرض أن حجم العينات لكل مستويات العامل متساوية، أي أن $n_i = n$.

وسنبداً بالحصول على حدى ثقة للنسبة $\sigma_{\mu}^2 / \sigma^2$. وسنحتاج أولاً إلى ملاحظة أن $MSTR$ و MSE هي في نموذج التحاين II، تماماً كما في نموذج التحاين I، منفصلات عشوائية مستقلة. وعندما تكون $n_i = n$ يمكن إثبات أن:

$$\frac{MSTR}{n\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2} + \frac{MSE}{\sigma^2} \sim F(r-1, n_T-r) \quad , \quad n_T = n \quad (17.31)$$

ولذلك يمكننا كتابة العبارة الاحتمالية التالية:

$$P\left\{F(\alpha/2; r-1, n_T-r) \leq \frac{MSTR}{n\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2} + \frac{MSE}{\sigma^2} \leq F(1-\alpha/2; r-1, n_T-r)\right\} = 1-\alpha \quad (17.32)$$

وبإعادة ترتيب المراجحات، نحصل على حدي الثقة L و U لـ $\sigma_{\mu}^2 / \sigma^2$ كما يلي:

$$L = \frac{1}{n} \left[\frac{MSTR}{MSE} \left(\frac{1}{F(1-\alpha/2; r-1, n_T-r)} \right) - 1 \right] \quad (17.33a)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{MSTR}{MSE} \left(\frac{1}{F(\alpha/2; r-1, n_T-r)} \right) - 1 \right] \quad (17.33b)$$

حيث L هو حد الثقة الأدنى و U هو الحد الأعلى.

ويمكن الآن الحصول بسهولة على حدي الثقة L^* و U^* لـ $\sigma_{\mu}^2 / (\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2)$ ، وهي

كما يلي:

$$L^* = \frac{L}{1+L} \quad \text{و} \quad U^* = \frac{U}{1+U} \quad (17.34)$$

مثال. ترغب إدارة شركة أليكس للمشاريع في وضع فترة ثقة لـ $\sigma_{\mu}^2 / (\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2)$.

ومن نتائجنا السابقة وجدنا:

$$MSTR = 370 \quad MSE = 75.6 \quad n = 4 \quad r = 5 \quad n_T = 20$$

ولـ 90% فترة ثقة سنحتاج إلى القيمة:

$$F(.05; 4, 15) = .170 \quad F(.95; 4, 15) = .06$$

ومن (17.33) يكون حدي الثقة لـ $\sigma_{\mu}^2 / \sigma^2$:

$$L = \frac{1}{4} \left[\frac{370}{75.6} \left(\frac{1}{3.06} \right) - 1 \right] = .15 \quad \text{و} \quad U = \frac{1}{4} \left[\frac{370}{75.6} \left(\frac{1}{.170} \right) - 1 \right] = 6.9$$

وفترة الثقة لـ $\sigma_{\mu}^2 / \sigma^2$ هي:

$$.15 \leq \frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma^2} \leq 6.9$$

وأخيراً، فإن حدي الثقة لـ $(\sigma_\mu^2 + \sigma^2) / \sigma_\mu^2$ هما من (17.34)، $L^* = 1.15/1.15 = 1.13$ و $U^* = 6.97/9 = 0.87$ ، بحيث تكون 90% فترة ثقة كالتالي:

$$1.13 \leq \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2} \leq 0.87$$

وبالتالي نستنتج بـ 90% معامل ثقة أن تشتت متوسطات رتب التصنيف لمسؤولي شؤون الموظفين المختلفين يفسر ما يتراوح بين 13 و 87 في المئة من التشتت الكلي لرتب التصنيف كافة. لاحظ أن تقدير الفترة هذا ليس دقيقاً جداً. والسبب هو صغر حجم العينات نوعاً ما. ومع ذلك، فالفترة تشير عموماً إلى أن التشتت بين مسؤولي شؤون الموظفين ليس نافعاً باعتباره يفسر ما لا يقل عن 13 في المئة من التشتت الكلي.

تعليقات

١ - قد يحدث من وقت لآخر أن يكون الحد الأدنى في فترة الثقة لـ σ_μ^2 / σ^2 سالباً. وبما أن هذه النسبة لا يمكن أن تكون سالبة، فبالإجراء المعتاد في هذه الحالة هو اعتبار الحد الأدنى لـ L في (17.33) صفراً.

٢ - إذا كان المطلوب اختبارات ذات جانب واحد أو اختبارات ذات جانبيين تتعلق بالحجوم النسبية لـ σ_μ^2 و σ^2 ، مثال على ذلك الفرضيات التالية (حيث c ثابت عددي).

$$\begin{array}{ll} H_0: \sigma_\mu^2 \leq c\sigma^2 & H_a: \sigma_\mu^2 = c\sigma^2 \\ H_0: \sigma_\mu^2 > c\sigma^2 & H_a: \sigma_\mu^2 \neq c\sigma^2 \end{array}$$

فيمكن في هذه الحالة وضع قاعدة القرار باستخدام (17.31). أو يمكن، بدلاً من ذلك إنشاء فترات ثقة ذات جانب واحد أو جانبيين، ومن ثمّ يمكن التوصل منها إلى القرار المناسب. فعلى سبيل المثال، افترض في مثال شركة أيبكس للمشاريع أننا نريد اختبار الفرضية:

$$\begin{array}{l} H_0: \sigma_\mu^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 \\ H_a: \sigma_\mu^2 \neq \frac{1}{2}\sigma^2 \end{array}$$

فبما أن 90% قوة ثقة لـ σ^2 / σ_μ^2 أعلاه (مقابلة لمستوى معنوية 10). تحتوي على 5، فإن القرار المناسب هو استنتاج H_0 .

٣ - النسبة σ^2 / σ_μ^2 أهمية عند تخطيط الدراسات. افترض في مثال شركة أيبكس للمشاريع الذي يتعامل مع مسؤولي شؤون الموظفين أن المطلوب تقدير متوسط رتب التصنيف μ ، وأن تكلفة شمول الدراسة لمسؤول من شؤون الموظفين ولأحد المرشحين هما c_1 و c_2 ، على الترتيب. ولميزانية إجمالية للمشروع تبلغ C تكون النسبة σ^2 / σ_μ^2 المتغير الحاسم لإيجاد التوازن الأمثل بين عدد مسؤولي الشركة وعدد المرشحين الذين ستضمنهم الدراسة، وبحيث يجعل تباين المقدّر أصغر ما يمكن. وإذا كانت المجتمعات غير كبيرة، فينبغي للنموذج أن يراعي الطبيعة المنتهية لها.

تقدير σ_μ^2 و σ^2

في بعض الأحيان يكون الاهتمام منصبا على تقدير σ_μ^2 و σ^2 ، على انفراد. ووفقا لـ (17.21)، فإن مقدرا غير منحاز لـ σ^2 هو:

$$\hat{\sigma}^2 = MSE \quad (17.35)$$

ويمكن الحصول على فترة ثقة لـ σ^2 بالطريقة المعتادة بواسطة (1.68)، وستكون درجات الحرية هنا $n - r$.

ويتوافر كذلك مقدّر نقطي غير منحاز لـ σ_μ^2 . إذ نجد من (17.21) و (17.22):

$$E\{MSE\} = \sigma^2$$

$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + n' \sigma_\mu^2$$

ومنه نجد أن المقدّر:

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{MSTR - MSE}{n'} \quad (17.36)$$

هو مقدر غير منحاز لـ σ_μ^2 . ومن وقت لآخر قد يكون هذا المقدّر سالباً. وبما أن التباين لا يمكن أن يكون سالباً فالإجراء المعتاد هو اعتبار المقدّر النقطي صفراً في هذه الحالة. وتوافر، فقط، فترات ثقة تقريبية لـ σ_μ^2 . وقد نوقشت هذه الأفكار في المرجع [17.2].

مثال. في مثال شركة أليكس للمشاريع، نحتاج 90% قوة ثقة لـ σ^2 ما يلي:
 $MSE = 75.6$ $\chi^2(0.05; 15) = 7.26$ $\chi^2(0.95; 15) = 25.0$
 وباستخدام (1.68) نجد:

$$45.4 = \frac{15(75.6)}{25.0} \leq \sigma^2 \leq \frac{15(75.6)}{7.26} = 156.2$$

ويطلب مقدر غير منحاز لـ σ^2 ما يلي:

$$MSE = 75.6 \quad MSTR = 370 \quad n' = n = 4$$

وبالتالي نجد من (17.36):

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{370 - 75.6}{4} = 73.6$$

غودج تأثيرات عشوائية للعامل

يمكننا كتابة نموذج متوسطات الخللا العشوائي بعامل واحد (17.16)، في شكل مكافئ ينطوي على تأثيرات عشوائية للعامل، تماماً كما فعلنا في مستويات العامل المثبتة في الفصل ١٤. ويمكننا القيام بذلك بالتعبير عن متوسط مستوى العامل μ_i كانحراف عن قيمته المتوقعة، $E\{\mu_i\} = \mu$ ، وذلك كما يلي:

$$\tau_i = \mu_i - \mu \quad (17.37)$$

وبعد ذلك نستبدل ببساطة العبارة المكافئة من (17.37) بالمقدار μ_i في غودج التحاين (17.16):

$$\mu_i = \mu + \tau_i \quad (17.38)$$

وبالتالي يمكن كتابة غودج التأثيرات العشوائية لعامل كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (19.39)$$

حيث:

μ مركبة ثابتة مشتركة لجميع المشاهدات.

τ_i مستقلة وتبع $N(0, \sigma_\tau^2)$.

ε_{ij} مستقلة وتبع $N(0, \sigma^2)$.

τ_i و ε_{ij} مستقلتان.

$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n_i$

لاحظ أن τ متغيرات عشوائية في نموذج التحاين (17.39). وبالرجوع إلى مثال شركة أيبكس للمشاريع، فإن τ_i تمثل تأثير المسؤول i الذي اختبر عشوائيا. وعلى وجه التحديد، تقيس τ_i مدى اختلاف متوسط تقويمات المسؤول i لجميع المستخدمين المحتملين عن متوسط التقويمات الإجمالي لجميع المسؤولين.

مراجع ورد ذكرها

- [17.1] Owen, D. B. *Handbook of Statistical Tables*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing, 1962.
[17.2] Scheffé, H. *The Analysis of variance*. New York : John Wiley & Sons, 1959.

مسائل

(١٧-١) بالرجوع إلى مثال ١ في الصفحة. أوجد قوة الاختبار إذا كانت $\alpha = 0.01$ ، مع بقاء كل شيء آخر بدون تغيير. ما مدى إختلاف هذه القوة

عن تلك التي حسبت في مثال ١؟

(١٧-٢) بالرجوع إلى مثال ٢ في الصفحة. بهتم المحلل، أيضا، بالحصول على قوة الاختبار عندما تكون $\mu_1 = \mu_2 = 13$ و $\mu_3 = \mu_4 = 18$. افترض أن $\sigma = 2.5$.

أ - أوجد قوة الاختبار إذا كانت $\alpha = 0.05$.

ب - كم ستكون قوة الاختبار لو أن $\alpha = 0.01$.

(١٧-٣) بالرجوع إلى مسألة تحسين الانتاجية (١٠١-٤). أوجد قوة الاختبار في المسألة (١٠١-٤). إذا كانت $\mu_1 = 7.0$ ، $\mu_2 = 8.0$ و $\mu_3 = 9.0$. افترض أن $\sigma = 0.9$.

(١٧-٤) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (٢٠١-٤). أوجد قوة الاختبار في المسألة (١٧-٤). إذا كانت $\mu_1 = 37$ ، $\mu_2 = 35$ و $\mu_3 = 28$. افترض أن $\sigma = 4.5$.

(١٧-٥) بالرجوع إلى مسألة العروض النقدية (١٣-٤). أوجد قوة الاختبار في المسألة (١٣-٤). إذا كان متوسط العروض النقدية هو $\mu_1 = 22$ ، $\mu_2 = 28$ و $\mu_3 = 22$. افترض أن $\sigma = 1.6$.

(٦-١٧) ذكر باحث تسويق في محاضرة ما يلي: «ليس هناك مغزى لطريقة القوة في تحديد أحجام العينات في مسائل تحليل التباين، ويجب استخدام طريقة التقدير، فقط. فنحن لن نجري أبدا أي دراسة نتوقع مسبقا أن تكون متوسطات المعالجات فيها متساوية، ولذلك فنحن مهتمون دائما بتقديرات مختلفة». ناقش.

(٧-١٧) لماذا تظن أن طريقة التخطيط لحجوم العينات لتحديد أفضل معالجة عن طريق الجدول أ-١١ لا تأخذ بعين الاعتبار مخاطرة الوصول إلى تحديد غير صحيح عندما يكون متوسطا أفضل معالجتين متساويين أو عمليا متساويين؟

(٨-١٧) اعتبر دراسة وحيدة العامل بحيث يكون $r = 5$ ، $\alpha = .01$ ، $\beta = .05$ و $\sigma = 10$. ونرغب في استخدام أحجام عينات متساوية للمعالجات وفقا لأسلوب الجدول أ-١٠.

أ - كم ستكون أحجام العينات المطلوبة إذا كانت $A = 10, 15, 20, 30$ ؟ ما هو التعميم الذي تقترحه؟

ب - كم ستكون أحجام العينات المطلوبة من أجل القيم A نفسها كما في الجزء (أ) إذا كانت $\alpha = .05$ مع بقاء جميع المواصفات الأخرى كما هي. ما مدى اختلاف أحجام العينات هذه عن تلك التي حُسمت في الجزء (أ)؟

(٩-١٧) اعتبر دراسة وحيدة العامل، حيث يكون $r = 6$ ، $\alpha = .05$ ، $b = .10$ و $A = 50$. ونرغب في استخدام أحجام عينات متساوية للمعالجات وفقا لأسلوب الجدول أ-١٠.

أ - كم ستكون أحجام العينات المطلوبة إذا كانت $\sigma = 50, 25, 20$ ؟ ما هو التعميم الذي يمكن اقتراحه من نتائجك؟

ب - كم ستكون حجم العينات لقيم σ نفسها في الجزء (أ) لو كانت $r = 4$ مع بقاء المواصفات الأخرى كما هي. ما مدى اختلاف حجم العينات هذا عن تلك التي حسب في الجزء (أ)؟

(١٠-١٧) اعتبر دراسة وحيدة العامل، حيث تكون $r = 5$ ، $\alpha = .95$ و $1 - \alpha = .20$ ، ونرغب في استخدام حجم عينات متساوية للمعالجات وفقاً لأسلوب الجدول أ-١١.

أ - كم ستكون حجم العينات المطلوبة إذا كانت $20, 10, 5$ ؟ ما هو التعميم الذي تقترحه نتائجك؟

ب - كم ستكون حجم العينات المطلوبة من أجل القيم نفسها لـ r كما في الجزء (أ) إذا كان $\sigma = 30$ مع بقاء المواصفات الأخرى كما هي؟ ما مدى اختلاف حجم العينات هذه عن تلك التي حسب في الجزء (أ)؟

(١١-١٧) بالرجوع إلى مسألة لون ورق الاستبيان (١٤-١١). افترض أن حجم العينات لم يُحدَّد بعد ولكنه تقرر أن تتم معاينة العدد نفسه من مواقع الأسواق المركزية لكل لون ورقة استبيان. افترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري للخطأ هي $\sigma = 3.0$.

أ - كم ستكون حجم العينات المطلوبة لو أنه: (١) يراد إكتشاف فروق في معدلات الاستجابة باحتمال 90. أو أكثر عندما يكون مدى متوسطات للمعالجات هو 4.5، و (٢) يراد ضبط للمخاطرة α عند 0.05.

ب - كم ستكون أقل قوة لاختبار فروق متوسطات المعالجات (باستخدام $\alpha = .05$) عندما يكون مدى متوسطات المعالجات 6.0، وذلك إذا استُخدمت حجم العينات نفسها التي استُخدمت في الجزء (أ)؟

ج - افترض أن الاهتمام ينصب على المقارنات متشئ-متشئ. كم ستكون حجم العينات المطلوبة إذا كانت الدقة لكل المقارنات متشئ-متشئ هي ± 3.0 ، مستخدمين طريقة توكي بـ 95% معامل ثقة عائلي؟

د - افترض أن الهدف الرئيس هو معرفة اللون ذي أعلى متوسط إستجابة. وأن التعرف على اللون الأفضل فعلاً ينبغي أن يتم باحتمال لا يقل عن 99. وذلك عندما يكون الفرق بين متوسطات الاستجابة بين اللون الأفضل واللون الذي يليه هو 1.5 في المئة من النقاط أو أكثر. كم يجب أن تكون أحجام العينات.

(١٢-١٧) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٤-١٠). افترض أن أحجام العينات لم تتحدد بعد ولكن تقرر استخدام عدد المرضى نفسه في كل مجموعة من مجموعات العلاج الطبيعي. وافترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري للخطأ هي $\sigma = 4.5$ يوما.

أ - كم ستكون أحجام العينات المطلوبة إذا كان (١) يراد اكتشاف فروق في معدلات الاستجابة لفئات اللياقة الثلاث باحتمال 80. أو أكثر عندما يكون مدى متوسطات المعالجات 5.63 يوما، و (٢) يراد ضبط المخاطرة α عند 0.01؟

ب - إذا استعملنا أحجام العينات المحددة في الجزء (أ) كم ستكون قوة الاختبار لفروق متوسطات المعالجات عندما تكون $\mu_1 = 37$ ، $\mu_2 = 32$ و $\mu_3 = 28$ ؟

ج - افترض أن الاهتمام الرئيسي ينصب على تقدير المقارنتين الثنائيتين التاليتين:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \quad D_2 = \mu_3 - \mu_2$$

ما هي أحجام العينات المطلوبة إذا كانت الدقة المطلوبة لكل مقارنة هي $3.0 \pm$ يوما، مستخدمين طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بـ 95% معامل ثقة عائلي؟

د - افترض أن الهدف الرئيس هو معرفة فئة اللياقة البدنية ذات متوسط وقت العلاج الطبيعي الأقصر. وأنه ينبغي معرفة الفئة الصحيحة

باحتمال 90. على الأقل عندما يختلف متوسط الوقت اللازم للعلاج في ثاني أفضل فئة يومين أو أكثر. ماهي بحجوم العينات المطلوبة؟ (١٢-١٧) بالرجوع إلى مسألة آلات التعبئة (١٤-١٤). افترض أن بحجوم العينات لم تتحدد بعد، ولكن تقرر معاينة العدد نفسه من علب الكرتون لكل آلة تعبئة. وافترض أن قيمة تخطيطية منطقية للاعتراف المعياري هي $\sigma = 15$ أونصة. أ - كم ستكون بحجوم العينات المطلوبة إذا كان : (١) يراد إكتشاف فروق في متوسطات الكميات المعبأة لكل آلة باحتمال 70. أو أكثر عندما يكون مدى متوسطات المعالجات هو 15. أونصة، و(٢) يراد ضبط المخاطرة α عند 05.؟

ب - كم ستكون قوة الاختبار إذا كانت $\mu_1 = 0.09$ ، $\mu_2 = 0.18$ ، $\mu_3 = 0.30$ ، $\mu_4 = 0.20$ ، $\mu_5 = 0.10$ و $\mu_6 = 0.20$ ، وذلك إذا استعملت بحجوم العينات نفسها التي وجدت في الجزء (أ)؟.

ج - افترض أن الاهتمام الرئيس ينصب على تقدير المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \quad L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_4 \quad L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{4} - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2}$$

كم ستكون بحجوم العينات إذا كانت الدقة المطلوبة لكل من هذه المقارنات لن تزيد عن 08. \pm أونصة، مستخدمين أفضل طريقة مقارنات متعددة و 95% معامل ثقة عائلي؟

د - افترض أن الهدف الرئيس هو معرفة آلة التعبئة ذات متوسط التعبئة الأصغر. وأنه ينبغي التعرف على الفئة ذات متوسط الفئة الأصغر فعلاً باحتمال 95. على الأقل، وذلك عندما يختلف متوسط التعبئة للآلة التي تليها في صفر متوسط التعبئة بمقدار 10. أونصة أو أكثر. كم يجب أن تكون بحجوم العينات؟

(١٤-١٧) بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٤-١٥). افترض أن حجوم العينات لم تحدد بعد، ولكنه تقرر معاينة العدد نفسه من توزيعات الجوائز لكل وكيل. وافترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري هي $\sigma = 3.0$ أيام.

أ - كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كان: (١) يراد اكتشاف فروق في متوسط الوقت المنصرم لاستكمال التوزيع للوكلاء الخمسة باحتمال 95. أو أكثر وذلك عندما يكون مدى متوسطات المعالجات هو 3.75 يوما. و(٢) يراد ضبط مخاطرة α عند 10.؟
ب - افترض أن الاهتمام الرئيس ينصب على تقدير المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \quad L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_4 \quad L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

كم ستكون حجوم العينات إذا كانت الدقة المطلوبة لكل من هذه المقارنات لا تزيد عن 1.0 ± يوما، مستخدمين طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بـ 95% معامل ثقة عائلي؟.

ج - افترض أن الهدف الرئيس هو تعيين الوكيل الأفضل، أي الوكيل الذي يحتاج إلى أقصر متوسط وقت للتوزيع. وأنه يجب معرفة الوكيل الأفضل باحتمال 90. على الأقل وذلك عندما يختلف متوسط الوقت اللازم لثاني أفضل وكيل يوم أو أكثر. كم يجب أن تكون حجوم العينات؟

(١٥-١٧) بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل (١٤-١٢). افترض أن الاهتمام الرئيس هو مقارنة فئات اللياقة «أقل من المتوسط» و «فوق المتوسط»، على الترتيب، مع فئة اللياقة «متوسط». وهكذا نهتم بمقارنتين هما:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad D_2 = \mu_3 - \mu_2$$

افترض أن قيمة تخطيطية منطقية للاخرايف المعيارى هى 4.5 يوما.

أ - لقد تقرر استعمال حجم عينات متساوية (n) للفتات «أقل من المتوسط» و«أعلى من المتوسط». وإذا كان سيستخدم ضعف هذا العدد ($2n$) لفئة اللياقة «متوسط»، فكم ستكون حجم العينات المطلوبة إذا كانت الثقة لكل مقارنة ثنائية هى $2.5 \pm$ يوما، مستخدمين طريقة بونفيروني مع 90% معامل ثقة عائلي؟

ب - كرر الحسابات في الجزء (أ) إذا كان حجم العينة لفئة اللياقة «متوسط» هو: (١) n و (٢) $3n$ ، مع بقاء للمواصفات الأخرى كما هي.

ج - قارن نتائجك في الجزئين، (أ) و (ب). أي تصميم يؤدي إلى أصغر حجم عينة كلي؟

(١٦-١٧) لماذا يدعى اختبار كروسكال - والاس للرتب واختبار الوسيط اختبارات لاملعية.

(١٧-١٧) هل هناك فروق أساسية بين فرضيات اختبار كروسكال - والاس للرتب وفرضيات اختبار الوسيط؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما هي هذه الفروق؟ وإذا لم يكن هناك فروق، فكيف يختار المرء بين هذين الاختبارين؟

(١٨-١٧) إشرح لماذا تكون الحدود في (17.14) حدود اختبار وليست حدود ثقة.

(١٩-١٧) بالرجوع إلى مسألة التحسين الانفاج (١٠-١٤).

أ - نفذ اختبار كروسكال - والاس للرتب، واستخدم $\alpha = 0.05$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. هل كانت التعادلات مصدر صعوبة هنا؟

ب - ما هي القيمة P - للاختبار في الجزء (أ)؟

ج - هل النتيجة في الجزء (أ) مختلفة عن تلك في المسألة (١٠-١٤) (د)؟

د - هل تقترح البيانات أن هناك حاجة لاختبار لاملعي هنا؟

هـ - قُم باختبارات ثنائية متعددة بناء على البيانات المرتبة وذلك لتصنيف أنواع المصانع الثلاثة في مجموعات وفقاً لمتوسط تحسين الانتاجية. استخدم مستوى معنوية عاظمي $\alpha = 0.10$ ، صف نتائجك.

و - قم باختبارات الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاء الاختبار F^* في (17.10). هل القيمة P لهذا الاختبار مشابهة لتلك في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (ب)؟

(١٧-٢٠) **اتصالات الهاتف**. اتفقت شركة مع مستشار إداري لتحسين كفاءة الاتصالات من حيث تكلفتها. وكجزء من الدراسة، اختار المستشار عشوائياً 10 من المديرين التنفيذيين في المركز الرئيس للشركة وذلك من كل من الأقسام التالية: (١) المبيعات، (٢) الانتاج و(٣) البحث والتطوير، ودرس إتصالاتهم خلال فترة الأسابيع العشرة الماضية بالتفصيل. وإضافة إلى بيانات أخرى، فقد حصل المستشار على المعلومات التالية عن التكاليف الأسبوعية بالدولار لمكالمات هاتفية بعيدة المدى قام بها المدبرون التنفيذيون مع مكاتب فرعية للشركة.

	j										
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
1	813	894	343	796	960	1,499	602	495	920	666	1
2	126	516	291	345	542	216	546	156	362	488	2
3	1,309	763	496	645	472	705	910	609	450	391	3

وقد قرر المستشار استخدام أسلوب لامعلمي لاختبار ما إذا كانت متوسطات تكاليف الهاتف في الأقسام الثلاثة متساوية أم لا.

- أ - ما هي السمة في البيانات التي أملت استخدام اختبار لامعلمي؟
 ب - قم باختبار كروسكال - والاس للرتب، مع ضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول $\alpha = 0.05$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

جـ - قم باختبار مقارنات ثنائية متعددة بناءً على البيانات المرتبة وذلك لتصنيف الأقسام الثلاثة في مجموعات وفقاً لمتوسط مصاريح الهاتف فيها، استخدم مستوى معنوية عاكلي $\alpha = 0.05$. صف نتائجك.

د - قم باختبار الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاءة الاختبار F^* في (17.10). هل القيمة P لهذا الاختبار مشابهة لتلك في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (ب)؟

(٢١-١٧) بالرجوع إلى مسألة الاتصالات الهاتف (٢٠-١٧). افترض في اختبار كروسكال - والاس أن الفرضيات البديلة كانت:

جميع المجتمعات متطابقة : H_0

ليست جميع المجتمعات متطابقة: H_a

أ - هل تنطوي المسألة هنا على افتراضات الاختبار نفسها كما في المسألة (٢٠-١٧)؟

ب - إذا استتجنا H_0 ، هل يعني ذلك بالضرورة أن متوسط تكاليف الهاتف غير متساوية في الأقسام الثلاثة؟ اشرح.

(٢٢-١٧) عمر بطارية. طُورت نسخة ميدانية خاصة من جهاز مختبر يزود بالطاقة من بطارية. وتم اختبار أربعة تصاميم مختلفة للبطارية. وفيما يلي البيانات عن عدد ساعات التشغيل في الميدان لعشرين بطارية من كل تصميم:

	j										
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
1	11.71	5.71	4.85	13.27	8.31	10.19	13.22	3.81	10.08	7.48	1
2	8.41	14.82	7.07	14.08	11.52	12.36	17.42	6.45	23.41	10.86	2
3	22.41	6.35	16.70	7.14	8.60	16.40	5.35	9.68	8.12	6.70	3
4	3.57	11.74	7.34	4.21	6.31	9.09	4.59	6.74	4.99	12.40	4

	j										
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	i
1	6.24	3.37	3.08	6.71	8.03	4.19	19.37	2.25	2.66	6.52	1
2	8.85	10.17	17.07	15.37	9.21	7.10	7.53	6.53	11.00	9.06	2
3	11.14	7.58	13.80	14.63	5.66	11.30	9.14	13.28	6.01	10.52	3
4	5.35	20.17	14.76	8.22	5.40	12.38	7.86	11.76	4.07	8.36	4

أ - احصل على الرواسب المعروفة في (16.2) عند توفيق نموذج التحاين (14.2) وجهاز رسوم نقطية مصطفة للرواسب لكل معالجة. وجهاز كذلك رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وبين قيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو أن توزيع حدود الخطأ غير طبيعي؟

ب - قم باختبار كروسكال - والاس استخدم $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟ وهل كانت التعادلات مصدر صعوبة هنا؟

ج - قم باختبارات ثنائية متعددة للبيانات المرتبة لجميع الأنواع الأربعة من البطاريات في مجموعات وفقاً لمتوسط العمر التشغيلي، استخدم مستوى معنوية عاظمي $\alpha = 0.10$. صف نتائجك.

د - قم باختبار الرتب في الجزء (ب) باستخدام إحصاء الاختبار F^* في (17.10). هل القيمة P - لهذا الاختبار مشابهة لتلك في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (ب)؟

(١٧-٢٣) بالرجوع إلى مسألة العروض التقليدية (١٣-١٤).

أ - قم باختبار الوسيط لتساوي متوسطات مستويات العامل. استخدم $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - هل القرار في الجزء (أ) هو نفسه الذي حصلنا عليه في المسألة (١٣-١٤)د؟

(١٧-٢٤) بالرجوع إلى مسألة الاتصالات الهاتفية (١٧-٢٠). قم باختبار الوسيط لتساوي متوسطات مستويات العامل. اضبط المخاطرة α عند 0.05. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

(٢٥-١٧) بالرجوع إلى مسألة عمر البطارية (٢٢-١٧). قم باختبار الوسيط لتساوي متوسطات مستويات العامل. استخدم $\alpha = 0.10$. أذكر الفرضيات البديلة،

قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

(٢٦-١٧) يسأل أحد الطلبة لماذا يُذكر β كحدّ منفصل في نموذج التأثيرات العشوائية (17.16) في ضوء كون β متغيراً عشوائياً في هذا النموذج. أجب.

(٢٧-١٧) بالرجوع إلى الشكل (١-١٧). الحالة الموضحة هنا هي حالة أن التباين σ^2 أكبر من التباين σ^2_{ϵ} . هل هذه الحالة صحيحة دائماً؟ اشرح.

(٢٨-١٧) في كل من الحالات التالية، وضع ما إذا كان نموذج التحاين I أو نموذج التحاين II أكثر ملاءمة مع ذكر الأسباب.

(١) في دراسة الغياب في مصنع ما، المعالجات هي فترات العمل الثلاث.

(٢) في دراسة إنتاجية المستخدمين، المعالجات هي 10 مستخدمين انتاج اختبروا عشوائياً من بين كل مستخدمين الإنتاج في شركة كبيرة.

(٣) في دراسة على الدخل السنوي عند التقاعد، المعالجات هي أنواع خطط التقاعد الأربع المتاحة للموظفين.

(٤) في دراسة على اهتزاز الاطارات في شاحنات ذات 18 إطاراً، المعالجات هي أربع مواقع إطارات اختبرت عشوائياً.

(٢٩-١٧) بالرجوع إلى مثال مسؤولي شؤون الموظفين في شركة أيكس للمشاريع في

الصفحة 910. اشرح بالرجوع إلى هنا المثال فوق ماذا أخذ التوقع في

(17.17a). وفوق ماذا أخذ التباين في (17.17b)؟. وفوق ماذا أخذ التباين

في (17.17c)؟

(٣٠-١٧) بالرجوع إلى مسألة آلات التعبئة (١٤-١٤). افترض أن الشركة تستخدم

عدداً كبيراً من آلات التعبئة وأن الآلات الست قد اختبرت عشوائياً من

بينها. افترض أن نموذج التحاين (17.16) مناسب.

أ - فسر التالي بالرجوع إلى هذا المثال:

$$(١) \mu, \sigma^2, (٢) \sigma^2, (٣) \sigma^2, (٤) \{Y_{ij}\}.$$

ب - اختبر ما إذا كان لجميع الآلات في المجتمع متوسط التعبئة نفسه أم لا،
استخدم $\alpha = 0.05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة.

ماهي القيمة P - للاختبار؟

ج - قدر متوسط الكمية المعبأة لكل الآلات في المجتمع بـ 95% فزة ثقة.

(١٧-٣١) بالرجوع إلى مسائل تعبئة الآلات (١٤-١٤) و (١٧-٣٠).

أ - قدر نسبة التشتت الكلي في تعبئة علب الكرتون التي تعكس الفروق
بين متوسطات الكميات المعبأة بين الآلات، استخدم 95% فزة ثقة.

ب - قدر σ^2 بـ 95% فزة ثقة. فسر تقدير الفزة هذا.

ج - احصل على تقدير نقطي لـ σ^2 .

(١٧-٣٢) كمية الصوديوم. درست باحثة كمية الصوديوم في مشروبات الشعير بأن

اختارت عشوائيا ستة أنواع من بين الأنواع الكثيرة من مشروبات أمريكا
وكندا التي تباع في منطقة حضرية. ومن ثم اختارت عشوائيا من بائعي
تجزئة في المنطقة ثماني علب أو زجاجات ذات وزن 12 أونصة وذلك من
كل نوع اختارته وقاست كمية الصوديوم (بالميليلغرام) في كل علبة أو
زجاجة. وكانت المشاهدات كما يلي:

	8	7	6	5	4	3	2	1	i
24.5	25.0	22.3	24.5	22.0	23.8	22.6	24.4	24.4	1
9.5	12.0	11.2	9.9	10.2	10.3	12.1	10.2	10.2	2
19.4	20.0	18.3	19.6	19.0	19.8	19.4	19.2	19.2	3
16.4	18.0	17.5	17.6	18.3	16.7	18.1	17.4	17.4	4
14.8	13.4	15.0	14.9	13.1	14.1	15.0	13.4	13.4	5
20.3	21.1	18.8	20.1	20.8	20.7	20.2	21.3	21.3	6

افترض أن نموذج التحاين (17.16) مناسب.

- أ - اختبر ما إذا كان متوسط كمية الصوديوم هو نفسه في كل الأنواع المباعة في المنطقة الحضرية، استخدم $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟
- ب - قدر متوسط كمية الصوديوم في كل الأنواع، استخدم 99% فترة ثقة.

(٣٣-١٧) بالرجوع إلى مسألة كمية الصوديوم (٣٢-١٧).

- أ - قُدر $(\sigma_\mu^2 + \sigma^2) / \sigma_\mu^2$ بـ 99% فترة ثقة. فسّر تقديرك لفترة الثقة.
- ب - احصل على تقديرات نقطية لـ μ و σ_μ^2 .
- ج - قدر μ بـ 99% فترة ثقة.
- د - لقد حُتم أن تبين كمية الصوديوم بين الأنواع أكثر من ضعف التباين ضمن الأنواع قم باختيار مناسب لذلك مستخدماً $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.
- (٣٤-١٧) آلات لف الوشائع. يحتوي مصنع على عدد كبير من آلات لف الوشائع. وقد درس عمل إنتاج خاصية معينة للوشائع المنتجة من هذه الآلات بأن اختار أربع آلات عشوائياً ومن ثم اختار 10 وشائع عشوائياً من الإنتاج اليومي لكل من هذه الآلات. وكانت النتائج كما يلي:

<i>i</i>										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	<i>i</i>
206	207	205	209	206	208	202	207	204	205	1
204	205	206	199	207	209	203	198	204	201	2
197	202	198	202	203	199	201	196	204	198	3
210	211	209	210	208	211	215	214	209	210	4

افترض أن نموذج التحاين (17.16) مناسب.

- أ - اختبر ما إذا كان متوسط الخاصية للوشائع هو نفسه لكل الآلات في المصنع أم لا. استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - قدر متوسط خاصية الوشيمة لكل آلات لف الوشائع في المصنع، استخدم 90% فترة ثقة.

(٣٥-١٧) بالرجوع إلى مسألة آلات لف الوشائع (٣٤-١٧).

أ - قدر $(\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2) / \sigma_{\mu}^2$ بـ 90% فترة ثقة. فسر تقديرك بفترة الثقة.

ب - قدر σ^2 بـ 90% فترة ثقة. فسر تقديرك بفترة الثقة.

ج - احصل على تقدير نقطي لـ σ_{μ}^2 .

د - اعتبر ما إذا كان σ^2 و σ_{μ}^2 متساويين أم لا، استخدم 10. $\alpha =$

اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

تمارين

(٣٦-١٧) (يحتاج لحساب التفاضل) إذا علمت أن $\mu_1 = 0$ ، $\mu_2 = 1$ ، $0 \leq \mu_2 \leq 1$ ،

أثبت أن $\sum (\mu_i - \mu)^2$ يصبح أصغر ما يمكن عندما تكون $\mu_2 = 0.5$ ، حيث

$$\mu = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) / 3$$

(٣٧-١٧) (يحتاج لحساب التفاضل). بالرجوع إلى مسألة علاج إعادة التأهيل

(١٤-١٢). أحجم العينات للفئات أقل من المتوسط، متوسط وأعلى من

المتوسط ستكون n و kn ، على الترتيب. وبافتراض أن نموذج

التحايين (14.2) مناسب، أوجد القيمة المثلى لـ k التي تجعل تباينات

$$\hat{D}_1 = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \text{ و } \hat{D}_2 = \bar{Y}_3 - \bar{Y}_2 \text{ أصغر ما يمكن لحجم عينة كلي } n_T.$$

(٣٨-١٧) أثبت أن $n_T(n_T + 1)/12$ هو تباين العينة للأعداد الصحيحة المتتالية من 1 إلى n_T .

(٣٩-١٧) أثبت أنه يمكن كتابة إحصاء الاختبار في (17.10) على شكل الدالة

$$\text{البسيطة في } X_{RW}^2 \text{ في الصفحة 93.}$$

(٤٠-١٧) أثبت أن n^* المعرفة في (17.22a) تساوي n عندما تكون $n_i = n$.

(٤١-١٧) ما هي قيم r و n التي تجعل $\{\bar{Y}.. \} \sigma^2$ في (17.26) أصغر ما يمكن لحجم

عينة كلي n_T ؟ أهمل أية اعتبارات للتكلفة.

(٤٢-١٧) استبط حلود الثقة في (17.34) من تلك الموجودة في (17.33).

مشاريع

(٤٣-١٧) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC وإلى المشروع (٣٣-١٤).

أ - استخدم اختبار كروسكال - والاس لتحديد ما إذا كان متوسط خطورة العدوى هو نفسه في المناطق الأربع أم لا، اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - هل النتيجة في الجزء (أ) هي نفسها التي حصلت عليها في المشروع (٣٣-١٤)؟ هل فرضيات نموذج التحاين (14.2) أم تلك التي ينطوي عليها اختبار كروسكال - والاس أكثر منطقية هنا؟

ج - استخدم طريقة الاختبارات متى متى المتعددة في (17.14) لجميع المناطق في مجموعات، استخدم مستوى معنوية عاقل $\alpha = 0.10$. ماهي استنتاجاتك؟

د - قم باختبار الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاء الاختبار F^* (17.10). هل القيمة P - لهذا الاختبار مماثلة لتلك التي حصلت عليها في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (أ)؟

(٤٤-١٧) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SMSA وللمشروع (٣٥-١٤).

أ - باستخدام اختبار كروسكال - والاس، حدد ما إذا كان متوسط معدلات الجريمة هو نفسه في المناطق الأربع أم لا، اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - هل النتيجة في الجزء (أ) هي نفسها التي حصلت عليها في المشروع (٣٥-١٤)؟ هل فرضيات نموذج التحاين (14.2) أم تلك التي ينطوي عليها اختبار كروسكال - والاس أكثر منطقية هنا؟

جـ - استخدم طريقة الاختبارات متنى متنى المتعددة في (17.14) لتجميع المناطق في مجموعات، استخدم مستوى معنوية عاااا $\alpha = 0.05$. ما هي استنتاجاتك؟

د - قم باختيار الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاء الاختبار (17.10) F^* . هل القيمة P - لهذا الاختبار مماثلة لتلك التي حصلت عليها في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (أ)؟

(١٧-٤٥) احصل على توزيع المعانعة الدقيق لـ X_{RW}^2 عندما تكون H_0 صحيحة، وذلك للحالة $r = 2$ و $n_i = 2$ (تلميح: ماذا يتضمن تساوي متوسطات المعالجات فيما يتعلق بترتيبات الرتب 1, 2, 3, 4).

(١٧-٤٦) يراد دراسة ثلاثة مجتمعات، كل منها من التوزيع المنتظم بين 300 و 800. أ - قم بتوليد 10 مشاهدات عشوائية من كل من التوزيعات المنتظمة الثلاثة وأحسب إحصاء الاختبار X_{RW}^2 في (17.7). ب - كرر الجزء (أ) 100 مرة.

جـ - احسب المتوسط والانحراف المعياري لإحصاءات الاختبار المائة.

كيف تقارن هذه القيم مع خواص توزيع كاي مربع المناسب؟ د - ما هي نسبة إحصاءات الاختبار المائة التي حصلت عليها في الجزء (ب) التي تقل عن 4.61؟ ما هي النسبة التي تقل عن 9.21؟ وكيف تتفق هذه النسب مع القيم المتوقعة نظرياً؟

تحليل التباين ثنائي العامل - حجوم متساوية للعينات

لقد اعتبرنا في القسم III من الكتاب (وهو القسم الأول من الجزء الثاني) دراسات يتناول البحث فيها تأثير عامل واحد. أما الآن فنحن مهتمون بدراسة التأثيرات المترتبة لعاملين أو أكثر. وفي هذا الفصل ستتابع تحليل التباين للدراسات ثنائية العامل في حالة تساوي حجوم العينات جميعها. ونستمر في الفصول ١٩، ٢٠، ٢١ مناقشتنا للدراسات ثنائية العامل بمتابعة تحليل تأثيرات العوامل، والتخطيط لحجوم العينات، وحالة عدم تساوي حجوم العينات، بالإضافة إلى عدد من المواضيع الأخرى. وفي الفصل ٢٢، سنعتبر تحليل التباين لدراسات يتناول البحث فيها ثلاثة عوامل أو أكثر. وأخيرا ستتابع في الفصل ٢٣ تحليل التباين للدراسات العاملية.

(١٨ - ١) دراسات متعددة العوامل

قبل البدء في التركيز على الدراسات ثنائية العامل، سنشير إلى بعض الملاحظات العامة عن الدراسات متعددة العوامل التي تتضمن مباحث عن عاملين أو أكثر. ويمكن أن تبني الدراسات متعددة العوامل على البيانات التجريبية أو بيانات الملاحظة مثلها في ذلك مثل الدراسات وحيدة العامل.

أمثلة على دراسات ثنائية العامل

مثال ١. بحث شركة ما تأثيرات سعر البيع ونوع الحملة الدعائية على مبيعات أحد منتجاتها. وتمت دراسة ثلاثة مستويات للأسعار (59 سنتا، 60 سنتا، 64 سنتا)

ونوعين من أنواع الحملات الدعائية (الدعاية عن طريق الإذاعة، الدعاية عن طريق الصحف). لنتو سعر البيع العامل A والحملة الدعائية العامل B . وقد تمت دراسة العامل A هنا عند ثلاثة مستويات للأسعار، وعلى وجه العموم، سنستخدم الرمز a ليدل على عدد المستويات المدروسة للعامل A . كما تمت دراسة العامل B هنا عند مستويين، وسنستخدم الرمز b ليدل على عدد المستويات المدروسة للعامل B . وقد قُسمت كل تركيبة سعر وحملة دعائية كما يلي:

الترتيب	الوصف
١	السعر ٥٩، دعاية إذاعة
٢	السعر ٦٠، دعاية إذاعة
٣	السعر ٦٤، دعاية إذاعة
٤	السعر ٥٩، دعاية صحيفة
٥	السعر ٦٠، دعاية صحيفة
٦	السعر ٦٤، دعاية صحيفة

وكل تركيبة من أحد مستويات العامل A وأحد مستويات العامل B هي معالجة. ولذلك يكون لدينا إجمالاً $6 = 3 \times 2$ معالجات. وبشكل عام، فإن العدد الكلي للمعالجات الممكنة في الدراسات ثنائية العامل هو ab .

وقد اختبرت اثنتي عشرة منطقة من كامل الولايات المتحدة، وبحيث كانت على وجه التقريب، من الحجم نفسه، وسميزات اجتماعية - اقتصادية متشابهة، ثم حُصّصت عشوائياً إلى المعالجات بحيث أعطيت كل معالجة إلى وحدتين تجريبيتين. وكما هو الحال سابقاً سنستخدم الرمز n ليدل على عدد الوحدات التي تلقى معالجة معينة وذلك عند تساوي أحجام العينات لجميع المعالجات. فعلى سبيل المثال، في المنطقتين اللتين حُصّصتا إلى للمعالجة ١ نُبت سعر البيع عند 59 سنتاً واستُخدمت الدعاية عن طريق الإذاعة، وهكذا بالنسبة لباقي المناطق في هذه الدراسة.

وتعتبر هذه دراسة تجريبية وذلك لأنه تمّ التحكم في تخصيص مستويات المعامل

A والعامل B إلى الوحدات التجريبية عن طريق التخصيص العشوائي للمعالجات إلى المناطق. والتصميم الذي استخدم هنا هو التصميم تام التعشية.

مثال ٢. درست شركة للفولاذ تأثيرات محتوى الكربون ودرجة حرارة تسقية الفولاذ على قوة الفولاذ. وقد دُرِس محتوى الكربون على مستوى عالٍ ومستوى منخفض (التعريفات الدقيقة لهذه المستويات ليست مهمة هنا). ودُرست درجة حرارة تسقية الفولاذ على مستوى عالٍ ومستوى منخفض، أيضا. وبالإجمال $4 \times 2 = 2 \times 2$ معالجات لهذه الدراسة:

الوصف	العدد
مستوى كربون عالٍ، درجة تسقية عالية	١
مستوى كربون عالٍ، درجة تسقية منخفضة	٢
مستوى كربون منخفض، درجة تسقية عالية	٣
مستوى كربون منخفض، درجة تسقية منخفضة	٤

وخصّصت هذه المعالجات الأربع إلى 12 دفعة من الإنتاج بطريقة عشوائية بحيث خصّصت كل معالجة إلى ثلاث دفعات.

ومرة أخرى فإن هذه دراسة تجريبية لأنه تم التحكم في محتوى الكربون ودرجة الحرارة عن طريق تخصيص المعالجات عشوائيا إلى دفعات الإنتاج. والتصميم الذي استخدم هنا هو، أيضا، التصميم تام التعشية.

مثال ٣. درس عجل ما تأثيرات دخول العائلة (أقل من \$10,000، \$10,000 - \$29,000، \$30,000 - \$49,999، \$50,000 أو أكثر) والمرحلة في دورة حياة العائلة (المراحل ١، ٢، ٣، ٤) على شراء الأجهزة المنزلية. وهنا تم تحديد $4 \times 4 = 16$ معالجة. وجزء من هذه المعالجات هو:

المعالجة	الوصف
١	دخول تحت 1000، ومرحلة ١
٢	دخول تحت 10,000 ومرحلة ٢
.	.
.	.
.	.
١٦	دخول 50,000 فما فوق، مرحلة ٤

وقد اختار المحلل 20 عائلة بمواصفات الدخل ومرحلة دورة الحياة للعائلة، وذلك لكل صنف من "المعالجات" في هذه الدراسة، مما نتج عنه 320 عائلة لمجمل الدراسة.

هذه دراسة مشاهدة لأنه تم الحصول على البيانات بدون تخصيص الدخل ومرحلة دورة الحياة إلى العائلات. وبالأحرى، تم اختيار العائلات نظراً لأن لديهم الميزات المحددة.

تعليقات

١- عند دراستنا للدراسات وحيدة العامل، لم نضع أية قيود على طبيعة المستويات x للعامل تحت الدراسة. وبشكل رسمي، يمكن اعتبار ab من المعالجات في دراسة ثنائية العامل على أنها x من مستويات العامل في دراسة وحيدة العامل ويمكن بالتالي تحليلها وفقاً للطرق التي نوقشت في القسم III. والسبب وراء الحاجة لطرق جديدة للتحليل، هو أننا نرغب في تحليل ab من المعالجات بطرق خاصة نلحظ وجود عاملين في الدراسة ونمكّننا من الحصول على معلومات عن تأثيرات كل من هذين العاملين، بالإضافة إلى أي تأثيرات خاصة مشتركة فيما بينها.

٢- عند استخدام تصميم تام التعشية في دراسة متعددة العوامل، يتم تخصيص المعالجات عشوائياً إلى الوحدات التعريبية بالطرق التي شرحت في الفصل ٢. وحالما تُعرف المعالجات بدلالة مستويات العامل للعوامل المختلفة في الدراسة لا تبرز أية مشاكل جديدة.

دراسات عاملية كسرية وتامة

جميع الأمثلة التي ذكرت آنفا هي دراسات عاملية تامة، وذلك لأن كل التراكيب

الممكنة لمستويات العامل ولجميع العوامل قد ضُمَّت في الدراسة. وفي بعض الأحيان لا يكون ممكناً أو مرغوباً تضمين كل التراكيب الممكنة من مستويات العامل لجميع العوامل في الدراسة. افترض، على سبيل المثال، أن شركة الفولاذ التي ذُكرت في المثال ٢، رغبت في أن تدرس ست درجات حرارة وخمس مستويات من محتوى الكربون وأربع طرق لتبريد الفولاذ. وعندئذٍ ستحتوي دراسة عاملية تامة على $4 \times 5 \times 6 = 120$ معالجة. ولكن يمكن أن يكون لمثل هذه الدراسة تكلفة عالية واستهلاك كبير للوقت. وتحت ظروف كهذه، يمكن تصميم دراسة عاملية كسرية تحتوي، فقط، على جزء من تراكيب مستويات العوامل الملة والعشرون، والتي لاتزال ستزودنا عن تأثيرات كل عامل على حدة، بالإضافة إلى أي تأثيرات مشتركة مهمة لهذه العوامل. وقد خُصصت المباحث متعددة العوامل في القسم IV بالكلية للدراسات العاملية التامة.

فوائد الدراسات متعددة العوامل

الفعالية. إن الدراسات متعددة العوامل أكثر فعالية من أسلوب التحريـب التقليدي الذي يتعامل مع عامل واحد في كل مرة مبقياً كل الشروط الأخرى ثابتة. وبالرجوع إلى مثال ١، فإن الأسلوب التقليدي للدراسة تأثير الحملة الدعائية كان سيقيي السعر ثابتاً عند مستوى معين ويغير، فقط، الحملة الدعائية. وأحد المشاكل المهمة في هذا الأسلوب هو عملية اختيار مستوى السعر الذي سيقيي ثابتاً. وسيكون هذا الاختيار أصعب عندما لا يكون المرء متأكداً بأن تأثير الحملة الدعائية هو نفسه عند مستويات الأسعار المختلفة. وبالرغم من أن الوسيلة التقليدية تركز على كل الامكانيات لدراسة تأثير عامل واحد، فقط، إلا أنها لاتعطي أي معلومات إضافية دقيقة عن ذلك العامل أكثر مما تعطيه تجربة متعددة العوامل من الحجم نفسه. وبالرجوع مرة أخرى إلى مثال ١، افترض أنه يراد استخدام 12 منطقة في دراسة تقليدية بحيث تُخصَّص ست مناطق للدعاية عن طريق الإذاعة والست الأخرى للدعاية عن طريق الصحف مع تثبيت السعر عند المستوى 59 ستاً. وفي الدراسة التقليدية هذه

ستبنى المقارنة بين نوعي الحملات الدعائية على عيتين في كل منهما ست مناطق. وهذا بالفعل ما سيحدث في الدراسة ثنائية العامل في المثال ١، حيث أن كل حملة دعائية تظهر في ثلاث معالجات وتُخصص لكل معالجة منطقتان.

كمية المعلومات. تقدم الدراسة التقليدية كمًا أقل من المعلومات من ذلك الذي تقدمه الدراسة ثنائية العامل. وفي توضيحنا السابقة، على وجه التحديد، فإنها لا تزودنا بأي معلومات عن تأثير السعر ولا عن أية تأثيرات مشتركة للسعر، والحملة الدعائية. وأي معلومات عن تأثيرات السعر ستطلب تجربة تقليدية إضافية بحيث يتم تثبيت الحملة الدعائية عند مستوى معين مع تغير السعر. وهكذا، فإن الأسلوب التقليدي يحتاج لعينة أكبر ليزودنا بمعلومات عن تأثيرات كل من السعر والحملة الدعائية، وما لم يتم توسيع الدراسة التقليدية أكثر فأكثر، فإنها لن تزودنا بأي معلومات كاملة عن أية تأثيرات مشتركة خاصة للعاملين. وتسمى هذه التأثيرات المشتركة الخاصة بالتفاعلات. لقد نظرنا لتأثيرات التفاعل في نماذج الانحدار وسناقشها في مجال نماذج تحليل التباين في الفقرة التالية. ويكفي أن نشير هنا إلى أن تأثيرات التفاعل يمكن أن تكون مهمة للغاية. فعلى سبيل المثال، قد لا يكون تأثير السعر كبيراً عندما تكون الحملة الدعائية عن طريق الصحف، ولكنه كبير عند الدعاية عن طريق الإذاعة. ويمكن تحري تأثيرات التفاعل من دراسات عملية.

مشروعية النتائج. بالإضافة إلى كون الدراسات متعددة العوامل أكثر فعالية وتزودنا بمعلومات جاهزة عن تأثيرات التفاعلات إلا أنه بإمكانها، أيضاً، أن تعزز مشروعية النتائج. افترض في المثال ١، أن الإدارة كانت مهتمة بالدرجة الأولى في بحث تأثير الأسعار على المبيعات. فلو أن الحملة الدعائية التي استُخدمت كانت عن طريق الصحف، فقط، فستكون هناك شكوك فيما إذا كان تأثير السعر يختلف باختلاف طرق الحملة الدعائية، ومع شمول الدراسة لنوع الحملة الدعائية كعامل آخر، يمكن للإدارة الحصول على معلومات عن استمرار تأثير السعر مع وسائل دعائية مختلفة وذلك دون زيادة عدد الوحدات التحريية في الدراسة. وبالتالي، فإنه يمكن للدراسات

متعددة العوامل أن تتضمن بعض العوامل ذات الأهمية الثانوية كي تسمح باستقرارات عن العوامل الرئيسة بمدى أوسع من الشروعية.

تعليقات

١ - تسمح التحليلات متعددة العوامل في الدراسات المبنيّة على بيانات المشاهدة، بالإضافة لتلك المبنيّة على بيانات تجريبية بتقويم مباشر لتأثيرات التفاعل، كما توفر كذلك في عدد المشاهدات المطلوبة في التحليل.

٢ - ينبغي ألا تفقد الفوائد التي ذكرناها آنفاً إلى الاعتقاد بأنه كلما زاد عدد العوامل في الدراسة كلما كان هذا أفضل. فالتعارب التي تجري العديد من العوامل وكل منها بعدد كبير من المستويات تصبح معقدة ومكلفة ومستهلكة للوقت. وفي الغالب يكون الاسواتيج الأفضل للبحث، هو البدء بعوامل قليلة، ودراسة تأثيراتها ومن ثم توسيع البحث وفقاً لأحدث ماتم الحصول عليه من نتائج. وبهذه الطريقة يمكن تكريس الإمكانيات المتوفرة بصورة رئيسة إلى أفضل السبل الواعدة في البحث، وبذلك يمكن الحصول على فهم أفضل لمهام العوامل.

(١٨ - ٢) معنى عناصر النموذج

قبل تقديم عبارة رسمية لنموذج تحليل التباين في الدراسات ذات العاملين، سنطور عناصر النموذج ونناقش معانيها. ولن يكون هذا مساعداً على فهم نموذج تخمين فحسب، بل سيزودنا بصورة عن الكيفية التي يجب أن تمضي وفقاً لها الدراسات ذات العاملين. وسنفترض عبر هذه الفقرة أن جميع متوسطات المجتمعات معلومة وأن لها الأهمية نفسها، وذلك عند الحاجة لحساب معدلات هذه المتوسطات.

توضيح

لتوضيح معنى عناصر النموذج، سنعتبر دراسة بسيطة ذات عاملين، حيث يهمننا هنا معرفة تأثيرات الجنس والعمر على تعلّم مهمة ما. وللتبسيط، فقد تم تعريف عامل العمر على ثلاثة مستويات (شاب - كهل - شيخ) وذلك كما هو موضح في الجدول (١-١٨)أ.

متوسطات المعالجات

نرمز لمتوسط الاستجابة لأي معالجة في دراسة ذات عاملين بـ μ_{ij} ، حيث يشير i إلى مستوى العامل A ($i = 1, \dots, m$)، ويشير j إلى مستوى العامل B ($j = 1, \dots, b$). ويحتوي الجدول (١٨-١) على المتوسطات الحقيقية للمعالجات μ_{ij} لمثال التعلم. لاحظ على سبيل المثال، أن $\mu_{11} = 9$ مما يدل على أن متوسط زمن التعلم للذكور الشباب هو تسع دقائق. وبشكل مشابه، نرى أن $\mu_{22} = 11$ مما يعني أن متوسط زمن التعلم للإناث في سن الكهولة هو 11 دقيقة.

جدول (١٨ - ١) تأثير العمر ولكن دون تأثير الجنس، ودون تفاعلات - مثال التعلم

١ - متوسط أزمات التعلم (بالدقائق)

	العامل B العمر			
	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
متوسط الصف	شيخ	كهل	شاب	العامل A الجنس
$12(\mu_{1.})$	$16(\mu_{13})$	$11(\mu_{12})$	$9(\mu_{11})$	$i = 1$ ذكر
$12(\mu_{2.})$	$16(\mu_{23})$	$11(\mu_{22})$	$9(\mu_{21})$	$i = 2$ أنثى
$12(\mu_{..})$	$16(\mu_{.3})$	$11(\mu_{.2})$	$9(\mu_{.1})$	متوسط العمود

جـ - التأثيرات الأساسية للعمر (بالدقائق)

$$\beta_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 9 - 12 = -3$$

$$\beta_2 = \mu_{2.} - \mu_{..} = 11 - 12 = -1$$

$$\beta_3 = \mu_{3.} - \mu_{..} = 16 - 12 = 4$$

ب - التأثيرات الأساسية للجنس (بالدقائق)

$$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 12 - 12 = 0$$

$$\alpha_2 = \mu_{2.} - \mu_{..} = 12 - 12 = 0$$

ملاحظة

يعتمد تفسير متوسط المعالجة μ_{ij} على كون الدراسة دراسة مشاهدة أو كونها تجريبية. ففي دراسة الملاحظة، يدل متوسط المعالجة μ_{ij} على متوسط المجتمع للعناصر التي تملك سمات المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B . فعلى سبيل المثال، نجد في مثال التعلم أن متوسط المعالجة μ_{11} هو متوسط زمن التعلم لمجتمع الذكور الشباب.

وبدلاً متوسط المعالجة μ_y في الدراسات التحريية على متوسط الاستجابة الذي كان يمكن الحصول عليه لو أنه تم تطبيق المعالجة المولفة من المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B على جميع الوحدات في مجتمع الوحدات التحريية الذي نريد استقراء النتائج منه. فعلى سبيل المثال، في دراسة حيث العامل A هو نوع البرنامج التدريبي (منظم، منظم جزئياً، غير منظم) والعامل B هو وقت التدريب (أثناء العمل، بعد العمل)، وتم اختيار 60 من المستخدمين وخُصص منهم عشوائياً لكل معالجة من المعالجات الست، ويمثل المتوسط μ_{ij} متوسط الاستجابة، وليكن متوسط الزيادة في الانتاجية لو أن برنامج التدريب i المطبق خلال الوقت j أعطي لكل المستخدمين في مجتمع الوحدات التحريية.

متوسطات مستويات العوامل

تشير متوسطات المعالجات في الجدول (١٨-١) أ في مثال التعلم إلى أن متوسطات أزمنة التعلم للرجال والنساء هي نفسها لكل من مجموعتي العمر. ومن جهة أخرى، فإن متوسط زمن التعلم يزداد مع العمر لكل جنس. ولذلك فإنه ليس للجنس أي تأثير على متوسط زمن التعلم، بينما يوجد هناك تأثير للعمر. ويمكن، أيضاً، رؤية ذلك سريعاً من متوسطات الصفوف ومتوسطات الأعمدة المبينة في الجدول (١٨-١) أ، والتي تروي القصة كاملة. وحيث متوسطات الصفوف هي متوسطات مستويات عامل الجنس، ومتوسطات الأعمدة هي متوسطات مستويات عامل العمر. ويرمز لمتوسط العمود الأول بـ μ_1 ، وهو متوسط القيمتين μ_{11} و μ_{12} وبصورة عامة، يرمز لمتوسط العمود j بـ μ_j :

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^a \mu_{ij}}{a} \quad (18.1)$$

ولمتوسط الصف i بالرمز μ_i :

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^b \mu_{ij}}{b} \quad (18.2)$$

ويرمز لمتوسط زمن التعلم الكلي لكل الأعمار ولكلا الجنسين بالرمز $\mu_{..}$ ويُعرف بالطرق المتكافئة التالية:

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \sum_j \mu_{ij}}{ab} \quad (18.3a)$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \mu_{i.}}{a} \quad (18.3b)$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_j \mu_{.j}}{b} \quad (18.3c)$$

التأثيرات الرئيسية

تأثيرات العمر الرئيسية. لتلخيص تأثيرات العمر الرئيسية، سنعتبر الفروق بين متوسط كل مستوى عامل والمتوسط الكلي. وعلى سبيل المثال، فإن التأثير الرئيس للأشخاص الشباب في الجدول (١٨-١) هو الفرق بين μ_1 ، متوسط زمن التعلم للأشخاص الشباب، و $\mu_{..}$ ، المتوسط الكلي. وقد رمزنا للفرق بـ β_1 :

$$\beta_1 = \mu_1 - \mu_{..} = 9 - 12 = -3$$

ويدعى β_1 التأثير الرئيس للعامل B في مستواه الأول. ويوضح الجدول (١٨-ج) هذا التأثير بالإضافة إلى التأثيرات الرئيسة الأخرى للعامل B.

تأثيرات الجنس الرئيسية. تُعرف تأثيرات الجنس الرئيسية بطريقة مماثلة وقد رمزنا له بالرمز α_i ، ولذلك لدينا:

$$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 12 - 12 = 0$$

ويدعى α_1 التأثير الرئيس للعامل A في مستواه الأول، ويوضح الجدول (١٨-ب) تأثيرات العمر الرئيسية، وكلاهما صفر، مما يدل على أن الجنس لا يؤثر على متوسط زمن التعلم.

تعاريف عامة. نعرف على وجه العموم، التأثير الرئيس للعامل A عند المستوى i كما يلي:

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..} \quad (18.4)$$

وبشكل مشابه، فإن التأثير الرئيس للعامل B عند المستوى j يُعرف كما يلي:

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..} \quad (18.5)$$

ويتبع من (18.3b) ومن (18.3c) أن:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \sum_j \beta_j = 0 \quad (18.6)$$

وهكذا، فإن مجموع التأثيرات الرئيسة لكل مستوى عامل هو الصفر.

تأثيرات العامل التجميعية

إن لتأثيرات العامل في الجدول (١٨-١) خاصية مفيدة، إذ يمكن الحصول على كل متوسط استحابة μ_{ij} بمجموع تأثيرات الجنس والعمر الرئيسة إلى المتوسط الكلي $\mu_{..}$ فعلى سبيل المثال لدينا:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 0 + (-3) = 9 \\ \mu_{23} &= \mu_{..} + \alpha_2 + \beta_3 = 12 + 0 + 14 = 16 \end{aligned}$$

وبشكل عام، لدينا من جدول (١٨-١):

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j \quad (18.7)$$

ويمكن إعادة كتابتها، بشكل مكافئ، من تعريفات α_i في (18.4) و β_j في (18.5)، كالآتي:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j \quad (18.7a)$$

ويمكن، أيضاً، تبيان أنه يمكن كتابة كل متوسط معالجة μ_{ij} في الجدول (١٨-١) بدلالة ثلاثة متوسطات معالجات:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \mu_{ij'} + \mu_{ij} - \mu_{ij'} \\ i &\neq i', j \neq j' \end{aligned} \quad (18.7b)$$

وعلى سبيل المثال لدينا:

$$\mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22} = 11 + 9 - 11 = 9$$

أو:

$$\mu_{11} = \mu_{13} + \mu_{21} - \mu_{23} = 16 + 9 - 16 = 9$$

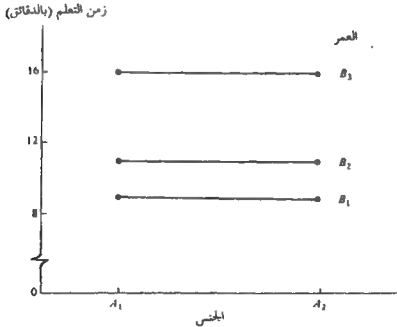
وعند إمكانية كتابة كل متوسطات المعالجات على الشكل (18.7a)، (18.7b)، عندها نقول إن العوامل لاتفاعل، أو إنه لا يوجد تفاعلات عوامل، أو إن تأثيرات العوامل تجميعية. وتكمن أهمية عدم وجود تفاعلات عوامل في أنه يمكن وصف تأثيرات العاملين كل على حدة وذلك بتحليل متوسطات مستويات العوامل أو

التأثيرات الرئيسة للعوامل. وهكذا، ففي مثال التعلم في الجدول (١٨-١) يشير متوسطا الجنس إلى أنه ليس للجنس أي تأثير بصرف النظر عن العمر، وإلى أن متوسطات العمر الثلاثة تصف تأثير العمر بصرف النظر عن الجنس. وبذلك يكون تحليل تأثيرات العوامل بسيط للغاية عندما لا يكون هناك تفاعل بين العوامل.

التمثيل البياني

يقدم الشكل (١٨-١) متوسط أزمدة التعلم في الجدول (١٨-١) بشكل بياني. ويمثل المحور X مستويات عامل الجنس (ونرمز لها بـ A_1 و A_2)، بينما يمثل المحور Y زمن التعلم. ورُسمت منحنيات منفردة لكل مستوى من مستويات عامل العمر (ونرمز لها بـ B_1 و B_2 و B_3). ويدل الميل صفر لكل منحنى على أنه ليس للجنس أي تأثير. وتوضح الفروق بين ارتفاعات المنحنيات تأثيرات العمر على زمن التعلم.

شكل (١٨-١) يوجد تأثير للعمر ولكن لا يوجد تأثير للجنس، مع عدم وجود تفاعلات - مثال التعلم



وفي العادة يتم توصيل النقاط لكل منحنى بخطوط مستقيمة على الرغم من أن المتغير على المحور X (الجنس في مثالنا) ليس متغيراً متصلًا. وعندما يكون المتغير على المحور X متغيراً نوعياً، فإن ميل المنحنيات لن يكون له معنى فيما عدا إذا كان الميل يساوي الصفر مما سيدل على أنه لا يوجد تأثيرات لمستويات العوامل. وعندما يكون واحد أو اثنان من المتغيرات متغيراً كمياً، فإنه ينصح عادةً بوضعه على المحور X .

مثال آخر مع تأثيرات تجميعية للعوامل

يحتوي الجدول (٢-١٨) توضيحاً آخر لتأثيرات عوامل لارتفاع، وذلك لمثال الجنس - العمر السابق نفسه، والوضع هنا يختلف عن ذلك في الجدول (١-١٨) بحيث لا يؤثر العمر وحده في زمن التعلم بل، أيضاً، الجنس. ويتضح هذا من حقيقة أن متوسط أزمّة التعلم يختلف بالنسبة للرجال والنساء في أي مجموعة للعمر.

وكما هو الحال في الجدول (١-١٨)، فإن كل متوسط استجابة في الجدول (١-١٨) يمكن تفكيكه وفقاً لـ (18.7):

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

فعلى سبيل المثال:

$$\mu_{11} = \mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 12 + (-3) = 11$$

ولذلك، فإن العاملين لا يتفاعلان ويمكن بالتالي تحليل تأثيرات العوامل كل على حدة، وذلك بفحص متوسطات مستويات العوامل $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ على الترتيب.

ويقدم الشكل (٢-١٨) البيانات في الجدول (٢-١٨) بشكل بياني. وفي هذه المرة فقد وضعنا العمر على المحور X واستعملنا منحنيات مختلفة لكل جنس. ولاحظ أن الفرق في ارتفاعات المنحنيين يعكس الفرق بين الجنسين وأن الحيدان عن الوضع الأتقي لكل من المنحنيين تعكس تأثير العمر.

عبارات متكافئة لتأثيرات العوامل التجميعية

لقد ذكرنا أنه لا يتفاعل عاملان عندما يكون ممكناً كتابة كل متوسطات المعالجات μ_{ij} وفقاً للشكل (18.7)، أو (18.7a) أو (18.7b). وهناك العديد من الطرق الأخرى للتعرف على ما إذا كان عاملان لا يتفاعلان. وهي مايلي:

١ - الفرق بين متوسطي استجابة لأي مستويين من مستويات العامل B يبقى نفسه لكل مستويات العامل A . (ولذلك في الجدول (٢-١٨)، الانتقال من سن الشباب إلى سن الكهولة يؤدي إلى زيادة دقيقتين لكل من الذكور والإناث، والانتقال من سن الكهولة إلى سن الشيخوخة يؤدي إلى زيادة ٥ دقائق لكل من الذكور والإناث). لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون الفروق، لنقل، بين المستويين ١ و ٢ والمستويين ٢ و ٣ للعامل B هي نفسها. ويمكن أن تختلف هذه بالطبع، ويعتمد ذلك على طبيعة تأثير العامل B .

٢ - الفرق بين متوسط الاستجابات لأي مستويين للعامل A هو نفسه لكل مستويات العامل B . (ولذلك في الجدول (٢-١٨)، الانتقال من الذكور إلى الإناث يؤدي إلى نقص بأربع دقائق لكل مستويات العمر الثلاثة).

٣ - منحنيات متوسطات الاستجابة للمستويات المختلفة لأي عامل متوازنة (مثلاً منحنى الجنس في الشكل (٢-١٨)).

وكل هذه الشروط متكافئة وتعني بأن العاملين لا يتفاعلا.

جدول (٢-١٨) تأثيرات العمر والجنس، مع عدم وجود تفاعلات - مثال التعلم

(أ) متوسط أزمنة التعلم (بالدقائق)				
العامل B العمر				
	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
العامل A الجنس	معدل الصف	شباب	كهل	شيخ
$i = 1$ ذكر	14 (μ_{11})	11 (μ_{12})	13 (μ_{13})	18 (μ_{14})
$i = 2$ أنثى	7 (μ_{21})	9 (μ_{22})	14 (μ_{23})	10 (μ_{24})
متوسط العمود	9 ($\mu_{.1}$)	11 ($\mu_{.2}$)	16 ($\mu_{.3}$)	12 ($\mu_{.4}$)

ب - التأثيرات الأساسية للجنس (بالدقائق)

$$\alpha_1 = \mu_{.1} - \mu_{..} = 14 - 12 = 2$$

$$\alpha_2 = \mu_{.2} - \mu_{..} = 10 - 12 = -2$$

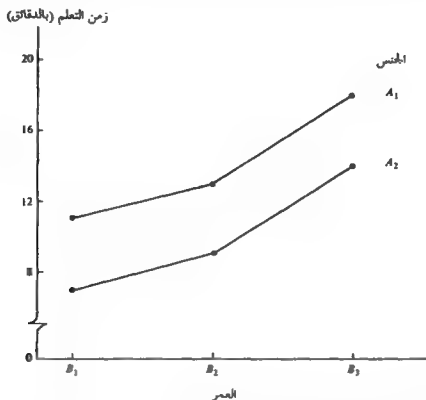
ج - التأثيرات الأساسية للعمر (بالدقائق)

$$\beta_1 = \mu_{.1} - \mu_{..} = 9 - 12 = -3$$

$$\beta_2 = \mu_{.2} - \mu_{..} = 11 - 12 = -1$$

$$\beta_3 = \mu_{.3} - \mu_{..} = 16 - 12 = 4$$

شكل (٢-١٨) تأثيرات العمر والجنس، مع عدم وجود تفاعلات - مثال التعلم



تأثيرات عوامل متفاعلة

يجري الجدول (٣-١٨) تمثيلاً لمثال التعلم بحيث تتفاعل تأثيرات العوامل. وتشير متوسطات أزمنة التعلم لكل تراكيب الجنس - العمر في الجدول (٣-١٨) إلى أنه ليس للجنس تأثير على زمن التعلم في الأشخاص الشباب، بينما يكون له تأثير جوهري بالنسبة للأشخاص كبار السن. ويدل هذا التأثير المختلف للجنس، والذي يعتمد على عمر الشخص، على أن عوامل العمر والجنس تتفاعل في تأثيرها على زمن التعلم.

جدول (٣-١٨) تأثيرات العمر والجنس، مع وجود التفاعلات - مثال التعلم

(أ) متوسط أزمنة التعلم (بالدقائق)					
العامل B العمر					
	j = 3	j = 2	j = 1		
العامل A الجنس	متوسط الصف	شيخ	كهل	شاب	
i = 1 ذكر	13(μ_1)	18(μ_{12})	12(μ_{12})	9(μ_{11})	
i = 2 أنثى	11(μ_2)	14(μ_{23})	10(μ_{22})	9(μ_{21})	
متوسط العمود	12($\mu_{.}$)	16(μ_3)	11(μ_2)	9(μ_1)	
التأثير الرئيس للعمر		4(β_3)	-1(β_2)	-3(β_1)	
(ب) التفاعلات (بالدقائق)					
	متوسط الصف	j = 3	j = 2	j = 1	
i = 1	0	1	0	-1	
i = 2	0	-1	0	1	
متوسط العمود	0	0	0	0	

تعريف التفاعل. يمكننا دراسة وجود تأثيرات عوامل متفاعلة بشكل رسمي عن طريق فحص ما إذا كان يمكن كتابة جميع متوسطات المعالجات وفقاً لـ (18.7) أم لا:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

فإذا كان ذلك ممكناً، فإن تأثيرات العامل تجميعية، وإلا تكون تأثيرات العامل متفاعلة. ولمثال التعلم في الجدول (٣-١٨)، فإن التأثيرات الرئيسة للعوامل موضحة في هوامش الجدول. ومن الواضح أن العوامل تتفاعل. فعلى سبيل المثال:

$$\mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 1 + (-3) = 10$$

بينما $\mu_{11} = 9$. فلو كان العاملان تجميعيين، لكانت هاتان القيمتان متساويتين.

والفرق بين متوسط المعالجة μ_{ij} والقيمة $\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$ الذي يمكن توقعه لو كان العاملان تجميعيين يسمى تأثير التفاعل أو بشكل أبسط التفاعل، بين المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B، ويرمز له بالرمز $(\alpha\beta)_{ij}$. ولذلك، فإننا نعرف $(\alpha\beta)_{ij}$ كما يلي:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j) \quad (18.8)$$

وتعويض قيم α_i و β_j وفقاً لتعريفهما في (18.4) و (18.5)، على الترتيب، نحصل على تعريف بدلي هو:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j) \quad (18.8a)$$

وباستخدام (18.7b) نحصل على تعريف بدلي آخر:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} \quad (18.8b)$$

وللإعادة، فإن التفاعل بين المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B والذي يرمز له بالرمز $(\alpha\beta)_{ij}$ ، هو ببساطة الفرق بين μ_{ij} والقيمة التي نتوقعها لو أن العوامل كانت تجميعية. وإذا كان العاملان تجميعيين، فإن جميع التفاعلات ستكون، في الحقيقة مساوية للصفر، أي أن $(\alpha\beta)_{ij} = 0$.

ويوضح الجدول (٣-١٨)ب التفاعلات لمثال التعلم في الجدول (٣-١٨)أ فعلى سبيل المثال لدينا:

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)_{13} &= \mu_{13} - (\mu_{..} + \alpha_1 + \beta_3) \\ &= 18 - (12 + 1 + 4) \\ &= 1 \end{aligned}$$

التعرف على التفاعلات. يمكننا التعرف على وجود التفاعلات من عدمها بأحد الطرق المتكافئة التالية:

- ١ - بفحص ما إذا كان بالإمكان كتابة كل الـ μ_{ij} على صيغة الجاميع $\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$.
- ٢ - بفحص ما إذا كان الفرق بين متوسطات الاستجابة لأي متسويين من العامل B هو نفسه لكل مستويات العامل A . (لاحظ في الجدول (٣-١٨)أ أن متوسط زمن التعلم يزيد عند الانتقال من الأشخاص الشباب إلى الأشخاص الكهول بثلاث دقائق للرجال، ولكن بلقطة للنساء).
- ٣ - بفحص ما إذا كان الفرق بين متوسطات الاستجابة لأي متسويين من العامل A هو نفسه لكل مستويات العامل B . (لاحظ في الجدول (٣-١٨)أ بأنه لا يوجد فرق بين الجنسين للأشخاص الشباب، ولكن يوجد فرق بأربع دقائق للأشخاص الشيوخ...).

٤ - بفحص ما إذا كانت منحنيات متوسط المعالجة لمستويات العامل المختلفة في رسم ما متوازية. (يقدم الشكل (٣-١٨) متوسطات للمعالجات في الجدول (٣-١٨) أ مع وضع العمر على المحور X. لاحظ أن منحنيات متوسط المعالجة للجنسين غير متوازية).

تعليقات

١ - لاحظ من الجدول (٣-١٨) ب أن بعض التفاعلات تساوي الصفر بالرغم من أن العاملين يتفاعلان، ويجب أن تكون جميع التفاعلات تساوي الصفر كي يكون العاملان تجميعيين.

٢ - يوضح الجدول (٣-١٨) ب أن مجموع التفاعلات يساوي الصفر عند جمعها إما فوق الصفوف أو فوق الأعمدة:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, b \quad (18.9a)$$

$$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, a \quad (18.9b)$$

وبالتالي، فإن مجموع كل التفاعلات يساوي الصفر، أيضا:

$$\sum_i \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad (18.9c)$$

ونوضح هذا بالنسبة لـ (18.9a):

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{i=1}^a (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \alpha_i - \beta_j)$$

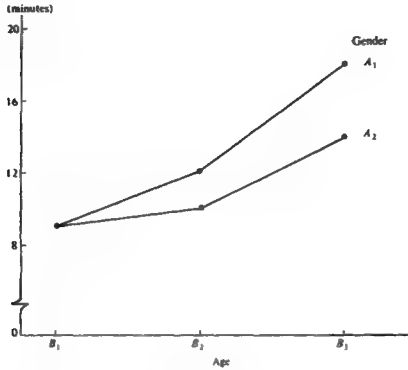
$$= \sum_i \mu_{ij} - a\mu_{.j} - \sum_i \alpha_i - a\beta_j$$

والآن $a\mu_{.j} = \sum_i \mu_{ij}$ وذلك من (18.1)، و $\sum_i \alpha_i = 0$ من (18.6) وأخيرا

$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$ من (18.5) وبالتالي نجد:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = a\mu_{.j} - a\mu_{.j} - a(\mu_{.j} - \mu_{..}) = 0$$

شكل (٣-١٨) تأثيرات العمر والجنس، مع التفاعلات المهمة - مثال التعلم



التفاعلات المهمة وغير المهمة

عندما يتفاعل عاملان، فالسؤال الذي يبرز هو هل تُعتبر متوسطات مستويات العامل مقاييس ذات معنى. فعلى سبيل المثال، في الجدول (٣-١٨) يمكن مناقشة كون متوسطات مستويات عامل الجنس 11 و 13 مقاييس مضللة. فهما يدلان على وجود فرق في زمن التعلم بين النساء والرجال، ولكن هذا الفرق ليس كبيراً جداً. ولكن متوسطات مستويات العامل هذه تُخفي حقيقة أنه لا يوجد فرق في متوسط زمن التعلم بين الجنسين للأشخاص الشباب، ولكن يوجد فرق كبير نوعاً ما للأشخاص الشيخوخ. ولذلك، قد تعتبر التفاعلات في الجدول (٣-١٨) تفاعلات مهمة، مما يعني ضمناً أنه يجب عدم مناقشة تأثيرات كل عامل على حدة بدلالة متوسطات مستويات العامل.

ويقدم رسم، كالرسم في الشكل (١٨-٣)، بفعالية، وصفاً لطبيعة التأثيرات المتفاعلة للعاملين.

وفي بعض الأحيان، عندما يتفاعل عاملان، فإن تأثيرات التفاعل تكون صغيرة جداً بحيث يمكن اعتبارها تفاعلات غير مهمة، ويقدم الجدول (١٨-٤) والشكل (١٨-٤) مثالاً لهذه الحالة. ولاحظ من الشكل (١٨-٤) أن المنحنيات متوازية تقريباً. ونعلم أن المنحنيات المتوازية تماماً تدل على عدم وجود تفاعلات. ويمكن للمرء، لأغراض عملية، أن يقول إن متوسط زمن التعلم للنساء هو أقل بدقيقتين من زمن التعلم للرجال، وإن هذه العبارة صحيحة تقريباً لكل مجموعات العمر. أو بشكل آخر، أن العبارات المبينة على متوسط زمن التعلم لفئات العمر المختلفة ستكون تقريباً صحيحة لكلا الجنسين.

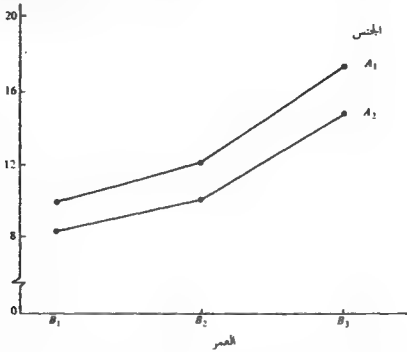
وهكذا، فإنه في حالة التفاعلات غير المهمة، فإن تحليل تأثيرات العامل يمكن أن يتم كما في حالة عدم وجود تفاعل. ويمكن دراسة كل عامل على انفراد، بناءً على متوسطات مستويات العامل μ_{ij} و $\mu_{i.}$ على الترتيب. وبالطبع، فإن هذا التحليل المنفرد لتأثيرات العامل أبسط بكثير من التحليل المشترك للعاملين بناءً على متوسطات المعالجات μ_{ij} ، وهو التحليل المطلوب عندما تكون التفاعلات مهمة.

جدول (١٨-٤) تأثيرات العمر والجنس مع عدم وجود تفاعلات مهمة - مثال التعلم

	العامل B العمر			العامل A الجنس
	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
متوسط الصف				
13.0	17.25	12.00	9.75	$i = 1$ ذكر
11.0	14.75	10.00	8.25	$i = 2$ أنثى
12.0	16.0	11.0	9.0	متوسط العمود

شكل (٤-١٨) تأثيرات العمر والجنس، عدم وجود تفاعلات مهمة (التحيزات تقريبا متوازنة) - مثال المعلم.

زمن التعلم (بالدقائق)



تعليقات

١ - إن تحديد ما إذا كانت التفاعلات مهمة أم غير مهمة هو في بعض الأحيان صعب. وهذا القرار ليس قراراً إحصائياً ويجب أن يقوم به مختص في ميدان موضوع البحث. والفائدة من التفاعلات غير المهمة (أو عدم وجود تفاعلات)، (يعني أنه يمكن عندئذٍ تحليل تأثيرات العوامل على انفراد)، تكون فائدة كبيرة بشكل خاص عندما تتضمن الدراسة أكثر من عاملين.

٢ - أحياناً يكون اعتبار تأثيرات كل عامل بدلالة متوسطات مستويات العامل ذا معنى حتى عند وجود تفاعلات مهمة. فعلى سبيل المثال، استُعملت طريقتان لتدريس الرياضيات في الكلية (بمجردة وتقليدية) لطلاب ذوي كفاءات كمية متميزة وجيدة ومقبولة. وقد وجدت تفاعلات مهمة بين طريقة التدريس وقدرة الطالب

الكمية، فالطلاب ذوو المقدرة الكمية الممتازة اتجهوا لإحراز نتائج جيدة في طريقتي التدريس كليهما، بينما اتجه الطلاب ذوو المقدرة الكمية الجيدة أو المقبولة إلى إحراز نتائج أفضل عند تدريسهم بالطريقة التقليدية. ولو تمّ تدريس أعداد متساوية من الطلاب ذوو الكفاءات الكمية المقبولة والجيدة والممتازة في كل من الطريقتين التدريسيّتين، فالطريقة، عندئذٍ، التي تعطي أفضل متوسط في النتيجة لجميع الطلاب يمكن أن تكون مفيدة لنا حتى عند وجود تفاعلات مهمة. وستكون مقارنة متوسطات مستويات عامل طريقة التدريس ذات أهمية حتى عند وجود تفاعلات مهمة.

تفاعلات قابلة للتحويل وتفاعلات غير قابلة للتحويل

عند وجود تفاعلات مهمة، فإنها في بعض الأحيان تكون نتيجة لقياس المتغير التابع على سلم قياس غير ملائم. اعتبر، على سبيل المثال، حالة أن التأثيرات الرئيسة للعامل تفعل بصورة جدائية، وليست تجميعية كما في (18.7):

$$\mu_{ij} = \mu.. + \alpha_i + \beta_j \quad (18.10)$$

فلو افترضنا في هذه الحالة أن تأثيرات العوامل تجميعية، فسنجد أن الشرط (18.7) لا يتحقق، وبالتالي توجد تفاعلات. ولكن يمكن إزالة هذه التفاعلات بتطبيق التحويل اللوغاريتمي على (18.10):

$$\log \mu_{ij} = \log \mu.. + \log \alpha_i + \log \beta_j \quad (18.11)$$

ويمكن إعادة كتابة هذه النتيجة بشكل مكافئ كما يلي:

$$\mu'_{ij} = \mu'.. + \alpha'_i + \beta'_j \quad (18.11a)$$

حيث:

$$\mu'_{ij} = \log \mu_{ij}$$

$$\mu'.. = \log \mu..$$

$$\alpha'_i = \log \alpha_i$$

$$\beta'_j = \log \beta_j$$

وتقترح النتيجة في (18.11a) بأن سلّم القياس للمتغير التابع y يمكن ألا يكون

الأكثر ملاءمة، بمعنى أن يؤدي إلى نتائج سهلة الفهم. ولكن استخدام $Y' = \log Y$ لتغير الاستجابة ربما كان أفضل، إذ أنه يجعل النموذج (18.7) أكثر ملاءمة.

ونقول عن التفاعلات التي تعود إلى وجود تأثيرات عوامل جدائية إنها تفاعلات قابلة للتحويل، ذلك لأن تحويلاً بسيطاً لـ Y سيزيل معظم تأثيرات التفاعل وبالتالي يجعلها تفاعلات غير مهمة.

ويظهر مثال آخر للتفاعلات القابلة للتحويل عندما يكون تأثير كل تفاعل مساوياً لحاصل ضرب دوال في التأثيرات الرئيسية:

$$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j + 2\sqrt{\alpha_i} \sqrt{\beta_j} \quad (18.12)$$

وشكل مكافئ لـ (18.12) هو:

$$\mu_{ij} = (\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_j})^2 \quad (18.12a)$$

فلو طبقنا الآن تحويل الجذر التربيعي، فسنحصل على نموذج التأثيرات التجميعية:

$$\mu'_{ij} = \alpha'_i + \beta'_j \quad (18.13)$$

حيث:

$$\mu'_{ij} = \sqrt{\mu_{ij}}$$

$$\alpha'_i = \sqrt{\alpha_i}$$

$$\beta'_j = \sqrt{\beta_j}$$

وبعض التحويلات البسيطة التي يمكن أن تساعد في جعل التفاعلات المهمة غير مهمة هي تحويلات التربيع، الجذر التربيعي، اللوغاريتمي والمقلوب. وعندما لا يمكن إزالة التفاعلات بشكل كبير بتحويل بسيط فإنها تسمى تفاعلات غير قابلة للتحويل. ويحوي الجدول (٥-١٨) مثالاً على تفاعلات مهمة قابلة للتحويل. وعند تطبيق تحويل الجذر التربيعي على هذه المتوسطات، فإن متوسطات للعالجات الناتجة في الجدول (٥-١٨) ب لا تبين أي تأثيرات متفاعلة. وبالطبع فإنه لا يمكن أن نتوقع عادة أن يزيل تحويل بسيط لسلم القياس كل التفاعلات كما في الجدول (٥-١٨)، ولكن ما نتوقعه هو أن تصبح التفاعلات غير مهمة بعد التحويل.

تفسير التفاعلات

يمكن أن تكون عملية تفسير التفاعلات صعبة للغاية عندما تكون التأثيرات المتفاعلة معقدة. ولكن توجد مناسبات عديدة، على أية حال، يكون للتفاعلات فيها بنية بسيطة، كما هو الحال في الجدول (١٨-٣) أ بحيث يمكن وصف التأثيرات المشتركة للعوامل بطريقة مباشرة وسهلة.

جدول (١٨-٥) توضيح للفاعل قابل للتحويل

(ب) متوسطات المعالجات بعد تحويل الجذر الرعي			(أ) متوسطات المعالجات (سَلَم القياس الأصلي)		
العامل ب			العامل ب		
$j=2$	$j=1$	العامل أ	$j=2$	$j=1$	العامل أ
8	4	$i=1$	64	16	$i=1$
11	7	$i=2$	121	49	$i=2$
12	8	$i=3$	144	64	$i=3$

ويعطى الجدول (١٨-٦) أمثلة إضافية عديدة. ولدنا في الجدول (١٨-٦) أ أحد الحالات بحيث أنه إما زيادة الراتب أو زيادة الصلاحيات للمسؤولين ذوي الرواتب المنخفضة والمسؤوليات المحدودة تؤدي إلى زيادة الإنتاجية. ولكن ضم كل من زيادة الراتب والصلاحيات لا يؤدي إلى أي زيادات إضافية في الإنتاج أكثر من تلك التي يعطيها زيادة أحدهما، فقط. ويوضح الجدول (١٨-٦) ب حالة تتطلب زيادة كل من الراتب والصلاحيات قبل الحصول على زيادة جوهرية في الإنتاجية. ويمثل الشكل (١٨-٦) ج، حالة لا يتفاعل فيها حجم الطاقم وشخصية رئيس الطاقم مع الإنتاجية على أساس الشخص الواحد، وذلك عندما يكون حجم الطاقم 6، 8 أو 10 أشخاص.

جدول (٦-١٨) أمثلة على أنواع مختلفة من التفاعلات

أ - إنتاجية المسؤولين التنفيذيين		
المسؤولية (العامل B)		
العامل A (الرتب)	صغير	كبير
منخفض	50	76
عالي	53	75
ب - إنتاجية المسؤولين التنفيذيين		
العامل B (المسؤولية)		
العامل A (الرتب)	صغير	كبير
منخفض	50	52
عالي	53	75
ج - الانتاجية على اساس الشخص الواحد في طاقم		
العامل B (شخصية رئيس الطاقم)		
العامل A (حجم الطاقم)	صغير	كبير
٤ أشخاص	28	20
٦ أشخاص	22	20
٨ أشخاص	20	18
١٠ أشخاص	17	15

ملاحظة

يمكن أن يتفاعل عاملان، ولكن في الوقت نفسه، فإن التأثيرات الرئيسية لأحدهما (أو كليهما) تساوي الصفر، وسيكون هذا بسبب تفاعلات في اتجاهات متعاكسة تصل إلى حالة توازن فوق أحد (أو كلي) العاملين. وهكذا، ستكون هناك تأثيرات مؤكدة للعوامل، ولكنها لا تتجلى عن طريق متوسطات مستويات العوامل. ولحسن الحظ، فإن حالة وجود تأثيرات متفاعلة مع عدم تأثيرات رئيسة لأحد (أو كلي) العاملين هي حالة غير اعتيادية. والحالة التقليدية هي أن تكون تأثيرات التفاعل أصغر من التأثيرات الرئيسية.

(٣-١٨) نموذج I لدراسات ثنائية العامل (مستويات مثبتة للعامل)

بعد أن شرحنا عناصر النموذج، فإننا الآن مستعدون لتطوير نموذج تحالين I بمستويات مثبتة للعوامل في دراسات ثنائية العامل، وذلك عندما تكون جميع أحجام العينات للمعالجات متساوية، ويكون لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها. ونموذج التحالين هذا قابل للتطبيق في دراسات الملاحظة وفي الدراسات التجريبية المبنية على التصميم تام العشوائية. وسنعتبر في القسم ٧ نماذج التحالين لتصميمات تجريبية أخرى. الوضع الأساسي هو كمايلي: يُدرس العامل A عند a من المستويات، وهذه المستويات مهمة لنا بمجد ذاتها، أو بمعنى آخر، لا تُعتبر هذه المستويات عينة من مجتمع أكبر من مستويات A. وبشكل مشابه، يُدرس العامل B عند b من المستويات المهمة بمجد ذاتها. وتشمل الدراسة كل الـ ab من تراكيب مستويات العاملين، وعدد المشاهدات لكل من الـ ab من المعالجات هو نفسه، ونرمز له بالرمز n ومن الضروري أن يكون $n > 1$. ولذلك فإن العدد الكلي من المشاهدات في الدراسة هو:

$$n_T = abn \quad (18.14)$$

ونرمز للملاحظة رقم k ($k = 1, \dots, n$) الخاصة بالمعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j بالرمز Y_{ijk} ($i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$). ويوضح الجدول (٧-١٨) في الصفحة هذا الترميز لمثال يكون فيه A عند ثلاثة مستويات، B عند مستويين مع أخذ تكرارين لكل معالجة.

وسنعرض نموذج التحالين المثبت للدراسات ثنائية العامل في شكلين متكافئين - شكل متوسطات الخلايا، وشكل تأثيرات العامل - وفيما بعد سنستخدم أحد الشكلين أو الآخر وفقا لما تحليه السهولة.

نموذج متوسطات الخلايا

عندما ننظر للـ ab من المعالجات دون اعتبار للبيئة العملية للدراسة، فإننا نعتبر عن نموذج تحليل التباين بدلالة متوسطات الخلايا μ_{ij} (وتعتبر هنا متوسطات معالجات):

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (18.15)$$

حيث:

μ_{ij} معالم

ε_{ijk} مستقلة تتبع $N(0, \sigma^2)$

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$$

سمات مهمة للنموذج

١ - المعلمة μ_{ij} هي متوسط الاستجابة للمعالجة التي يكون فيها العامل A عند

المستوى i والعامل B عند المستوى j. وهذا يتبع لأن $E\{\varepsilon_{ijk}\} = 0$:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{ij} \quad (18.16)$$

٢ - بما أن μ_{ij} عدد ثابت، فإن تباين Y_{ijk} هو:

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2\{\varepsilon_{ijk}\} = \sigma^2 \quad (18.17)$$

٣ - بما أن حدود الخطأ ε_{ijk} مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي فإن المشاهدات Y_{ijk}

تكون كذلك، أيضا. ولذلك فإننا نستطيع، أيضا، كتابة نموذج التباين (18.15) كما

يلي:

$$Y_{ij} \text{ مستقلة وتتبع } N(\mu_{ij}, \sigma^2) \quad (18.18)$$

٤ - نموذج التباين (18.15) هو نموذج خطي لأنه يمكن التعبير عنه بالشكل

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \text{حيث } a = b = 2 \text{ أي أن } a = b = 2$$

ولكل معالجة محاولتان (أي أن $n = 2$). فنتذكر تعريف Y, X, β و ε كما يلي:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix} \quad (18.19)$$

نذكر أن المتجه $E\{Y\}$ الذي يتألف من العناصر $E\{Y_{ijk}\}$ ، يساوي $X\beta$ وفقاً لـ (7.18a). وبالتالي يكون هذا المتجه هنا:

$$E\{Y\} = X\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} \quad (18.20)$$

وهكذا فإن $E\{Y_{ijk}\} = \mu_{ij}$ ، كما يجب أن يكون وفقاً لـ (18.16) وعندما يكون

التثيل المصفوفي الملائم لنموذج تحاين ثنائي العامل (18.15) هو:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \end{bmatrix} = X\beta + \varepsilon = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix} \quad (18.21)$$

٥ - يشابه نموذج التحاين (18.15) نموذج التحاين (14.2) فيما عدا الدليلين

الملحقين اللذين نحتاجهما الآن لتحريف المعالجة. إن الطبيعية، واستقلال حدود الخطأ

وثبات تباينات حدود الخطأ جميعها خواص لحدود الخطأ في نماذج التباين لكل من الدراسات وحيدة العامل والدراسات ثنائية العامل.

نموذج تأثيرات العوامل

يمكن الحصول على نسخة مكافئة لنموذج متوسطات الخلايا (18.15) بالاستفادة من تعبير مطابق لمتوسطات المعالجات μ_{ij} بدلالة تأثيرات العوامل بناءً على تعريف التفاعل في (18.8):

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j)$$

وبإعادة ترتيب الحدود، نحصل على المتطابقة:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \quad (18.22)$$

حيث:

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \sum_j \mu_{ij}}{ab}$$

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$$

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$$

ويدل هذا التشكيل على أنه يمكن النظر إلى متوسطات الخلايا μ_{ij} لأي معالجة كمجموع أربع مركبات من تأثيرات العوامل، ونعني (18.22)، على وجه التحديد أن متوسط الاستجابة للمعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j هو مجموع:

١ - ثابت إجمالي $\mu_{..}$.

٢ - التأثير الرئيس α_i للعامل A عند المستوى i .

٣ - التأثير الرئيس β_j للعامل B عند المستوى j .

٤ - تأثير التفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ عندما يكون العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j .

وبتعويض μ_{ij} في نموذج التباين (18.15) بالعبارة المكافئة لها في (18.22)، نحصل على نموذج تخمين تأثيرات العامل المكافئ للدراسات ثنائية العامل:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (18.23)$$

حيث:

$\mu..$ ثابت.

$\sum \alpha_i = 0$ ثوابت خاضعة للقيود

$\sum \beta_j = 0$ ثوابت خاضعة للقيود

$(\alpha\beta)_{ij}$ ثوابت خاضعة للقيود

$$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

ε_{ijk} مستقلة وتبع $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, a$ و $j = 1, \dots, b$ و $k = 1, \dots, n$

صحات مهمة للنموذج

١ - يوافق نموذج التحاين (18.23) نموذج التحاين للتأثيرات المثبتة (14.60) في الدراسة وحيدة العامل فيما عدا أنه يتم استبدال مجموع يتكون من تأثير العامل A، تأثير العامل B، وتأثير تفاعل بتأثير المعالجة وحيدة العامل.

٢ - خواص للمشاهدات Y_{ijk} لنموذج تحاين (18.23) هي نفسها خواص نموذج متوسطات الخلايا المكافئ (18.15) وما أن $E(\varepsilon_{ijk}) = 0$ ، فلدينا:

$$E(Y_{ijk}) = \mu.. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \mu_{ijk} \quad (18.24)$$

وتتبع المساواة الثانية من المتطابقة (18.22). وإضافة إلى ذلك، لدينا:

$$\sigma^2(Y_{ijk}) = \sigma^2 \quad (18.25)$$

ذلك لأن حد الخطأ ε_{ijk} في الجزء الأيمن من (18.23) هو الحد العشوائي الوحيد وكذلك $\sigma^2(\varepsilon_{ijk})$ ، وأخيراً، فإن Y_{ijk} متغيرات عشوائية مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي لأن حدود الخطأ متغيرات عشوائية مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي. وبالتالي يمكننا، أيضاً، كتابة نموذج التحاين (18.23) كما يلي:

$$Y_{ijk} \text{ مستقلة وتتبع } [\mu.. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2] \quad (18.26)$$

٣ - نموذج التحاين (18.23) هو نموذج خطي، ذلك لأنه يمكن كتابته على

$$Y = X\beta + \varepsilon \text{ الشكل}$$

وسنوضح هذا بشكل صريح في الفقرة ٨-١٨.

(٨-١٨) تحليل التباين

توضيح

يحتوي الجدول (٧-١٨) على توضيح مستخدمه في كل من هذا الفصل والفصل الذي يليه. تزود شركة كاسل للمعجنات علما كبيرا من الأسواق المركزية في مساحة حضرية واسعة بخبز إيطالي مغلف. وقامت بدراسة تجريبية عن تأثير ارتفاع رفوف العرض (سفلي - أوسط - علوي) واتساعها (عادي - متسع) على مبيعات هذا الخبز (تقاس بعدد العلب) خلال الفترة التجريبية.

وتم استخدام اثني عشر سوقا مركزيا لهذه الدراسة، تتشابه في حجوم المبيعات وعدد الزبائن، وخصص سوقان مركزيان بشكل عشوائي لكل من المعالجات الست وفقا لتصميم تام العشوائية، وتم عرض الخبز في كل محل وفقا لمواصفات المعالجة في ذلك المحل. ورصدت مبيعات الخبز وقدمت هذه النتائج في الجدول (٧-١٨).

ترميز

يوضح الجدول (٧-١٨) الترميز الذي سنستخدمه للدراسات ثنائية العامل. فهو امتداد مباشر لرميز الدراسات وحيدة العامل. ويرمز لمشاهدة ما بالرمز Y_{ij} . وتحدد الرموز i و j مستويات العاملين A ، B ، على الترتيب، ويعود الرمز k لأي مشاهدة أو محاولة لمعالجة معينة (أي لفرقة من مستويات العاملين).

وتشير النقطة كبديل عن دليل ملحق على التجميع أو حساب المتوسط فرق المتغير الممثل بذلك الدليل. فعلى سبيل المثال، مجموع المشاهدات للمعالجة التي توافق المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B هو:

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^n Y_{ijk} \quad (18.27a)$$

ومتوسط هذه المشاهدات هو:

$$\bar{Y}_{ij} = \frac{Y_{ij}}{n} \quad (18.27b)$$

الجدول (١٨-٧) بيانات عينة ورموز للدراسة ذات عاملين - مثال تحليل كاسل

		العامل B (اتساع رف العرض)		
		<i>i</i>		
المتوسط لعامل ارتفاع رف العرض	بمجموع الصف	<i>B</i> ₂ عريض	<i>B</i> ₁ عادي	العامل A (ارتفاع رف العرض) <i>I</i>
44(<i>Ȳ</i> _{1.})	176(<i>Y</i> _{1.})	46(<i>Y</i> ₁₂₁)	47(<i>Y</i> ₁₁₁)	<i>A</i> ₁ (الأفقل)
		40(<i>Y</i> ₁₂₂)	43(<i>Y</i> ₁₁₂)	
		86(<i>Y</i> _{12.})	90(<i>Y</i> _{11.})	المجموع
		43(<i>Ȳ</i> _{12.})	45(<i>Ȳ</i> _{11.})	المتوسط
67(<i>Ȳ</i> _{2.})	268(<i>Y</i> _{2.})	67(<i>Y</i> ₂₂₁)	62(<i>Y</i> ₂₁₁)	<i>A</i> ₂ (الوسط)
		71(<i>Y</i> ₂₂₂)	68(<i>Y</i> ₂₁₂)	
		138(<i>Y</i> _{22.})	130(<i>Y</i> _{21.})	المجموع
		69(<i>Ȳ</i> _{22.})	65(<i>Ȳ</i> _{21.})	المتوسط
42(<i>Ȳ</i> _{3.})	168(<i>Y</i> _{3.})	42(<i>Y</i> ₃₂₁)	41(<i>Y</i> ₃₁₁)	<i>A</i> ₃ (القمة)
		46(<i>Y</i> ₃₂₂)	39(<i>Y</i> ₃₁₂)	
		88(<i>Y</i> _{32.})	80(<i>Y</i> _{31.})	المجموع
		44(<i>Ȳ</i> _{32.})	40(<i>Ȳ</i> _{31.})	المتوسط
	612(<i>Y</i> _{...})	312(<i>Y</i> _{2.})	300(<i>Y</i> _{1.})	بمجموع العمود
54(<i>Ȳ</i> _{...})		52(<i>Ȳ</i> _{2.})	50(<i>Ȳ</i> _{1.})	المتوسط لعامل اتساع رف العرض

وبمجموع كل المشاهدات عند المستوى i للعامل A هو:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m Y_{ijk} \quad (18.27c)$$

والمتوسط المقابل له هو:

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{bn} \quad (18.27d)$$

وبشكل مشابه، يُرمز لمجموع كل المشاهدات عند المستوى j للعامل B والمتوسطها

بالرمزين:

$$Y_{.j} = \sum_i \sum_k^n Y_{ijk} \quad (18.27e)$$

$$\bar{Y}_{.j} = \frac{Y_{.j}}{an} \quad (18.27f)$$

وأخيراً يُرمز لمجموع كل المشاهدات في الدراسة بالرمز:

$$Y_{..} = \sum_i \sum_j^b \sum_k^n Y_{ijk} \quad (18.27g)$$

والتوسط الكلي هو:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{anb} \quad (18.27h)$$

توليف نموذج تحاين

نموذج متوسطات المحلّايا (18.15) سنقوم بتوفيق نموذج تحاين متوسطات المحلّايا

ثنائي العامل (18.15) بطريقة المربعات الدنيا. ومقياس المربعات الدنيا هنا هو:

$$Q = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \mu_{ij})^2 \quad (18.28)$$

وعندما نجعل Q أصغر مايمكن، نحصل على تقديرات المربعات الدنيا:

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{ij} \quad (18.29)$$

وهكذا فإن القيم التوفيقية هي متوسطات المعالجات المقدّرة:

$$\hat{Y}_{ijk} = \hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{ij} \quad (18.30)$$

وكما هو متعارف، فإن الرواسب تُعرّف بالفرق بين القيم المشاهدة والقيم التوفيقية:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij} \quad (18.31)$$

وكما كانت في النماذج الإحصائية الأخرى، فإن الرواسب مفيدة للغاية في

تقويم مصداقية نموذج التحاين ثنائي العامل (18.15).

نموذج تأثيرات العوامل (18.23) بالنسبة للنموذج المكافئ، وهو نموذج تأثيرات

العوامل (18.23)، فإننا نجعل مقياس المربعات الدنيا التالي أصغر ما يمكن:

$$Q = \sum_i \sum_j \sum_k [Y_{ijk} - \mu_{..} - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij}]^2 \quad (18.32)$$

عاضدا للقيود التالية:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \sum_j \beta_j = 0 \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

وعندما نقوم بهذه العملية، نحصل على تقديرات المربعات الدنيا للمعالم التالية:

التقدير - للمعلمة

المعلمة	التقدير
$\mu_{..}$	$\hat{\mu}_{..} = \bar{Y}_{..}$ (18.33a)
$\alpha_i = \mu_i - \mu_{..}$	$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$ (18.33b)
$\beta_j = \mu_j - \mu_{..}$	$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$ (18.33c)
$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu_{..}$	$(\hat{\alpha\beta})_{ij} = \bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}$ (18.33d)

ويوضح بشكل جلي التقابل بين مقدرات المربعات الدنيا وتعريف المعالم. إن القيم التوفيقية والرواسب في نموذج تأثيرات العوامل (18.23) هي نفسها تماما كذلك التي حصلنا عليها في نموذج متوسطات الخلايا (18.15). وعلى وجه التحديد، فإن القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23) هي:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\ &= \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}) \\ &= \bar{Y}_{ij} \end{aligned} \quad (18.34)$$

ومرة أخرى تكون الرواسب كالتالي:

$$e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{ij} \quad (18.35)$$

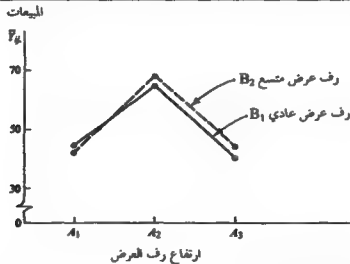
ملاحظة

تقديرات المربعات الدنيا في (18.29) و (18.33) هي نفسها التي حصلنا عليها بطريقة الامكانية العظمى.

مثال. في مثال شركة كاسل للمعجنات، القيم التوفيقية هي المتوسطات المقدرة للمعالجات \bar{Y}_{ij} للوضحة في الجدول (٧-١٨). ويوضح الشكل (٥-١٨) تمثيلا بيانيا

لهذه المتوسطات المقترنة للمعالجات. ونرى من هذا الشكل أن متوسط المبيعات للرفوف ذات الارتفاع المتوسط أعلى بشكل جوهري من متوسط المبيعات لمستوي ارتفاع الرفوف الآخرين أي العادي والمتسع. ولا يبدو أن لاتساع الرفوف أي تأثير كبير على الإطلاق. وفي الواقع، قد لا يوجد أي تأثير لاتساع الرفوف، إذ يكون التغير بين المتوسطات المقترنة للمعالجات، لأي ارتفاع للرفوف، من طبيعة عشوائية. وفي هذه الحالة، لن يكون هناك أي تفاعلات بين ارتفاع رفوف العرض وبين اتساعها. ويختلف الشكل (٥-١٨) عن الأشكال السابقة التي توضح تأثيرات العوامل، ذلك لأن الأشكال السابقة قدمت متوسطات للمعالجات الفعلية B_1 و B_2 ، بينما يوضح الشكل (٥-١٨) تقديرات العينة. ولذلك، فإننا نحتاج لاختبار ما إذا كانت التأثيرات الموضحة في الشكل (٥-١٨) تأثيرات فعلية أم أنها تمثل تغيرات عشوائية، فقط. ولإجراء مثل هذه الاختبارات، نحتاج إلى تفكيك مجموع المربعات الكلي، وهذا ما سنناقشه في الفقرة التالية.

الشكل (٥-١٨) رسم للمتوسطات المقترنة للمعالجات - مثال شركة كاسل للمجمعات



تفكيك مجموع المربعات الكلي

تفكيك الانحراف الكلي. سنفكك انحراف مشاهدة ما Y_{ijk} عن المتوسط الكلي \bar{Y} على مرحلتين. في البداية سنحصل على تفكيك للانحراف الكلي $Y_{ijk} - \bar{Y} \dots$

وذلك باعتبار الدراسة تتكون من ab من المعالجات:

$$y_{ijk} - \bar{y}_{...} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{...} + y_{ijk} - \bar{y}_{ij} \quad (18.36)$$

الانحراف الكلي	انحراف المتوسط	الانحراف حول المتوسط المقدر
	المقدر للمعالجات	المعالمات
	حول المتوسط الكلي	

ولاحظ أن الانحراف حول المتوسط المقدر للمعالجات هو ببساطة الراسب e_{ijk} :

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij}$$

وستفكك بعد ذلك انحراف المتوسط المقدر للمعالجات $\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{...}$ بدلالة مركبات

تعكس التأثير الرئيس للعامل A ، التأثير الرئيس للعامل B والتفاعل AB :

$$\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{...} = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{...} + \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{...} \quad (18.37)$$

انحراف المتوسط المقدر للمعالجات	التأثير الرئيس للعامل A	التأثير الرئيس للعامل B	تأثير التفاعل AB
	للعامل A	للعامل B	

حول المتوسط الكلي

مجموع مربعات المعالجات والخطأ. عندما نربع (18.36) ونقوم بالتجميع فوق

كل المشاهدات، فإن الحد الجندائي يتلاشى ونحصل على:

$$SSTO = SSSTR + SSE \quad (18.38)$$

حيث:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \quad (18.38a)$$

$$SSSTR = n \sum_i \sum_j (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{...})^2 \quad (18.38b)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}^2 \quad (18.38c)$$

ويعكس $SSSTR$ التشتت بين الـ ab من المتوسطات المقدرة للمعالجات، وهو في الوقت نفسه مجموع مربعات المعالجات الاعتيادي، ويعكس SSE التشتت ضمن المعالجات وهو مجموع مربعات الخطأ الاعتيادي. والفرق الوحيد بين هذه للمعادلات وتلك في الحالة وحيدة العامل هو استخدام الرمز i وز لتسمية للمعالجة.

مثال. يجري الجدول (٨-١٨) تفكيك لمجموع المربعات الكلية (18.38) لمشال شركة كاسل للمعجنات. وهذا هو جدول التحاين الاعتيادي عند معاملة الدراسة كدراسة وحيدة العامل بـ $r = 6$ معالجات. ونحصل على مجموع المربعات كما يلي:

$$\begin{aligned} SSTO &= (47 - 51)^2 + (43 - 51)^2 + (46 - 51)^2 + \dots + (46 - 51)^2 = 1,642 \\ SSTR &= 2[(45 - 51)^2 + (43 - 51)^2 + (65 + 51)^2 + \dots + (44 - 51)^2] = 1,580 \\ SSE &= (47 - 45)^2 + (43 - 45)^2 + (46 - 43)^2 + \dots + (46 - 44)^2 = 62 \end{aligned}$$

جدول (٨-١٨) جدول تحاين مع إعمال التركيب العامل - مثال شركة كاسل للمعجنات			
مصدر التغير	SS	df	MS
ما بين المعالجات	1,580	5	316
الخطأ	62	6	10.3
المجموع	1,642	11	

وعند هذه النقطة، يمكن للمرء أن يختار باستخدام إحصاء الاختبار (14.53) ما إذا كانت متوسطات المعالجات الستة متساوية أم لا. وإذا كانت كذلك، فإنه ليس لأي من العاملين أي تأثير. وعلى أية حال، فإنه لا تجري عادة أية اختبارات لتأثيرات العوامل حتى يتم إجراء تفكيك إضافي لمجموع مربعات المعالجات وذلك ليعكس الطبيعة العامية للدراسة.

تفكيك مجموع مربعات المعالجات. عندما نربع (18.37) ونقوم بالجمع فوق كل المعالجات وفوق كل المشاهدات المرتبطة بمتوسط المعالجات المقشر $\bar{Y}_{i.}$ ، فإن جميع الحدود الجداية تتلاشى ونحصل على:

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB \quad (18.39)$$

حيث:

$$SSA = nb \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (18.39a)$$

$$SSB = na \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (18.39b)$$

$$SSAB = n \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \quad (18.39c)$$

ويسمى SSA مجموع مربعات العامل A ، وهو يقيس تشتت متوسطات مستويات العامل A المقطرة $\bar{Y}_{i.}$ فكلما كانت أكثر تشتتاً، كلما كبر SSA . وبشكل مشابه، يسمى SSB مجموع مربعات العامل B ، وهو يقيس تشتت متوسطات مستويات العامل B المقطرة $\bar{Y}_{.j}$. وأخيراً، يسمى $SSAB$ مجموع مربعات التفاعل AB ، وهو يقيس تشتت التفاعلات المقطرة $(\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})$ لك ab من المعالجات. تذكر أن متوسط كل التفاعلات المقطرة هو الصفر، وبالتالي لا تظهر انحرافات التفاعلات المقطرة حول متوسطها بشكل صريح كما كانت الحالة في SSA و SSB . وكلما كبرت التفاعلات المقطرة (مع إعمال الإشارة)، كلما كبرت قيمة $SSAB$.

يسمى تفكيك $SSTR$ إلى المركبات SSA و SSB و $SSAB$ بالتفكيك المتعامد. والتفكيك المتعامد هو التفكيك الذي يكون مجموع المركبات فيه يساوي مجموع المربعات الكلي (وهو هنا $SSTR$)، وكذلك الحال بالنسبة لدرجات الحرية. وهكذا، فإن تفكيك $SSTO$ إلى $SSTR$ و SSE للدراسات وحيدة العامل وثنائية العامل هو، أيضاً، تفكيك متعامد. وبينما توجد عدة تفكيكات متعامدة هنا، إلا أن التفكيك الذي يعطي المركبات SSA و SSB و $SSAB$ هو تفكيك مهم بالنسبة لنا، ذلك لأن هذه المركبات الثلاث، وكما سنرى قريباً، تزودنا بمعلومات عن التأثيرات الرئيسة للعامل A ، التأثيرات الرئيسة للعامل B ، والتفاعلات AB ، على الترتيب.

صنع حسابية. لأغراض الحسابات باليد، نستخدم، عادة، المعادلات التالية والتي

تكون متطابقة جبرياً مع المعادلات التمريرية التي أعطيت سابقاً:

ونحصل عادة على مجموع مربعات التفاعل كياتي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{..}^2}{nab} \quad (18.40a)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} \quad (18.40b)$$

$$SSA = \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{nb} - \frac{Y_{..}^2}{nab} \quad (18.40c)$$

$$SSB = \frac{\sum_j Y_{.j}^2}{na} - \frac{Y^2}{nab} \quad (18.40d)$$

ونحصل عادة على مجموع مربعات التفاعل كباقي:

$$SSAB = SSTO - SSE - SSA - SSB \quad (18.40e)$$

أو من:

$$SSAB = SSSTR - SSA - SSB \quad (18.40f)$$

حيث:

$$SSSTR = \frac{\sum_{i,j} Y_{ij}^2}{n} - \frac{Y^2}{nab} \quad (18.40g)$$

مثال: لنأخذ شركة كاسل للمعجنات، نحصل على التفكيك التالي لـ $SSSTR$

باستخدام البيانات في الجدول (٧-١٨)، والمعادلات الحسابية في (18.40):

$$SSA = \frac{(176)^2 + (268)^2 + (168)^2}{2(2)} - \frac{(612)^2}{2(3)(2)} = 1,544$$

$$SSB = \frac{(300)^2 + (312)^2}{2(3)} - \frac{(612)^2}{2(3)(2)} = 12$$

$$SSAB = 1,580 - 1,544 - 12 = 24$$

وبالتالي لدينا:

$$1,580 = 1,544 + 12 + 24$$

$$SSSTR = SSA + SSB + SSAB$$

تلخيص. بضم التفكيكات في (18.38) و(18.39) فقد توصلنا إلى:

$$SSTO = SSA + SSB + SSAB + SSE \quad (18.41)$$

حيث عُرفت مركبات مجاميع المربعات في (18.40).

وقد وجدنا لمثال شركة كاسل للمعجنات مايلي:

$$1,642 = 1,544 + 12 + 24 + 62$$

$$SSTO = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

وهكذا، فإن معظم التشتت الكلي في هذا المثال يرتبط بتأثيرات العامل A (ارتفاع رف

العرض).

تفكيك درجات الحرية

اعتدنا في تحليل التباين أحادي العامل على كيفية تقسيم درجات الحرية بين مركبات المعالجات والخطأ. ويوجد لدينا n من المشاهدات لكل معالجة في الدراسات ثنائية العامل، وفي الإجمال يوجد لدينا $nab = n_T$ من المشاهدات و $r = ab$ من المعالجات، ولذلك تكون درجات الحرية المرتبطة بـ $SSTO$ ، $SSTR$ و SSE هي $nab - 1$ ، $ab - 1$ و $(n-1)ab$ ، على التوالي. وتكون درجات الحرية هذه لمثال شركة كاسل للمصنعات هي $11 = (2)(3)(2) - 1$ ، $5 = 3(2) - 1$ و $6 = (2-1)(3)(2)$ ، على التوالي، وذلك كما هو موضح في الجدول (٨-١٨).

ووفقا لتفكيك الإضافي لمجموع مربعات المعالجات، يمكننا، أيضا، الحصول على التفكيك المرافق للدرجات الحرية $ab-1$ ويرتبط بـ SSA ، $a-1$ درجة حرية. ويوجد a من الانحرافات $\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$ ولكن تُفقد درجة حرية واحدة لأن هذه الانحرافات تخضع لتقييد واحد، أي أن $\sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = 0$. وبشكل مشابه، يرتبط بـ SSB ، $b-1$ درجة حرية. ودرجات الحرية المرتبطة بـ $SSAB$ ، أي مجموع مربعات التفاعل، هي الباقي:

$$(ab-1)(a-1) - (b-1) = (a-1)(b-1)$$

ويمكن فهم درجات الحرية المرتبطة بـ $SSAB$ كما يلي: يوجد ab من حلول التفاعل، ونخضع هذه لـ b من القيود، وذلك لأن:

$$\sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) = 0 \quad j = 1, \dots, b$$

ويوجد a من القيود الإضافية، لأن:

$$\sum_i (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) = 0 \quad j = 1, \dots, a$$

ولكن من ضمن القيود الأخيرة، يوجد، فقط، $a-1$ قيودا مستقلا، وذلك لأن القيد الأخير موجود ضمنا في القيود الـ b السابقة. ولذلك، يوجد في الإجمال $b + (a-1)$ من القيود المستقلة. وبالتالي تكون درجات الحرية هي:

$$ab - (b + a - 1) = (a-1)(b-1)$$

مثال: في مثال شركة كاسل للمصنعات، يرتبط مع SSA ، $2 = 3 - 1$ من درجات الحرية، ويرتبط مع SSB ، $1 = 2 - 1$ درجة حرية، ويرتبط مع $SSAB$ ، $2 = (2-1)(3-1)$ من درجات الحرية.

متوسط المربعات

نحصل على متوسط المربعات بالطريقة المعتادة، بقسمة مجموع المربعات على درجات الحرية المرتبطة بها. وبذلك نحصل على:

$$MSA = \frac{SSA}{a-1} \quad (18.42a)$$

$$MSB = \frac{SSB}{b-1} \quad (18.42b)$$

$$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)} \quad (18.42c)$$

مثال. يكون متوسط المربعات لمثال شركة كاسل للمعجنات كالتالي:

$$MSA = \frac{1,544}{2} = 772$$

$$MSB = \frac{12}{1} = 12$$

$$MSAB = \frac{24}{2} = 12$$

لاحظ أن متوسط المربعات لايساوي متوسط مربعات المعالجات،

$MSTR = 1,580/5 = 316$ ونرى مرة أخرى أن متوسط المربعات ليس بجمعها.

توقع متوسط المربعات

وبالطريقة نفسها التي استعملت في الحالة أحادية العامل، يمكن تبيان أن لمتوسط

المربعات في نموذج التباين ثنائي العامل (18.23) التوقعات التالية:

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \quad (18.43a)$$

$$E\{MSA\} = \sigma^2 + nb \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} = \sigma^2 + nb \frac{\sum (\mu_i - \mu)^2}{a-1} \quad (18.43b)$$

$$E\{MSB\} = \sigma^2 + na \frac{\sum \beta_j^2}{b-1} = \sigma^2 + na \frac{\sum (\mu_j - \mu)^2}{b-1} \quad (18.43c)$$

$$E\{MSEB\} = \sigma^2 + n \frac{\sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} \quad (18.43d)$$

$$= \sigma^2 + n \frac{\sum \sum (\mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu)^2}{(a-1)(b-1)}$$

جدول (٢-١) تحليل التباين أحادي العامل مع مستويات عوامل متعددة				
	MS	df	SS	مصدر التباين
$E(MS)$				
$\sigma^2 + \frac{n}{ab-1} \sum (\mu_{ij} - \mu_{.j})^2$	$MSR = \frac{SSTR}{ab-1}$	$ab-1$	$SSTR = n \sum (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$	مابين المجموعات
$\sigma^2 + \frac{bm}{a-1} \sum (\mu_{i.} + \mu_{.j})^2$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$a-1$	$SSA = nbs \sum (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	عوامل A
$\sigma^2 + \frac{am}{b-1} \sum (\mu_{ij} - \mu_{.j})^2$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$b-1$	$SSB = na \sum (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$	عوامل B
$\sigma^2 + \frac{bm}{(a-1)(b-1)} \sum (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})^2$	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$(a-1)(b-1)$	$SSAB = nbs \sum (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$	عوامل A B
σ^2	$MSE = \frac{SSE}{ab(n-1)}$	$ab(n-1)$	$SSE = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{ij})^2$	أخطاء
		$nab-1$	$SSTO = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	إجمالي

وتبين هذه التوقعات أنه إذا لم تكن هناك تأثيرات رئيسة للعامل A (أي أن جميع μ_i متساوية، أو أن جميع $\alpha_i = 0$)، فإن L MSA و MSE التوقع نفسه، وإلا فإن MSA سينحو إلى أن يكون أكبر من MSE . وبشكل مشابه، إذا لم يكن هناك تأثيرات رئيسة للعامل B ، فإن L MSB و MSE التوقع نفسه، وإلا فإن MSB سينحو إلى أن يكون أكبر من MSE وأخيراً، إذا لم يكن هناك تفاعلات لأي إذا كانت جميع $\alpha\beta = 0$ بحيث تكون تأثيرات العوامل تجميعية، فإن L $MSAB$ التوقع نفسه مثل MSE ، وإلا فإن $MSAB$ سينحو لأن يكون أكبر من MSE . وهذا يقترح أن إحصاءات الاختبار F^* المبينة على النسب MSA/MSE ، MSB/MSE و $MSAB/MSE$ ستزودنا بمعلومات عن التأثيرات الرئيسية والتفاعلات لكل العاملين، على الترتيب، مع كون القيم الكبيرة لإحصاءات الاختبار تشير إلى وجود تأثيرات للعوامل. وسنرى قريباً أن الاختبارات المبينة على هذه الاختبارات هي اختبارات F الاعتيادية.

جدول (١٠-١٨) جدول تباين للدراسة ثنائية العامل - مثال شركة كاسل للمعجنات

مصدر التغير	SS	df	MS
ما بين المعالجات	1,580	5	316
العامل A (ارتفاع رف العرض)	1,544	12	772
العامل B (اتساع رف العرض)	12	1	12
التفاعلات AB	24	2	12
الخطأ	62	6	10.3
المجموع	1,640	11	

جدول تحليل التباين

يوضح الجدول (٩-١٨) تفكيك مجموع المربعات الكلي إلى مركبات المعالجات والخطأ، بالإضافة إلى التفكيك الإضافي لمجموع مربعات المعالجات إلى المركبات العاملة المتعددة. ويوضح الجدول، أيضاً، درجات الحرية المرتبطة بها، ومتوسط المربعات، وتوقع متوسط المربعات. ويحوي الجدول (١٠-١٨) تحليل التباين ثنائي العامل لمثال شركة كاسل للمعجنات.

(٥-١٨) تقويم مصداقية نموذج تخمين

من المرغوب فيه قبل أخذ أي طرق رسمية للاستقراء أن نقوم مصداقية نموذج تخمين، ثنائي العامل (18.23). ولا تبرز أية مشاكل جديدة هنا. ويمكن فحص الرواسب في (18.35):

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{ij}$$

من أجل الطبيعية، وثبات تباين الخطأ، واستقلال حدود الخطأ، بالطريقة نفسها التي استخدمت في الدراسة وحيدة العامل. ويمكن الاستفادة من التحويلات لتثبيت تباين الخطأ لجعل توزيعات الخطأ أقرب إلى التوزيع الطبيعي.

وتطبق هاتان مناقشتنا لهذا الموضوع في الفصل ١٦ في الحالة وحيدة العامل، على الحالة ثنائية العامل.

وأخيرا، تنطبق بشكل كامل مناقشتنا السابقة لآثار الحيود عن النموذج على الحالة ثنائية العامل، وعلى وجه الخصوص، فإن استخدام أحجام عينات متساوية لكل معالجة يجعل آثار عدم تساوي التباينات في حدوده الدنيا.

مثال

يوجد تكراران، فقط، لكل معالجة في مثال شركة كاسل للمصنعات. وكذلك فقد قُربت البيانات لجعل الحسابات التوضيحية بسيطة قدر المستطاع. وكتيجة لذلك، سيكون تحليل الرواسب ذا فائدة محدودة هنا. وحصلنا على الرواسب وفقا لـ (18.35). وعلى سبيل المثال، نجد باستخدام البيانات في الجدول (٧-١٨):

$$e_{111} = 47 - 45 = 2$$

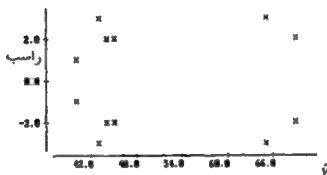
$$e_{121} = 46 - 43 = 3$$

ورُسمت هذه الرواسب مقابل القيم التوفيقية \bar{y}_{ij} في الشكل (٦-١٨)أ، ومقابل القيم المتوقعة تحت فرض الطبيعية في الشكل (٦-١٨)ب. ولا يوجد دليل قوي على عدم تساوي تباينات الخطأ للمعالجات المختلفة في الشكل (٦-١٨)أ. والرسم في الشكل (٦-١٨)ب خطي بشكل معتدل مع كون الخطوط المنبسطة في الرسم ترجع

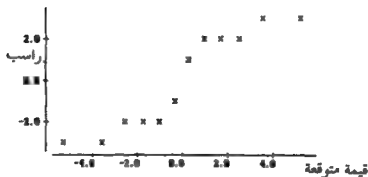
لعملية تقريب البيانات. ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية هو 0.940، وهي قيمة تنحى إلى دعم افراض توزيع تقريبي طبيعي.

شكل (٦-١٨) رسوم رواسب تشخيصية - مثال شركة كاسل للمعجنات (MINITAB المرجع [18-1])

أ - رسم الرواسب مقابل \hat{Y}



ب - رسم احتمال طبيعي



وعلى ضوء مناعة طرق الاستقراء لنموذج التحاين المثبت، يبدو من المعقول المضي قدما في مثال شركة كاسل للمعجنات بإجراء اختبارات لتأثيرات العوامل واستخدام طرق استقراء أخرى.

(٦-١٨) اختبارات F

وعلى ضوء الخاصية التجميعية لمجموع المربعات ودرجات الحرية، فإن نظرية كوكران (3.60) تكون قابلة للتطبيق عندما لا توجد تأثيرات للعوامل. وبالتالي، ستتيح إحصاءات الاختبار F^* المبينة على متوسطات المربعات المناسبة، توزيع F ، مما سيؤدي إلى اختبارات F المعتادة لتأثيرات العوامل.

اختبارات للتفاعلات

يبدأ، عادة، تحليل دراسة ثنائية العامل باختبار لتحديد ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا:

$$H_0: \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} = 0 \quad \text{من أجل جميع } i, j$$

$$H_a: \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} \neq 0 \quad \text{من أجل جميع } i, j$$

أو بشكل مكافئ:

$$H_0: \text{جميع الـ } (\alpha\beta)_{ij} \text{ تساوي الصفر} \quad (18.44a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } (\alpha\beta)_{ij} \text{ تساوي الصفر}$$

وكما لاحظنا من فحص لتوقع متوسط المربعات في الجدول (٩-١٨)، فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} \quad (18.45)$$

وتشير القيم الكبيرة لـ F^* إلى وجود تفاعلات. وعندما تكون H_0 صحيحة، فإن F^* ستبني التوزيع $F[(a-1)(b-1), (n-1)ab]$. وبذلك تكون قاعدة القرار المناسبة للتحكم في الخطأ من النوع I عند α هي:

$$H_0 \text{ كانت } F^* \leq F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \text{ استنتج } H_0$$

$$H_a \text{ كانت } F^* > F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \text{ استنتج } H_a$$

حيث $F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab]$ هو المئين 100(1 - α) للتوزيع F المناسب.

اختبار للتأثيرات الرئيسية للعامل A

تتبع اختبارات التأثيرات الرئيسية للعامل A والعامل B عادة اختبار التفاعلات وذلك عندما لا توجد تفاعلات قوية. واختبار ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للعامل A أم لا:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \mu \text{ مساوية للصفر} \quad (18.47)$$

أو بشكل مكافئ:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \alpha \text{ مساوية للصفر} \quad (18.47a)$$

ونستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSS}{MSE} \quad (18.48)$$

ومرة أخرى، فإن القيم الكبيرة لـ F^* تدل على وجود تأثيرات رئيسة للعامل A. وبما أن F^* تتبع التوزيع $F[a-1, (n-1)ab]$ عندما تكون H_0 صحيحة، فإن قاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab]$$

$$H_a \text{ استتج } F^* > F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \quad (18.49)$$

اختبار التأثيرات الرئيسية للعامل B

هذا الاختبار مماثل لاختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A. وتكون الفرضيات

البديلة هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_b$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \mu \text{ مساوية للصفر} \quad (18.50)$$

أو بشكل مكافئ:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \beta \text{ مساوية للصفر} \quad (18.50a)$$

وتكون إحصاءة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSB}{MSE} \quad (18.51)$$

وقاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند α هي:

$$\begin{aligned} H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \\ H_a \text{ استتج } F^* > F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \end{aligned} \quad (18.52)$$

مثال:

سنبحث لمثال شركة كاسل للمعجنات عن وجود تأثيرات لارتفاع الرفوف واتساعها، وذلك باستخدام مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ لكل اختبار. وسنبداً أولاً باختبار ما إذا كان يوجد تأثيرات تفاعل أم لا:

جميع $(\alpha\beta)_{ij}$ تساوي الصفر: H_0

ليست جميع الـ $(\alpha\beta)_{ij}$ مساوية للصفر: H_a

وباستخدام البيانات في الجدول (١٠-١٨) في إحصاءة الاختبار (18.45)، نحصل على:

$$F^* = \frac{12}{10.3} = 1.17$$

وبما أننا مستحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند $\alpha = 0.05$ ، فإننا

سنحتاج للقيمة $F(95; 2, 6) = 5.14$ وتكون بذلك قاعدة القرار هي:

إذا كانت $F^* \leq 5.14$ استتج H_0

إذا كانت $F^* > 5.14$ استتج H_a

وبما أن $5.14 \leq 1.17 = F^*$ ، فإننا نستتج H_0 ، أي أن ارتفاع الرفوف واتساعها

لاتفاعل في تأثيراتها على الليعات. والقيمة P لهذا الاختبار هي: $P\{F(2,6) > 1.17\} = 0.37$.

وبما أن العاملين لا يتفاعلا، فإننا نتوجه إلى اختبار التأثيرات الرئيسة لارتفاع

الرفوف (العامل A)، ونعطى الفرضيات البديلة في (18.47). وتصبح إحصاءة الاختبار

(18.48) في مثالنا كالتالي:

$$F^* = \frac{772}{10.3} = 75.0$$

ولقيمة $\alpha = .05$ ، سنحتاج للقيمة $F(95; 2,6) = 5.14$ وبما أن $75.0 > 5.14 = F^*$ ، فنستنتج H_0 ، أي أنه ليست كل متوسطات مستويات العامل A ، μ_i ، متساوية، أو أنه توجد تأثيرات مؤكدة مرتبطة بارتفاع الرفوف. والقيمة P لهذا الاختبار هي $P\{F(2,6) > 75.0\} = .0001$.

وبعد ذلك نختبر التأثيرات الرئيسة لعرض (اتساع) الرفوف (العامل B)، ونُعطي الفرضيات البديلة في (18.50). وتصبح إحصاءة الاختبار في مثالنا كالتالي:

$$F^* = \frac{12}{103} = 1.17$$

ولقيمة $\alpha = .05$ ، فنحتاج للقيمة $F(95, 1,6) = 5.99$ وبما أن $1.17 \leq 5.99 = F^*$ ، فنستنتج H_0 ، أي أن جميع μ متساوية، أو أنه ليس لعرض الرفوف أي تأثير على المبيعات. والقيمة P لهذا الاختبار هي $P\{F(1,6) > 1.17\} = .32$.

وهكذا، فإن اختبارات تحليل التباين تؤكد الانطباعات الأولية التي تولدت لدينا من رسوم المتوسطات المقدرة للمعالجات \bar{y}_i في الشكل (١٨-٥)، أي أن لارتفاع الرفوف، فقط، تأثير على المبيعات في حالة المعالجات المدروسة. ومن الواضح، عند هذا الحد، أنه يُستحسن إجراء تحليلات إضافية عن طبيعة تأثيرات ارتفاع الرفوف. وسنناقش مثل هذه التحليلات لتأثيرات العوامل في الفصل ١٩.

تعليقات

١ - إذا أُجري اختبار التفاعلات عند مستوى المعنوية α_1 ، واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A عند مستوى المعنوية α_2 ، واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B عند مستوى المعنوية α_3 ، فإن مستوى المعنوية α لعائلة الاختبارات الثلاثة سيكون أكبر من مستويات المعنوية منفردة. ويمكننا استنباط المزاجحة التالية من مزاجحة بونفيروني في (5.5):

$$\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (18.54)$$

وللحالة التي اعتمدت هنا، يمكننا استخدام مزاجحة أضيق نوعاً ما، وهي مزاجحة كيمبل، وهي تستخدم حقيقة أن البُسْط في إحصاءات الاختبار الثلاث مستقلة وأن المقام هو نفسه في كل حالة. وتنص هذه المزاجحة على أن:

$$\alpha \leq 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3) \quad (18.54)$$

ولثال شركة كاسل للمصنعات، حيث $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.05$ ، تعطي مراجعة بوتفرونكي كحد لمستوى معنوية العاللة:

$$\alpha \leq 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.15$$

بينما تعطي مراجعة كيمبل الحد:

$$\alpha \leq 1 - (0.95)(0.95)(0.95) = 0.143$$

ويبين هذا التوضيح بشكل جلي أن مستوى معنوية عائلة الاختبارات الثلاثة يمكن أن يكون أكبر بشكل جوهري من مستويات المعنوية للاختبارات المنفردة.

٢ - يمكن الحصول على إحصاءات الاختبار F في (18.45)، (18.48) و (18.51) بطريقة الاختبار الخطي العام المشروحة في الفصل الثالث. فعلى سبيل المثال، لاختبار وجود تأثيرات التفاعل، فإن الفرضيات البديلة هي تلك المعطاة في (18.44) والنموذج التام هو نموذج التحاين في (18.23):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (18.55)$$

ويقود توفيق هذا النموذج التام إلى القيم التوفيقية $\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij}$ وإلى مجموع مربعات الخطأ:

$$SSE(F) = \sum \sum \sum (\hat{Y}_{ijk} - Y_{ijk})^2 = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij})^2 = SSE \quad (18.56)$$

وهذا هو مجموع مربعات الخطأ للعتاد لنموذج التحاين في (18.38c). ويرتبط بمجموع مربعات الخطأ هنا $ab(n-1)$ درجة حرية.

وتحت الفرضية $H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ ، فإن النموذج المعفص هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad (18.57)$$

ويمكن إثبات أن القيم التوفيقية للنموذج المعفص هي $\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}$ ، بحيث يكون مجموع مربعات الخطأ للنموذج المعفص كالتالي:

$$SSE(R) = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk})^2 = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \quad (18.58)$$

ويمكن إثبات أنه يرتبط بمجموع مربعات الخطأ هنا $ab - a - b + 1$ درجة حرية. وبالتالي، فإن إحصاء الاختبار في (3.69) تختصر لتصبح $F^* = MSAB/MSE$ ، كما في (18.45).

وبشكل مشابه، لاختبار وجود تأثيرات رئيسة للعامل A ، فإن النموذج التام هو نموذج التحاين في (18.23)، والفرضيات البديلة هي تلك في (18.47)، والنموذج المحفّض هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (18.59)$$

شكل (٧-١٨) جزء من مخرجات الحاسب الآلي لنموذج تحليل التباين ثنائي العامل - مثال شركة كاسل للمحركات (BMD8VB)، المرجع [18.2].

SOURCE	SUM OF SQUARES	D. F.	MEAN SQUARE	F	PROB.
1 MEAN	31212.000	1	31212.000	3020.52	0.0000
2 A	1544.000	2	772.000	74.71	0.0001
3 B	12.000	1	12.000	1.16	0.3226
4 AB	24.000	2	12.000	1.16	0.3747
5 S(AB)	62.000	6	10.333		

$n\bar{Y}^2_{...}$ points to SUM OF SQUARES
 $n\bar{Y}^2_{...}$ points to D. F.
 $n\bar{Y}^2_{...}$ points to MEAN SQUARE
 $n\bar{Y}^2_{...}$ points to F
 $n\bar{Y}^2_{...}$ points to PROB.
Error points to S(AB)
SSE points to SUM OF SQUARES
MSE points to MEAN SQUARE
F^{*} points to F
One-sided P-value points to PROB.

GRAND MEAN 51.00000 ← $\bar{Y}_{...}$

CELL AND MARGINAL MEANS

A =	1	2	3	
	44.00000	67.00000	42.00000	← $\bar{Y}_{i.}$
B =	1	2		
	50.00000	52.00000		← $\bar{Y}_{.j}$
A =	1	2		
	45.00000	43.00000		
2	65.00000	69.00000		← \bar{Y}_{ij}
3	40.00000	44.00000		

CELL DEVIATIONS

A =	1	2	3	
	-7.00000	16.00000	-9.00000	← $\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{...}$
B =	1	2		
	-1.00000	1.00000		← $\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...}$
A =	1	2		
	2.00000	-2.00000		
2	-1.00000	1.00000		← $\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{...}$
3	-1.00000	1.00000		

(٧-١٨) مُدخلات ومُخرجات الحاسب الآلي

تتغير بشكل كبير أشكال الإدخال والإخراج لنماذج التحاين ثنائية العامل في الحاسب الآلي من برنامج لآخر. ويوضح الشكل (٧-١٨) مطبوعة للحاسب الآلي، لمثال شركة كاسل للمعجنات، وهو نتاج حزمة الحاسب الآلي BMDP (المراجع [18.2]).

ويوضح القطاع الأول من المخرجات نتائج تحاين شبيهة بتلك التي قدمت في الجدول (١٠-١٨) ولم يُوضَح مجموع مربعات المعالجات $SSTR$ منفردا، حيث أنه يمكن الحصول عليه بجمع SSA و SSB و $SSAB$. وبدلا من ذلك أعطي معبر للتغير يُعزى للمتوسط. ويمكن استخدام هذا السطر في جدول التحاين لاختبار ما إذا كان $\mu_{..} = 0$. ولكن هنا، عادة، غير مهم (انظر جدول (٤-٣))، فهو جدول تحاين انحدر مشابه لهذا). ومعامل التصحيح لمتوسط مجموع المربعات هنا هو $n_T \bar{Y}^2$ حيث ترتبط به درجة حرية واحدة. ولمثال شركة كاسل للمعجنات لدينا $n_T \bar{Y}^2 = 12(15)^2 = 31,212$.
ويقدم الجزء الثاني عدة متوسطات مقدرة، بينما يوضح الجزء الأخير تقديرات نقطية للتأثيرات (سميت انحرافات الحلالات) $\alpha_i = \mu_i - \mu_{..}$ ، $\beta_j = \mu_j - \mu_{..}$ و $(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu_{..}$ لأجل $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2$.

(٨-١٨) أسلوب الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل

سنشرح طريقة الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل عن طريق نموذج تأثيرات العوامل (18.23):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (18.60)$$

وكما نعلم من (18.24)، فإن متوسطات الاستجابة لهذا النموذج تعطى بـ:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \quad (18.61)$$

ولتمثيل هذا النموذج بالشكل المصفوي، نستمر بالطريقة نفسها التي استخدمت في أسلوب الانحدار لنموذج تحاين وحيد العامل. وبما أن $\sum \alpha_i = 0$ ، فنحن في حاجة إلى $\alpha - 1$ من المعام α_i في نموذج الانحدار وسنمثل المعلمة α_0 كمايلي:

$$\alpha_0 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{a-1} \quad (18.62)$$

ولذلك سنستخدم للمعالم α_i ، $\alpha - 1$ من المتغيرات المؤشرة التي يمكن أن تأخذ القيم 1، -1 أو 0، وذلك كما جرى في تمثيل نموذج تحاين وحيد العامل. وبشكل

مشابه، سنحتاج، فقط، لـ $b-1$ من المعالم β_j ، في نموذج الانحدار وسنمثل المعلمة β_b كما يلي:

$$\beta_b = -\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{b-1} \quad (18.63)$$

ولذلك سنستخدم للمعامل β_b ، $b-1$ من المتغيرات المؤشرة التي يمكن أن تأخذ القيم 1، -1 أو 0.

ولعالم التفاعل، نحتاج لملاحظة أن:

$$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad (18.64)$$

$$j = 1, \dots, b \quad i = 1, \dots, a$$

ولذلك، سنمثل المعالم $(\alpha\beta)_{ij}$ و $(\alpha\beta)_{ji}$ كما يلي:

$$(\alpha\beta)_{ib} = -(\alpha\beta)_{i1} - (\alpha\beta)_{i2} - \dots - (\alpha\beta)_{i,b-1} \quad (18.65)$$

$$(\alpha\beta)_{aj} = -(\alpha\beta)_{1j} - (\alpha\beta)_{2j} - \dots - (\alpha\beta)_{a-1,j} \quad (18.66)$$

وفي الحقيقة سنحتاج، في نموذج الانحدار، إلى $(a-1)(b-1)$ فقط، من الحدود $(\alpha\beta)_{ij}$ وذلك بسبب العلاقات المتناخلة بين القيود في (18.64). وهذه هي الحدود المرتبطة بالجداءات المتصالية بين المتغيرات المؤشرة الخاصة بالتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، كما ستوضح الآن.

مثال:

تقدم في الجدول (١٨-١١) المتحولات γ , β , ε والمصفوفة X لمثال شركة كاسل

للمعجنات. ونعرف المتغيرات X كما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل A} \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 3 للعامل A} \\ 0 \text{ بخلاف ذلك.} \end{array} \right\} = X_1$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل A} \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 3 للعامل A} \\ 0 \text{ بخلاف ذلك.} \end{array} \right\} = X_2 \quad (18.67)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل B} \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل B} \end{array} \right\} = X_3$$

وبالتالي، فإن العالم θ التي يتضمنها المتجه β هي α_1 و α_2 و β_1 هي المعلمة β الوحيدة الواردة هنا. وحلود التفاعل في المتجه β هي تلك المرتبطة بالمتغيرات المستقلة $X_1 = X_1X_2$ و $X_4 = X_1X_2X_3$ و X_5 ويشير المتغير X الوارد على الصورة X_1X_2 إلى المستوى $i = 1$ للعامل A والمستوى $1 - z$ للعامل B ، وبالتالي، فإن معلمة التفاعل الموافقة هي $(\alpha\beta)_{11}$. ووفقاً لذلك، فإن المتغير X الوارد على الصورة X_1X_2 يشير إلى المستويات $i = 1, 2$ ، $z = 1$ ، وتكون معلمة التفاعل الموافقة هي $(\alpha\beta)_{21}$.

وللتأكد من أن التمثيل للمصفوفة X يعطي النموذج الملائم، نقدم في الجدول (١٨-١٢) متجه المتوسطات $E\{Y\} = X\beta$. ونرى على سبيل المثال، أن:

$$E\{Y_{111}\} = \mu.. + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$$

ونرى كذلك أن:

$$\begin{aligned} E\{Y_{121}\} &= \mu.. + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} \\ &= \mu.. + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{12} \end{aligned}$$

وذلك لأن $\beta_1 -- \beta_2$ استناداً إلى (18.63) و $(\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{12}$ استناداً إلى (18.65) وبشكل مشابه، نرى أن:

$$\begin{aligned} E\{Y_{322}\} &= \mu.. - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21} \\ &= \mu.. + \alpha_3 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{32} \end{aligned}$$

وذلك لأن:

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \text{ استناداً إلى (18.62).}$$

$$\beta_2 = -\beta_1 \text{ استناداً إلى (18.63).}$$

$$(\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{12} = (\alpha\beta)_{21} - (\alpha\beta)_{22} \text{ استناداً إلى (18.65).}$$

$$(\alpha\beta)_{12} - (\alpha\beta)_{22} = (\alpha\beta)_{32} \text{ استناداً إلى (18.66).}$$

وهكذا، فإن تمثيل النموذج الخطي في الجدول (١٨-١١) يعطي متوسط الاستجابة الملائم لكل مشاهدة.

وبالتالي يكون نموذج الانحدار المتعدد المكافئ لنموذج تحاين ثنائي العامل لمثال شركة كاسل للمعجنات كما يلي:

جداول (١٨-١٩) تحليل الانحدار لنموذج تباين ثنائي العامل - مثال شركة كاسل للمجمعات

	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_2X_3		
Y_{111}	1	1	0	1	1	0	ε_{111}
Y_{112}	1	1	0	1	1	0	ε_{112}
Y_{121}	1	1	0	-1	-1	0	ε_{121}
Y_{122}	1	1	0	-1	-1	0	ε_{122}
Y_{211}	1	0	1	1	0	1	ε_{211}
Y_{212}	1	0	1	1	0	1	ε_{212}
Y_{221}	1	0	1	-1	0	-1	ε_{221}
Y_{222}	1	0	1	-1	0	-1	ε_{222}
Y_{311}	1	-1	-1	1	-1	-1	ε_{311}
Y_{312}	1	-1	-1	1	-1	-1	ε_{312}
Y_{321}	1	-1	-1	-1	0	1	ε_{321}
Y_{322}	1	-1	-1	-1	0	1	ε_{322}

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu.. \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{21} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{311} \\ \varepsilon_{312} \\ \varepsilon_{321} \\ \varepsilon_{322} \end{bmatrix}$$

جداول (١٩-٢٠) معجم المتوسطات لمثال شركة كاسل للمجمعات

$E\{Y_{111}\}$	$\mu.. + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$	$\mu.. + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$
$E\{Y_{112}\}$	$\mu.. + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$	$\mu.. + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$
$E\{Y_{121}\}$	$\mu.. + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11}$	$\mu.. + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{12}$
$E\{Y_{122}\}$	$\mu.. + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11}$	$\mu.. + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{12}$
$E\{Y_{211}\}$	$\mu.. + \alpha_2 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_2 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{21}$
$E\{Y_{212}\}$	$\mu.. + \alpha_2 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_2 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{21}$
$E\{Y_{221}\}$	$\mu.. + \alpha_2 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{22}$
$E\{Y_{222}\}$	$\mu.. + \alpha_2 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{22}$
$E\{Y_{311}\}$	$\mu.. - \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_3 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{31}$
$E\{Y_{312}\}$	$\mu.. - \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_3 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{31}$
$E\{Y_{321}\}$	$\mu.. - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_3 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{32}$
$E\{Y_{322}\}$	$\mu.. - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21}$	$\mu.. + \alpha_3 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{32}$

$$Y_{ijk} = \mu.. + \underbrace{\alpha_1 X_{ijk1}}_{\text{تأثير فرعي A}} + \underbrace{\alpha_2 X_{ijk2}}_{\text{تأثير فرعي B}} + \underbrace{\beta_1 X_{ijk3}}_{\text{تأثير التفاعل AB}} \quad (18.68)$$

$$\begin{aligned} & + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{21} X_{ijk2} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \\ & \text{تأثير التفاعل AB} \\ & i = 1, 2, 3; j = 1, 2; k = 1, 2 \end{aligned}$$

وترمز X_{ijk} هنا لقيمة المتغير المستقل X_i في حالة الملاحظة k من المعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j ، وتملك X_{ijk1} و X_{ijk2} معانٍ مماثلة. [لقد عُرفت هذه المتغيرات المستقلة في (18.67)]. وأخيراً، فإن معالم الانحدار هي معالم نموذج التحاين، μ (حد التقاطع)، و $\beta_1, \alpha_2, \alpha_1$ و $(\alpha\beta)_{11}$ و $(\alpha\beta)_{21}$ (معالم الانحدار).

وتتضمن اختبارات تأثيرات التفاعل، والتأثيرات الرئيسة للعامل A ، والتأثيرات الرئيسة للعامل B لمثال شركة كاسل للممعنات اختبار ما إذا كانت بعض معاملات الانحدار في نموذج الانحدار (18.68) تساوي الصفر أم لا وذلك كما يلي:
اختبار لتأثيرات التفاعل:

$$H_0: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{21} = 0$$

$$(18.69) \quad H_a: \text{ليس كل من } (\alpha\beta)_{11} \text{ و } (\alpha\beta)_{21} \text{ تساوي الصفر}$$

اختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A :

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$(18.70) \quad H_a: \text{ليس كل من } \alpha_2 \text{ و } \alpha_1 \text{ تساوي الصفر}$$

اختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B :

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$(18.71) \quad H_a: \beta_1 \neq 0$$

وهكذا، فإن إحصاءة الاختبار في كل حالة هي الإحصاءة F في (8.25)، وما يختلف هنا هو، فقط، مجموع المربعات الإضافي وعدد درجات الحرية الملائمان للاختبارات الثلاثة.

ولإجراء اختبارات تحليل التباين لمثال شركة كاسل للممعنات بأسلوب الانحدار، نستفيد من نموذج الانحدار (18.68). والملاحظات Y_{ijk} معطاة في الجدول (١٨-٧). والمصفوفة X في الجدول (١٨-١١). وقد أعطيت تشغيلة لحزمة حاسب آلي خاصة بالانحدار المتعدد على هذه البيانات النتائج الموضحة في الجدول (١٨-١٣)، والتي تتضمن مجاميع المربعات الإضافية لكل متغير X وفق ترتيب المتغيرات X في نموذج الانحدار.

ويمكن تبين أنه عندما تتساوى حجوم العينات لكل المعالجات، كما هو الحال في مثال شركة كاسل للمعجنات، فإن إجمالي مجاميع المربعات الإضافية لحدود الانحدار للعامل A يساوي SSA . وبشكل مشابه، فإن إجمالي مجاميع المربعات الإضافية لحدود الانحدار للعامل B ولحدود الانحدار للتفاعل تساوي SSB و $SSAB$ ، على الترتيب. وبسبب التوازن في المصفوفة X عندما تتساوى حجوم العينات لجميع المعالجات، فإن إجماليات مجاميع المربعات الإضافية ستكون هي نفسها، بغض النظر عن ترتيب مجاميع المربعات الإضافية للعامل A ، للعامل B ولحد التفاعل.

جدول (١٣-١٨) أسلوب الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل - مثال شركة كاسل للمعجنات

(أ) دالة الانحدار التوفيقية				
$\hat{Y} = 51.0 - 7.0X_1 + 16.0X_2 - 1.0X_3 + 2.0X_1X_2 - 1.0X_2X_3$				
(ب) جدول التباين				
مصدر التغير	SS	df	MS	
انحدار	1.580	5	$MSTR = 316$	
X_1 $X_2 X_1$	8 1,536 } $SSA = 1,544$	2 1 } 2		$MSA = 772$
$X_3 X_1, X_2$				$MSB = 12$
X_1X_2	12 } $SSB = 12$	1 } 1		
X_1X_3 $X_2X_3 X_1, X_2, X_3$	18 6 } $SSAB = 24$	2 1 } 2		$MSAB = 12$
الخطأ	62	6	$MSE = 10.3$	
المجموع	1,642	11		

ونرى من الجدول (١٣-١٨) أن إجماليات مجاميع المربعات الإضافية الخاصة بـ SSA ، SSB ، و $SSAB$ وكذلك مجموع مربعات الخطأ SSE التي حصلنا عليها بأسلوب الانحدار هي نفسها كما في الجدول (١٠-١٨) عندما حصلنا عليها باستخدام صيغ التباين.

ومن هذه النقطة فصاعداً، فإن طرق الاختبار المعتمدة على أسلوب الانحدار متطابقة مع اختبارات تحليل التباين التي شرحت سابقاً.

(٩-١٨) أساليب أخرى لتحليل التباين.

نناقش الآن باختصار أسلوبين آخرين لتحليل التباين المقدم في هذا الفصل.

مراجعة نموذج تحاين

يفترض الأسلوب الذي قُدم في هذا الفصل أن نموذج التحاين (18.23) هو النموذج التام لجميع اختبارات تأثيرات العوامل، وذلك بغض النظر عن النتائج التي يتم التوصل إليها في أي من هذه الاختبارات. والمنطق وراء هذا الأسلوب هو أن نموذج التحاين (18.23) يعتمد على المطابقة (18.22) لمتوسطات المعالجات μ_{ij} . وحالما تبين تحليلات الرواسب والتشخيصات الأخرى أن هذا هو النموذج الملائم، فإنه يُستخدم في جميع الاختبارات.

ويعتقد بعض الإحصائيين أنه ينبغي مراجعة نموذج التحاين (18.23) إذا أدى اختبار تأثيرات التفاعل إلى استنتاج عدم وجود تفاعلات. ويكون النموذج التام الذي يؤخذ في الاعتبار لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B ، وذلك عندما يؤدي اختبار تأثيرات التفاعل إلى استنتاج عدم وجود تفاعلات، هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \quad (18.72)$$

وكما ذكرنا قبل قليل في أسلوب الانحدار لمثال شركة كاسل للمعجنات، فإن مجاميع المربعات الإضافية للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B لا تعتمد على ترتيب مجاميع المربعات الإضافية لتأثيرات العوامل عندما تتساوى أحجام العينات لجميع المعالجات. ولذلك، فإن البسط في إحصاء الاختبار F لا يتأثر بعملية المراجعة في النموذج التام عندما تتساوى أحجام عينات المعالجات. ولكن المقام في إحصاء الاختبار F يتأثر بهذه العملية، مما يؤدي إلى مجموع مربعات الخطأ التالي للنموذج التام:

$$SSE(F) = SSE + SSAB \quad (18.73)$$

وهكذا، فإن مجموع مربعات الخطأ للنموذج التام وفق هذا الأسلوب يتضمن دمج مجموعي مربعات الخطأ والتفاعل. وبالطريقة نفسها يتم دمج درجات الحرية وتكون درجات الحرية المرتبطة بـ $SSE(F)$ هي:

$$df_F = (a - 1)(b - 1) + (n - 1)ab = nab - a - b + 1$$

ولمثال شركة كاسل للمعائنات، فإن مجموع مربعات الخطأ بعد الدمج لاختبار

التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B هو جدول (١٠-١٨):

$$SSE(F) = 62 + 24 = 86$$

ودرجات الحرية المنديجة هي:

$$df_F = 6 + 2 = 8$$

ولذلك، فإن متوسط مربعات الخطأ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A أو

العامل B وفقاً لأسلوب مراجعة النموذج سيكون $10.75 = 86/8$.

إن عملية الدمج هذه تؤثر على كل من مستوى المعنوية وقوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B ، بطرق غير مفهومة بشكل كامل حتى الآن. ولذلك، فقد اقترح بعض الإحصائيين أن لا يتم اللجوء إلى عملية الدمج إلا إذا كانت: (١) - درجات الحرية المرتبطة بـ MSE صغيرة، ربما 5 أو أقل، و (٢) - إحصاء الاختبار $MSAB/MSE$ تقع بعيداً تحت القيمة الحرجة في قاعدة القرار، ربما عندما يكون $MSAB/MSE < 2$ لقيمة $\alpha = 0.05$. ولقد صُمم الجزء الأول في هذه القاعدة كي تقتصر عملية الدمج على الحالات التي ستكون فيها الاستفادة كبيرة، بينما صمم الجزء الثاني لإعطاء ضمانات معقولة إلى أنه بالفعل لا توجد تفاعلات.

متوسطات معالجات غير متساوية الأهمية

عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية، فإن اختبار تأثيرات التفاعل لا يتأثر في هذه الحالة. ولكن معادلات تحليل التباين للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B التي قُدمت في هذا الفصل لن تكون ملائمة. وبدلاً من ذلك سنحتاج عادة لطريقة الاختبار الخطي العام بدلالة للمصفوفات التي شُرحَت في الفقرة (٨ - ٦).

افترض، في مثال شركة كاسل للمعائنات، أن الارتفاعين الأوسط والعُلوي لرفوف الخبز الإيطالي قد استُخدما ضعف عدد مرات استخدام الارتفاع الأسفل

للفروق. واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B (اتساع الرفوف)، فإن متوسط الاستجابة الذي يهمنا لاتساع الرفوف العادي سيكون عندئذٍ:

$$\mu_R = \frac{\mu_{11} + 2\mu_{21} + 2\mu_{31}}{5}$$

ومتوسط الاستجابة للرفوف المتسعة سيكون:

$$\mu_W = \frac{\mu_{12} + 2\mu_{22} + 2\mu_{32}}{5}$$

ولذلك، فإن اختبار تأثير اتساع الرف سيتضمن الفرضيات البديلة التالية:

$$\begin{array}{ll} H_0: \mu_R = \mu_W & \text{أو} & H_0: \mu_R - \mu_W = 0 \\ H_a: \mu_R \neq \mu_W & & H_a: \mu_R - \mu_W \neq 0 \end{array}$$

لاحظ أن هذه الفرضيات البديلة تتألف من تراكيب خطية من متوسطات الخلايا μ_{ij} :

$$\begin{aligned} H_0: \frac{\mu_{11} + 2\mu_{21} + 2\mu_{31}}{5} - \frac{\mu_{12} + 2\mu_{22} + 2\mu_{32}}{5} &= 0 \\ H_a: \frac{\mu_{11} + 2\mu_{21} + 2\mu_{31}}{5} - \frac{\mu_{12} + 2\mu_{22} + 2\mu_{32}}{5} &\neq 0 \end{aligned} \quad (18.74)$$

ولذلك، سنحتاج عادة لطريقة الاختبار الخطي العام بدلالة المصفوفات. وسنوضح

طريقة الاختبار هذه عندما لا تكون متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها في الفقرة ٣-٢١.

وعلى العكس، فإن طرق التقدير عندما لا تكون متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها هي في الأساس غير مختلفة عن طرق التقدير عندما تكون لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها. وسنوضح عملية تقدير التأثيرات الرئيسة عندما لا تكون متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها في الفقرة ٤-١٩.

مراجع ورد ذكرها

- [18.1] MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.
- [18.2] Dixon, W.J., chief editor. BMDP Statistical Software manual, vols. 1 and 2. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1988.

مسائل

(١-١٨) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC. يرغب محلل في بحث تأثيرات انتماء المدرسة الطبية (العامل A) والمنطقة الجغرافية (العامل B) على عتسورة

العلوى. وستضمن الدراسة جميع تراكيب مستويات العوامل في الدراسة.

أ - ماهو عدد المعالجات المدروسة؟

ب - ماهو متغير الاستجابة هنا؟

(٢-١٨) عرض أحد الطلبة في مناقشة في فصل ما: «المعالجة هي المعالجة، سواء أكانت الدراسة تتضمن عامل واحد أم عدة عوامل. وعدد العوامل هو وحده الذي يؤثر على تحليل النتائج». ناقش.

(٣-١٨) تحقق من التفاعلات في الجدول (٣-١٨)ب.

(٤-١٨) في دراسة ثنائية العامل، كانت متوسطات المعالجات μ_{ij} كمايلي:

العامل B			
	B_3	B_2	B_1
العامل A			
A_1	36	23	34
A_2	42	29	40

أ - أوجد متوسطات مستويات العامل A.

ب - أوجد التأثيرات الرئيسة للعامل A.

جـ - هل تدل حقيقة أن $\mu_{11} - \mu_{12} = -11$ بينما $\mu_{12} - \mu_{13} = 13$ ، على تفاعل العاملين A, B؟ اشرح.

د - أرسم متوسطات الاستجابة μ_{ij} في هيئة الشكل (٢-١٨) وحدد ما إذا

كان العاملان يتفاعلا. ماذا وجدت؟

(٥-١٨) في دراسة ذات عاملين، كانت متوسطات المعالجات μ_{ij} كمايلي:

العامل B				
	B_4	B_3	B_2	B_1
العامل A				
A_1	269	268	265	250
A_2	269	270	273	288

أ - أوجد التأثيرات الرئيسة للعامل B. ماذا تتضمن نتائجك بالنسبة للعامل B؟

ب - ارسم متوسطات الاستجابة μ_{ij} في هيئة الشكل (٢-١٨) وحدد ما إذا كان العاملان يتفاعلا، كيف تعرف أنه توجد تفاعلات؟ هل التفاعلات مهمة أم غير مهمة؟

ج - قم بتحويل لوغاريتمي لـ μ_{ij} ، وارسم القيم المحولة للتعرف على ما إذا كان التحويل مفيدا في تخفيض التفاعلات. ماذا وجدت؟

(٦-١٨) فيما يلي ثلاث مجموعات لمتوسطات المعالجات μ_{ij} للدرجات الطلاب في مقرر ما، حيث العامل A هو تخصص الطالب (A_1 : علوم الحاسب، A_2 : الرياضيات) والعامل B هو مستوى الطالب الدراسي (B_1 : مستوى قبل النهائي - B_2 : نهائي - B_3 : دراسات عليا).

مجموعة ٣				مجموعة ٢				مجموعة ١			
B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3	
A_1	75	80	85	A_1	75	80	90	A_1	80	80	80
A_2	75	85	100	A_2	80	86	97	A_2	90	90	90

ارسم كل مجموعة من المتوسطات μ_{ij} في هيئة الشكل (٢-١٨) للدراسة تأثيرات التفاعل. حلل كل رسم واعرض نتائجك. في حالة وجود التفاعلات، صف طبيعتها وحدد ما إذا كانت مهمة أم غير مهمة.

(٧-١٨) بالرجوع إلى المسألة (٤-١٨) افترض أن $\sigma = 1.4$ و $n = 10$.

أ - أوجد $E\{MSE\}$ و $E\{MSA\}$

ب - هل $E\{MSA\}$ أكبر بشكل جوهري من $E\{MSE\}$ ؟ ماهي النتائج المترتبة على هذا؟

(٨-١٨) بالرجوع إلى المسألة (٥-١٨). افترض أن $\sigma = 4$ و $n = 6$.

أ - أوجد $E\{MSE\}$ و $E\{MSAB\}$.

ب - هل $E\{MSAB\}$ أكبر بشكل جوهري من $E\{MSE\}$ ؟ ماهي النتائج المترتبة على هذا؟

(٩-١٨) ذكر أخصائي في علم النفس: «أشعر بعدم الارتياح للتقرير في أي دراسة بحثية عن كون التفاعلات مهمة أم غير مهمة. وأفضل أن يقوم الاحصائي بعملية التقرير». علق.

(١٠-١٨) بالرجوع إلى مسألة العروض التقليدية (١٤-١٣). استخدم ستة من المتطوعين الذكور وست من المتطوعات الإناث في كل مجموعة أعمار. وصنفت المشاهدات (مئات الدولارات) وفقاً للعمر (العامل A) ولجنس المالك (العامل B) وكانت كمايلي:

العامل ب (جنس المالك)		العامل A (العمر)
أنثى	ذكر	
21	21	$i = 1$ شاب
22	23	
20	19	
21	22	
19	22	
25	23	$i = 2$ كهل
26	30	
29	29	
27	26	
28	28	
27	27	$i = 3$ شيخ
29	27	
23	25	
19	22	
20	23	
21	21	
20	22	
20	21	

وفيما يلي ملخص لبعض النتائج الحسابية: $SSB = 5.444$, $SSAB = 71.667$, $SSE = 316.722$, $SSA =$

أ - أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب - أوجد الرواسب. هل مجموعها يساوي الصفر لكل معالجة؟

ج - جهز رسوماً تغطية مصطفة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج

التحاين، (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. وما هي نتائجك؟

د - جهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضاً، معامل الارتباط

بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو

فرض الطبيعية ملائماً هنا؟

هـ - تم الحصول على المشاهدات لكل معالجة وفق الترتيب الموضح. جهز

رسوماً تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي نتائجك؟

(١٨-١١) بالرجوع إلى مسائل العروض النقدية (١٤-١٣) و (١٨-١٠) افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ - أرسم متوسطات الاستجابة المقدرة \bar{y}_{ij} في هيئة الشكل (١٨-٥).

هل يبدو أنه توجد أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم

التشتت الكلي في دراسة العروض النقدية؟ اشرح.

ج - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اذكر

الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للعمر والجنس، واستخدم في

كل حالة $\alpha = 0.05$ ، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

ماهي القيمة P للاختبار؟ هل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل

معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الأجزاء (ج-)

و (د)، استخدم مراجعة كيمبل.

- و - هل النتائج في الفقرات (ج) و (د) تؤكد تحليلك البياني في الجزء (أ)؟
- ز - ماهي العلاقات بين مجموع المربعات في تحليل التباين ثنائي العامل في الفقرة (ب) ومجموع المربعات في تحليل التباين وحيد العامل في المسألة (١٣-١٤) ج؟ وهل تصحّح العلاقات نفسها بالنسبة لدرجات الحرية؟

(١٢-١٨) تأثير النظر إلى العدسة. في دراسة عن تأثير النظر إلى العدسة (العامل A) وجنس مسؤول شئون الموظفين (العامل B) على تقييم المسؤول لإمكانية نجاح متقدم لوظيفة في عمله، تمّ تقديم صورة أمامية لوجه المتقدم إلى الوظيفة إلى عشرة من الذكور وعشر من الإناث من مسؤولي شؤون الموظفين وطلب منهم تقدير درجة نجاح المتقدم للوظيفة على مقياس يتراوح بين 0 (فشل تام) إلى 20 (نجاح تام). وتمّ اختيار نصف المسؤولين من كل من الجنسين عشوائياً ليتلقوا نسخة من صورة كان المتقدم للوظيفة يحدّق فيها بشكل تام في العدسة. بينما تلقى النصف الآخر من المسؤولين نسخة من صورة لم يكن فيها المتقدم يحدّق في العدسة. وفيما يلي تقديرات النجاح.

العامل B (جنس المسؤول)		العامل A (المرء) (النظر إلى العدسة)
$j=2$ أنثى	$j=1$ ذكر	
15	11	$i=1$ موجود
12	7	
14	12	
11	6	
16	10	
14	12	$i=2$ غير موجود
17	16	
13	10	
20	13	
18	14	

ملخص لبعض النتائج الحسابية: $SSA = 54.15$, $SSB = 76.05$, $SSAB = 1.25$, $SSE = 97.2$.

أ - أوجد القيم التوقعية لنموذج التحاين (18.23).

ب - أوجد الرواسب وهل مجموعها يساوي الصفر لكل معالجة؟

ج - جهّز رسوم تقطعية مصطفة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج

التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. ماهي استنتاجاتك؟

د - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط

بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو

فرض الطبيعية ملاكما هنا؟

هـ - تمّ الحصول على المشاهدات لكل معالجة وفق الترتيب الموضح. جهّز

رسوم تمسلسية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟

(١٨-١٣) بالرجوع إلى مسألة النظر إلى العدسة (١٨-١٢). افترض أن نموذج

التحاين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات الاستجابة المقدرة \bar{y}_{ij} في هيئة الشكل (٥-١٨).

ب - هل يبدو أن هناك تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ج - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم

التغير الكلي في تقويم النجاح في الدراسة؟ اشرح.

د - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$.

اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P -

للاختبار؟

د - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للنظر إلى العدسة والجنس.

واستخدم في كل حالة $\alpha = 0.01$ واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة

القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟ وهل لاختبار التآثرات

الرئيسة للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم مراجعة كيمبل.

و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

(١٤-١٨) علاج حمى العلف. كان مختبر أبحاث يطور مركباً جديداً لعلاج الحالات

الخطيرة لحمى العلف. ففي تجربة تتضمن 36 متطوعاً، تم تغيير كميات

العنصرين النشيطين (العاملان A, B) عند ثلاثة مستويات لكل عامل،

واستعملت التعشية لتخصيص أربعة متطوعين لكل معالجة من المعالجات

التسع. وفيما يلي عدد ساعات الشفاء:

العامل B (العنصر 2)			
العامل A (العنصر 1)	$j = 1$ خفيف	$j = 2$ متوسط	$j = 3$ شديد
$i = 1$ خفيف	2.4	4.6	4.8
	2.7	4.2	4.5
	2.3	4.9	4.4
	2.5	4.7	4.6
$i = 2$ متوسط	5.8	8.9	9.1
	5.2	9.1	9.3
	5.5	8.7	8.7
	5.3	9.0	9.4
	6.1	9.9	13.5
$i = 3$ شديد	5.7	10.5	13.0
	5.9	10.6	13.3
	6.2	10.1	13.2

أ - أوجد القيم الترفيقية لنموذج التحاين (18.23)

ب - أوجد فرواسب.

جـ - ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذا الرسم؟ ماهي استنتاجاتك؟
 د - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائماً هنا؟

(١٥-١٨) بالرجوع إلى مسألة علاج حُمى العلف (١٨-١٤). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات الاستجابة المقترنة \bar{y}_{ij} في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يقترح رسمك أن هناك أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم التغير الكلي في عدد ساعات الشفاء في الدراسة؟ اشرح.

جـ - اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ ، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

د - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للعنصرين أم لا. استخدم $\alpha = 0.05$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار. وهل للاختبار التأثيرات الرئيسة معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى للمنبوعة العالي للاختبارات في الجزئين (جـ) و(د)، استخدم مقايحة كيمبل.

و - هل النتائج في الجزئين (جـ) و(د) تؤكد تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

(١٦-١٨) صيانة مساق القروض. تتضمن هيئة العمل في مركز لصيانة معدات الكهرونية على ثلاثة فنيين متخصصين في صيانة ثلاثة أنواع من مساقات

الأقراص شائعة الاستخدام في أجهزة الحاسب الآلي الشخصية. وترغب في دراسة تأثيرات الفني (العامل A) ونوع مساق القرص (العامل B) على الوقت اللازم للصيانة، وتوضح البيانات التالية عدد الدقائق اللازمة لاستكمال عملية الإصلاح وذلك في دراسة جرى فيها تخصيص كل فني عشوائيا إلى خمس عمليات إصلاح لكل نوع من أنواع مساقات الأقراص.

العامل B (نوع المساق)			العامل A (الفني)
$j=3$ نوع 3	$j=2$ نوع 2	$j=1$ نوع 1	
59	57	62	$i=1$ فني 1
53	45	48	
67	39	63	
66	54	57	
47	44	69	
55	61	51	$i=2$ فني 2
58	58	57	
50	70	45	
69	66	50	
49	51	39	
47	58	59	$i=3$ فني 3
56	63	65	
51	70	55	
44	53	52	
50	60	70	

أ - أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب - أوجد الرواسب.

ج - ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. ملءي الاغرافات عن نموذج التحاين

(18.23) التي يمكن دراستها من هذا الرسم؟ وملءي استنتاجاتك؟

- د - جهاز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأيضاً، أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائماً هنا؟
- هـ - تم الحصول على المشاهدات لكل معالجة وفق الترتيب الموضح. جهاز رسوم تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟

(١٧-١٨) بالرجوع إلى مسألة صيانة مساقى القصر (١٨-١٦). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

- أ - ارسم متوسطات الاستجابة المقدرة \bar{y}_i في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يقترح رسمك وجود أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.
- ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم التغير الكلي؟

- ج - اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$ ، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟
- د - اختر ما إذا كانت هناك تأثيرات رئيسة للفني ونوع المساقى. استخدم $\alpha = 0.01$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار. وهل لاختبار التأثيرات الرئيسية معنى هنا؟ اشرح.

- هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (ج) و (د)، استخدم مراجعة كيمبل.

- و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (ج) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟
- (١٨-١٨) التوهم في المستشفى بسبب الفشل الكلوي. من الشائع معالجة مرضى الفشل الكلوي بأجهزة غسل الكليتين وذلك لتنقية الدم من المواد السامة. وتعتمد «الجراحة» الملائمة للحصول على العلاج الفعال، من بين أشياء

أخرى، على فترة العلاج والوزن المكتسب مابين فترتي علاج وذلك نتيجة لتواكم السوائل. ولدراسة تأثيرات هذين العاملين على عدد الأيام التي قضيت في المستشفى خلال عام (بسبب هذا المرض)، فقد تم الحصول على عينة عشوائية من عشرة مرضى في كل مجموعة من اللذين تلقوا العلاج في منشأة كبيرة للفصل الكلوي. وقد صنفنا فترة العلاج (العامل A) إلى مجموعتين: فترة قصيرة (متوسط فترة الفصل فوق عام كامل هو أقل من أربع ساعات) وفترة طويلة (متوسط فترة الفصل فوق عام كامل هو أربع ساعات أو أكثر). وصنف متوسط الوزن المكتسب مابين فترات العلاج (العامل B) خلال العام إلى ثلاث مجموعات: خفيف، متوسط وشديد. وفيما يلي بيانات عدد الأيام التي قضيت في المستشفى:

العامل B (الوزن المكتسب)

العامل A (فترة العلاج)	j = 1 خفيف	j = 2 متوسط	j = 3 شديد		
i = 1 قصيرة	0	2	4	15	16
	2	0	4	10	7
	1	5	7	8	30
	3	6	12	5	3
	0	8	15	20	27
i = 2 طويلة	0	2	5	10	15
	1	7	3	8	4
	1	4	2	12	9
	0	0	0	3	6
	4	5	1	7	1

وستستخدم البيانات المحولة ($Y' = \log_{10}(Y + 1)$) في التحليل.

أ - حوّل البيانات.

ب - أوجد القيم الترفيقية والرواسب لنموذج التحاين (18.23) للبيانات المحولة.

ج - جهز رسوم نقطية مصطفة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. ماهي استنتاجاتك؟

د - جهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائماً هنا؟

(١٩-١٨) بالرجوع إلى مسألة التويم في المستشفى بسبب القشل الكلوي (١٨-١٨). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات الاستجابة المقدرة \bar{Y}_{ij} في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يقترح رسمك وجود أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.
ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم التغير الكلي؟

ج - اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ ، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟
د - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة لفترة العلاج والوزن المكتسب. استخدم $\alpha = 0.05$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار. وهل للاختبار التأثيرات الرئيسة معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و(د)، استخدم مراجعة كيميل.

و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و(د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟
(٢٠-١٨) احتياجات مريمج. كانت شركة لروامج الحاسب الآلي تواجه صعوبات في عملية التنبؤ باحتياجات مريمج لمشروع برمجة واسع النطاق. وكجزء من دراسة لثلاثي هذه الصعوبات، فقد صنف 24 مروجاً إلى مجموعات متساوية

وفقا لنوع الخترة (العامل A) ومقدار الخترة (العامل B)، ومن ثمَّ طُلِبَ منهم أن يتنبؤوا بعدد الأيام اللازمة للمرمج كي ينهي مشروعا كبيرا على وشك البدء. وبعد الانتهاء من هذا المشروع تمَّ تحديد أخطاء التنبؤ (عدد أيام المرمج الفعلية مطروحا منها العدد المتنبأ به). وفيما يلي بيانات أخطاء التنبؤ.

العامل B سنوات الخترة			العامل A (نوع الخترة)
$j=3$ أكثر من 10	$j=2$ 5 وأقل من 10	$j=1$ أقل من 5	
56	110	240	$i=1$ أنظمة
60	118	206	صغيرة فقط
68	103	217	
58	95	225	
37	47	71	$i=2$ أنظمة
33	52	53	صغيرة وكبيرة
40	31	68	
45	49	57	

أ - أوجد القيم التوفيقية لنموذج التباين (18.23).

ب - أوجد الرواسب.

ج - جهّز رسوما نقطية مصطفة للمعاملات. ماهي الانحرافات عن نموذج

التباين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. ماهي استنتاجاتك؟

د - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين

الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض

الطبيعية ملائما هنا؟

(٢١-١٨) بالرجوع إلى مسألة احتياجات مبرمج (١٨-٢٠). افترض أن نموذج

التباين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات الاستجابة المقترنة \bar{y}_{ij} في هيئة الشكل (٥-١٨). هل يقترح رسمك أن وجود أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم التغير الكلي؟

جـ - اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$ ، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

د - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة لنوع الخبيرة ولسنوات الخبرة. استخدم $\alpha = 0.01$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟. وهل للاختبار التأثيرات الرئيسة معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم مراجعة كيمبل.

و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

(٢٢-١٨) كيف تختلف تمشية تخصيص المعالجات في دراسة ثنائية العامل عندما يكون كلا العاملين تجريبيين وعندما يكون أحدهما فقط عاملاً تجريبياً؟

(٢٣-١٨) بالرجوع إلى مسألة النظر إلى العدسة (١٨-١٢).

أ - اشرح كيف يمكنك تخصيص مسؤولي شؤون الموظفين إلى المعالجات في هذه الدراسة ثنائية العامل. قم بجميع التعشيات المناسبة.

ب - هل قمت بتعشية المسؤولين إلى المستويات العاملية لكل عامل؟

(٢٤-١٨) بالرجوع إلى مسألة حُمَي القَلَف (١٨-١٤).

أ - اشرح كيف يمكنك تخصيص المتطوعين إلى المعالجات في هذه الدراسة.

ب - هل قمت بتعشية المتطوعين إلى المستويات العاملية لكل عامل.

(٢٥-١٨) بالرجوع إلى مسألة حياة مساق القرص (١٨-١٦).

- أ - هل تحتاج إلى أية تعشية لتخصيص المعاملات في هذه الدراسة؟ هل تم استخدام أية تعشية؟ اشرح.
- ب - هل تعتبر هذه دراسة تجريبية في طبيعتها؟ اشرح.
- (٢٦-١٨) بالرجوع إلى مسألة النظر إلى العنصر (١٢-١٨).
- أ - عدل نموذج الانحدار (18.68) بحيث يمكن تطبيقه في هذه الدراسة
- ثنائية العامل باستخدام $a=2$ و $b=2$.
- ب - اكتب المصفوفات X, Y و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).
- ج - أوجد $X\beta$. تحقق من صحة القيم المتوقعة.
- د - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. ما الذي يتم تقديره بواسطة حد التقاطع؟
- هـ - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار معتمدا على مجاميع المربعات الإضافية للملازمة.
- و - اختر على أفراد كلا من تأثيرات التفاعل، التأثيرات الرئيسة للعامل A ، والتأثيرات الرئيسة للعامل B . استخدم $\alpha = 0.01$ لكل اختبار، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.
- (٢٧-١٨) بالرجوع إلى مسألة علاج حُمى العلف (١٤-١٨).
- أ - عدل نموذج الانحدار (18.68) بحيث يمكن تطبيقه في هذه الدراسة
- ثنائية العامل باستخدام $b=3$ و $a=3$.
- ب - اكتب المصفوفات X, Y و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).
- ج - أوجد $X\beta$. تحقق من صحة القيم المتوقعة.
- د - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. ما الذي يتم تقديره بواسطة α_1 ؟
- هـ - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار معتمدا على مجاميع المربعات الإضافية للملازمة.
- و - اختر على أفراد كلا من تأثيرات التفاعل، التأثيرات الرئيسة للعامل A ، والتأثيرات الرئيسة للعامل B . استخدم $\alpha = 0.05$ لكل اختبار، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٨-١٨) بالرجوع إلى مسألة صيانة مساق القرص (١٦-١٨).

أ - عتّل نموذج الانحدار (18.68) بحيث يمكن تطبيقه في هذه الدراسة ثنائية العامل باستخدام $a=3$ و $b=3$.

ب - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. مالمذي يتم تقديره بواسطة β_1 ؟

ج - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار معتمدا على مجاميع المربعات الإضافية الملائمة.

د - اختر على انفراد كلا من تأثيرات التفاعل، التأثيرات الرئيسة للعامل A ، والتأثيرات الرئيسة للعامل B . استخدم $\alpha = 0.01$ لكل اختبار، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٩-١٨) بالرجوع إلى مسألة العروض النقدية (١٨-١٠). المطلوب اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B عن طريق الاختبار الخطي العام وطريقة المصفوفات.

أ - اكتب المصفوفات X ، Y ، β للنموذج التام (18.15) كما هو موضح في (18.19).

ب - أوجد معاملات الانحدار المقترنة للنموذج التام باستخدام (8.64).

ج - عر عن الفرضيات البديلة بالشكل المصفوفي (8.66).

د - أوجد $SSE(F)$ - $SSE(R)$ باستخدام (8.70). وهل نيتحتك تساوي $SSB = 5.444$ كما ينبغي أن تكون ؟

تمارين

(٣٠-١٨) استبط (18.7a) من (18.7).

(٣١-١٨) أثبت النتيجة في (18.9b).

(٣٢-١٨) (محتاج إلى حساب التفاضل). اكتب دالة الإمكانية العظمى لنموذج

التحسين (18.15). عندما تكون $a=2$ ، $b=2$ و $n=2$. أوجد تقديرات

الإمكانية العظمى. وهل هي نفسها تقديرات المربعات الدنيا في (18.29).

(٣٣-١٨) (محتاج إلى حساب التفاضل). استبط (18.29).

(٣٤-١٨) استنبط (18.39) من (18.37).

(٣٥-١٨) بين التكافؤ بين التعابير في (18.40c) و (18.39a).

مشاريع

(٣٦-١٨) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC. مراد اعتبار المستشفيات التالية في

دراسة لتأثيرات المنطقة (العامل A: المتغير 9) ومتوسط عمر المريض (العامل

B: المتغير 3) على متوسط مدة بقاء المريض في المستشفى (المتغير 2):

1-44	46	48	51	53	57	58	60	63	66	74
76	79	80	83	84	88	94	101	103	111	

ولأغراض دراسة التحاين هذه، مراد تصنيف متوسط العمر إلى فئتين: أقل

من أو يساوي 53.9 سنة و 54.0 سنة أو أكثر.

أ - جُمع البيانات المطلوبة ولوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب - أوجد الرواسب.

ج - ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. ماهي الانحرافات عن نموذج

التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذا الرسم؟ وما هي

استنتاجاتك؟

د - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضاً، معامل الارتباط

بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو

فرض الطبيعية ملائماً هنا؟

(٣٧-١٨) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC وإلى المشروع (٣٦-١٨). افترض

أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات المعالجات المقترنة \bar{y}_j في هيئة الشكل (١٨-٥).

هل يبدو أن هناك أية تأثيرات للعوامل. اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم

التغير الكلي في تقويم النجاح في الدراسة؟ اشرح.

ج - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$.
اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للمنطقة والعمر. واستخدم في كل حالة $\alpha = 0.05$ ، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار. وهل للاختبار التأثيرات الرئيسية للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (ج) و (د)، استخدم مزاجحة كيمبل.

و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (ج) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟
(١٨-٣٨) بالرجوع إلى مجموعة البيانات *SMSA*. يراد اعتبار المساحات الحضرية التالية في دراسة لتأثير المناطق (العامل A : المتغير 12) ونسبة السكان في المدن الرئيسية (العامل B : المتغير 4) على معدل الجريمة (المتغير 11 + المتغير 3):
1-36 38 39 45 46 49 53 62 71 73 101 123 130
ولأغراض دراسة التحاين هذه، يراد تصنيف النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية إلى فئتين: أقل من أو تساوي 38.9 في المئة، و 39.0 في المئة أو أكثر.

أ - جُمع البيانات المطلوبة وأحسب القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب - أوجد الرواسب.

ج - جهّز رسوماً نقطية مصطفة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وما هي استنتاجاتك؟

د - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضاً، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائماً هنا؟

(٣٩-١٨) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SMSA والمشروع (٣٨-١٨). افترض أن نموذج التباين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات المعالجات المقطرة $\bar{y}_{..}$ في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم التغير الكلي في تقويم النجاح في الدراسة؟ اشرح.

ج - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - اختر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للمنطقة والنسبة المئوية للسكان في المدن المركزية. أم لا. استخدم في كل حالة $\alpha = 0.01$ ، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار. وهل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (ج) و (د)، استخدم مزاجحة كيمبل.

و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (ج) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

تخطيط وتصميم دراسات ثنائية العامل بحجوم متساوية العينات

عندما تشير اختبارات تحليل التباين المروضة في الفصل الثامن عشر إلى وجود تأثيرات عوامل في دراسات ثنائية العامل، تكون الخطوة التالية هي تحليل طبيعة تأثيرات العوامل هذه. وناقش هنا كيفية القيام بمثل هذه التحليل. ونستمر في دراسة نموذج التحاين المثلث (18.23) بعاملين حيث توجد m مشاهدة لكل معاملة وتمتص جميع متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها. ونتابع أولا تحليل تأثيرات العوامل عندما يكون كلا العاملين وصفيا ثم نتقل إلى تحليلها عندما يكون أحد العاملين أو كلاهما كميًا. ونختتم هذا الفصل بمناقشة موجزة لتخطيط بحجوم العينات في دراسات ثنائية العامل، وهذا التخطيط يشكل عنصرا رئيسا في تصميم مثل هذه الدراسات.

(١٩-١) استراتيجيات للتحليل

يقترح ما استعرضناه في الفصل الثامن عشر عن معنى عناصر النموذج الاستراتيجي الأساسي التالي لتحليل تأثيرات العوامل في دراسات ثنائية العامل:

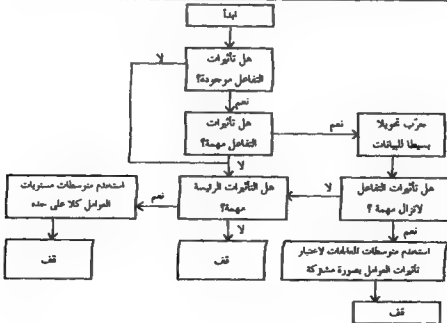
- ١- اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلا.
- ٢- إذا لم يتفاعلا، اختر ما إذا كان للعاملين A و B تأثيرات رئيسة مهمة. وفي حال تأثيرين رئيسين مهمين صف طبيعة هذه التأثيرات بدلالة متوسطات مستويات تأثيرات العاملين μ_A أو μ_B ، على الترتيب. وفي بعض الحالات الخاصة قد نهتم، أيضا، بمتوسطات المعالجات μ_{AB} .
- ٣- إذا كان العاملان متفاعلين، اختر ما إذا كانت التفاعلات مهمة أو غير مهمة.
- ٤- إذا كانت التفاعلات غير مهمة، تابع الخطوة ٢.

٥- إذا كانت التفاعلات مهمة، ادرس إمكانية جعلها غير مهمة عن طريق تحويل بسيط ذي مغزى لسلّم القياس. وإذا كانت الإمكانية موجودة، فقم بالتحويل ثم تابع كما في الخطوة ٢.

٦- وفي حالة تفاعلات مهمة لا يمكن جعلها غير مهمة عن طريق تحويل بسيط، حلل تأثيرات العاملين بصورة مشتركة بدلالة متوسطات المعالجات μ_{jk} . وفي بعض الحالات الخاصة، قد نهتم، أيضاً، بمتوسطات مستويات العاملين $\mu_{j.}$ و $\mu_{.k}$. ونقدم في الشكل (١-١٩) جدول تلحق لهذا الأسرّاتيج.

وقد نوقشت الخطوة ١ من هذا الأسرّاتيج، أي اختبار تأثيرات التفاعل، في الفصل ١٨. كما ناقشنا هناك، أيضاً، الخطوة ٥ أي إمكانية إلغاء التفاعلات المهمة بتحويل بسيط ذي مغزى، بالإضافة إلى كيفية اختبار وجود تأثيرات رئيسة للعوامل. ونعود الآن إلى الخطوتين ٢ و ٦ من خطوات اسرّاتيج التحليل، ونقصد كيفية مقارنة متوسطات مستويات العاملين μ_{jk} و $\mu_{.k}$ عندما لا توجد تفاعلات، أو عندما توجد تفاعلات غير مهمة، وكيف نقارن متوسطات المعالجات μ_{jk} عند وجود تفاعلات مهمة. ونبدأ بمناقشة تحليل تأثيرات العوامل عندما لا يتفاعل العاملان أو يتفاعلان، فقط، بطريقة غير مجدية.

شكل (١-١٩) اسرّاتيجية تحليل دراسات ثنائية العامل.



(٢٠١٩) تحليل تأثيرات العوامل عندما لا يتفاعل العاملان

كما رأينا لتونا، فإن تحليل تأثيرات العوامل يتضمن عادة متوسطات مستويات العوامل μ_i و μ_j ، فقط، وذلك عندما لا يتفاعل العاملان، أو عندما يتفاعلان، فقط، بصورة غير مهمة. وقبل المضي في طرق التقدير الرسمية، من المفيد، عادة، رسم متوسطات مستويات العوامل المقدرة في رسم احتمال طبيعي كما هو موضح في الفقرة ١٥-١ من أجل دراسات أحادية العامل.

تقدير متوسط مستوى عامل

المقدَّرات النقطية غير المنحازة لـ μ_i و μ_j هي:

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_{i.} \quad (19.1a)$$

$$\hat{\mu}_j = \bar{Y}_{.j} \quad (19.1b)$$

حيث $\bar{Y}_{i.}$ و $\bar{Y}_{.j}$ معرفان في (18.27d) و (18.27f) ، على الترتيب، وتباين $\bar{Y}_{i.}$ هو :

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \frac{\sigma^2}{bn} \quad (19.2a)$$

باعتبار أن $\bar{Y}_{i.}$ يتضمن bn من المشاهدات المستقلة، ولكل منها تباين σ^2 . ولدينا بصورة مشابهة:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{.j}\} = \frac{\sigma^2}{an} \quad (19.2b)$$

ونحصل على مقدرات غير منحازة لهذه التباينات بوضع MSE بدلا من σ^2 :

$$s^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \frac{MSE}{bn} \quad (19.3a)$$

$$s^2\{\bar{Y}_{.j}\} = \frac{MSE}{an} \quad (19.3b)$$

وتستخدم حدود الثقة لـ μ_i و μ_j ، كالمادة، التوزيع t :

$$\bar{Y}_{i.} \pm t[1-\alpha/2; (n-1)ab]s\{\bar{Y}_{i.}\} \quad (19.4a)$$

$$\bar{Y}_{.j} \pm t[1-\alpha/2; (n-1)ab]s\{\bar{Y}_{.j}\} \quad (19.4b)$$

ودرجات الحرية $(n-1)ab$ هي تلك المصاحبة لـ MSE .

تقدير مقارنة متوسطات مستويات عامل

تُقدَّر للمقارنة بين متوسطات مستويات العامل μ_i ، وهي :

$$L = \sum c_i \mu_i \quad \text{حيث: } \sum c_i = 0 \quad (19.5)$$

تقديرًا غير منحاز بالمقدار:

$$\hat{L} = \sum c_i \bar{Y}_i \quad (19.6)$$

ومن استقلال \bar{Y}_i نجد أن تباين هذا المقدَّر هو:

$$\sigma^2\{\hat{L}\} = \sum c_i^2 \sigma^2(\bar{Y}_i) = \frac{\sigma^2}{bn} \sum c_i^2 \quad (19.7)$$

والمقدَّر غير المنحاز لهذا التباين هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{bn} \sum c_i^2 \quad (19.8)$$

وأعبراً، فإن حدي الثقة للمقارنة L ، بمعامل ثقة $(1 - \alpha)$ هما:

$$\hat{L} \pm t[1 - \alpha/2; (n-1)ab] s\{\hat{L}\} \quad (19.9)$$

ولتقدير المقارنة بين متوسطات مستويات العامل μ_j :

$$L = \sum c_j \mu_j \quad \text{حيث: } \sum c_j = 0 \quad (19.10)$$

نستخدم المقدَّر:

$$\hat{L} = \sum c_j \bar{Y}_j \quad (19.11)$$

وتباينه المقدَّر:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{an} \sum c_j^2 \quad (19.12)$$

وال $(1 - \alpha)$ حدي ثقة في (19.9) للمقارنة L لا تزال قابلة للتطبيق، حيث \hat{L} و $s\{\hat{L}\}$

معرفان الآن في (19.11) و (19.12)، على الترتيب.

تقدير تركيب خطي في متوسطات مستويات عامل

يمكن تقدير التركيب الخطي في متوسطات مستويات العامل μ_i ، وهو:

$$L = \sum c_i \mu_i \quad (19.13)$$

تقديرًا غير منحاز بالإحصاءة \hat{L} في (19.6). وتباين هذا المقدَّر معطى في (19.7).

والمقدر غير المنحاز لهذا التباين معطى في (19.8) . والـ $(1-\alpha)$ حدي ثقة للمقدار L معطيان في (19.9) .

وهناك نتائج مشابهة لتكوين خطي في متوسطات مستويات العامل μ_j :

$$L = \sum c_j \mu_j \quad (19.14)$$

مقارنات ثنائية متعددة لمتوسطات مستويات عامل

نهتم عادة بأكثر من مقارنة واحدة، ويمكن تطبيق المقارنات المتعددة في الفصل ١٥ بعد تعديلات طفيفة، فقط. وإذا أردنا القيام بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مستويات عامل μ_i ، أو بعدد كبير منها، وهي مقارنات من الشكل:

$$D = \mu_i - \mu_j$$

فإن طريقة توكي في (15.25) هي طريقة مناسبة. وتكون الصيغ كسابلي (وهي

تمكس حالة حجوم عينات متساوية التي نعتبرها هنا):

$$\hat{D} = \bar{Y}_i - \bar{Y}_j \quad (19.16a)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSE}{bn} \quad (19.16b)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; a, (n-1)ab] \quad (19.16c)$$

وحدا الثقة هما كالمعتاد:

$$\hat{D} \pm Ts\{\hat{D}\} \quad (19.17)$$

وا احتمال أن تكون هذه العائلة من المبارات جميعها صحيحة هو عندئذ $(1 - \alpha)$.

ومن أجل مقارنات ثنائية بين متوسطات مستويات العامل μ_j كون التغيرات

الوحيدة هي:

$$D = \mu_j - \mu_{j'} \quad (19.18a)$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_j - \bar{Y}_{j'} \quad (19.18b)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSE}{mn} \quad (19.18c)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; b, (n-1)ab] \quad (19.18d)$$

وإذا أردنا القيام بعدد قليل، فقط، من المقارنات الثنائية، فقد تكون طريقة

بونفرونو أفضل. وجميع الصيغ السابقة تبقى في هذه الحالة قابلة للتطبيق، باستثناء أننا نستبدل مضاعف بونفرونو B بمضاعف توكي T :

$$B = t[1 - \alpha/2g; (n-1)ab] \quad (19.19)$$

حيث g هو عدد العبارات في العائلة.

وإذا رغبتا بمعامل ثقة عائلي $(1 - \alpha)$ لمجموعة مشتركة من المقارنات الثنائية تتضمن كلا من متوسطات العاملين A و B ، فيمكن استخدام طريقة بونفرونو مباشرة، حيث يمثل g العدد الكلي من العبارات في المجموعة المشتركة. وكبدل لذلك يمكن استخدام طريقة بونفرونو مقترنة مع طريقة توكي. ولتوضيح هذا الاستخدام افترض أن المقارنات الثنائية للعامل A قد تمت بطريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 0.95، وكذلك الأمر بالنسبة للمقارنات الثنائية للعامل B . فعندئذٍ تؤكد لنا متباينة بونفرونو أن معامل الثقة العائلي للمجموعة المشتركة من المقارنات للعاملين كليهما هو، على الأقل 0.90.

مقارنات متعددة لموسطات مستويات عامل

عندما نهتم بعدد كبير من المقارنات بين متوسطات مستويات العامل μ_i أو μ_r ، فينبغي استخدام طريقة شيفه. وإذا تضمنت المقارنات μ_i ، كما في (19.5)، فالمقدر غير المنحاز معطى في (19.6) وتباينه المقدر في (19.8). وفي هذه الحالة نعرف مضاعف شيفه بالعلاقة:

$$S^2 = (a-1)F[1-\alpha; a-1, (n-1)ab] \quad (19.20)$$

مما يقود إلى حدي الثقة L :

$$\bar{L} \pm Ss\{\bar{L}\} \quad (19.21)$$

للمقارنة L . وعندئذٍ يمثل $(1 - \alpha)$ احتمال أن تكون كل فترة ثقة (19.21)، في عائلة جميع المقارنات الممكنة، صحيحة.

وإذا رغبتا بمقارنات بين متوسطات مستوى العامل μ_r ، فالمقدر النقطي غير المنحاز معطى في (19.11)، وتباينه المقدر معطى في (19.12)، ويكون حدا ثقة شيفه (19.21) مناسبين مع:

$$S^2 = (b-1)F[1-\alpha; b-1, (n-1)ab] \quad (19.22)$$

وعندما يكون عدد المقارنات موضع الاهتمام صغيراً فقد تكون طريقة بونفيروني أفضل. وعندئذ نحتاج إلى تعديل حدي الثقة (19.21) بوضع مضاعف بونفيروني B :

$$B = t[1 - \alpha/2g; (n-1)ab] \quad (19.23)$$

بدلاً من S مضاعف شيفه، حيث g عدد العبارات في العائلة.

وعندما نرغب الحصول على معامل ثقة عائلي للمجموعة المشتركة من المقارنات العاملة فهناك عدة إمكانيات:

١- يمكن استخدام طريقة بونفيروني مباشرة، حيث يمثل g عدد العبارات الكلية في المجموعة المشتركة.

٢- يمكن استخدام طريقة بونفيروني للمجموعتين من مقارنات شيفه المتعددة، وذلك بالطريقة نفسها المشروحة آنفاً للمجموعتين توكي.

٣- يمكن تعديل طريقة شيفه فنستخدم المضاعف S المعروف بالعلاقة:

$$S^2 = (a+b-2)F[1-\alpha; a+b-2, (n-1)ab] \quad (19.24)$$

وعند استخدام هذا المضاعف S في المجموعتين كليهما من المقارنات المتعددة، فإن $(1-\alpha)$ يمثل احتمال أن تكون جميع العبارات في العائلة الموحدة عبارات صحيحة.

ويمكن أن نجرّب الأساليب الثلاثة هذه لنرى أيها يقود إلى فترات الثقة الأضيق، وذلك دون التأثير في مشروعية الطريقة.

تقديرات مبنية على متوسطات معالجات

عند تحليل تأثيرات العوامل في دراسات ثنائية العامل مع عدم وجود تفاعل، قد يهتم المحلل، من وقت لآخر، بمتوسطات معالجات μ_{ij} بعينها. وعلى سبيل المثال، في دراسات ثنائية العامل تتناول تأثيرات السعر ونوع الدعاية على المبيعات، قد نهتم بتقدير متوسط المبيعات لمستويين مختلفين للسعر وذلك عند استخدام دعاية معينة. وفي مثل هذه الحالات تكون طرق تحليل دراسات أحادية العامل التي ناقشناها في الفصل ١٥ مناسبة. وعدد المعالجات الآن هو، ببساطة، $r = ab$ وعدد درجات الحرية المصاحب لـ MSE هو $n_T - r = nab - ab = (n-1)ab$ ومتوسطات المعالجات المقترنة

هي \bar{y}_{ij} ، كل منها، على n من المشاهدات.

مثال ١ - مقارنات متشابهة لمجموعات مستويات عامل

في مثال شركة كاسل للمعجنات في الفصل ١٨، اقترح رسم المتوسطات المقطرة للمعالجات في الشكل (١٨-٥) عدم وجود تأثيرات تفاعل، وقد دعم تحليل التباين الرسمي المبني على الجدول (١٨-١) هذه النتيجة. لنفرض الآن أننا لم نقم بأية اختبارات حول التأثيرات الرئيسة للعوامل، وأننا نرغب في تحليل تأثيرات عرض الشرف وارتفاعه بواسطة طرق التقدير.

وسنقوم بالتحليل بدلالة متوسطات مستويات العامل باعتبار أنه لا توجد تأثيرات تفاعل. نرسم أولاً متوسطات مستويات العامل المقطرة المعطاة في الجدول (١٨-٧) في رسوم احتمال طبيعي. ويتضمن الشكل (١٩-٢) رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل A المقطرة وهي $\bar{y}_{i.}$ ، كما يتضمن الشكل (١٩-٢) ب رسماً مماثلاً لمتوسطات مستويات العامل B المقطرة وهي $\bar{y}_{.j}$ ، وهذه الرسومات معدة بالطريقة نفسها كذلك الموجودة في الشكل (١٥-٣) ب للدراسة أحادية العامل. ومرة أخرى، نبين في كل رسم خط: القيمة المتوقعة μ ، وهي تمثل القيم المتوقعة جميعها لو أن متوسطات مستويات العوامل كانت متساوية. ونحصل على القيم المتوقعة كما يلي:

$$\bar{y}_{i.} + z \left(\frac{i-375}{a+25} \right) \sqrt{\frac{MSE}{bn}} \quad \text{العامل A:}$$

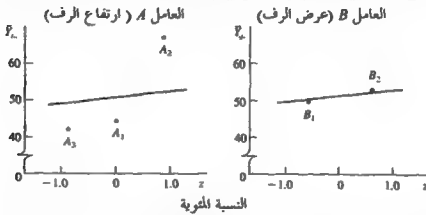
$$\bar{y}_{.j} + z \left(\frac{j-375}{b+25} \right) \sqrt{\frac{MSE}{an}} \quad \text{العامل B:}$$

ويقترح الشكل (١٩-٢) أن المستوى الثاني للعامل A (ارتفاع متوسط الشرف) يؤدي إلى مبيعات أكبر بصورة مهمة من المستويين الآخرين للعامل. ويشير الشكل (١٩-٢) ب. وهو من الطراز نفسه كالشكل (١٥-٢) أ، إلى عدم وجود تأثيرات لمستويات عرض الشرف.

وبالعودة الآن إلى طرق التقدير الرسمية فسنعلم الآن بمقارنات ثنائية بين متوسطات مستويات العامل وذلك لكل من العوامل المدروسة، وبمعامل ثقة عائلية

90% للمقارنات كافة. وسنستخدم طريقة توكي للمقارنات المتعددة بمعامل ثقة 95% للمقارنات المتعلقة بارتفاع الرف، وكذلك الأمر بالنسبة للمقارنات المتعلقة بعرض الرف. وتضمن متباينة بونفروني عندئذ معامل ثقة عائلي لا يقل عن 90% لمجموعة المقارنات كلها.

شكل (٢-١٩) رسوم احتمالات طبيعي للمتوسطات مسويات العامل المقترنة - مثال شركة كاسل للمحبيات



ولمقارنة متوسطات ارتفاع الرف $i=1$ يمثل الأدنى، $i=2$ يمثل الوسط، $i=3$ يمثل

الأعلى) نجد من الجدولين (٧-١٨) و (٨-١٨) ما يلي:

$$\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 = 67 - 44 = 23 \quad MSE = 10.3$$

$$a = 3$$

$$\bar{Y}_L - \bar{Y}_1 = 44 - 42 = 2 \quad b = 2$$

$$n = 2$$

$$\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3 = 67 - 42 = 25 \quad (n-1)ab = 6$$

وبالتالي نجد من (19.16):

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(10.3)}{2(2)} = 5.15$$

$$q(95; 3, 6) = 4.34$$

$$T = \frac{4.34}{\sqrt{2}} = 3.07$$

$$Ts\{\hat{D}\} = 3.07\sqrt{5.15} = 7.0$$

وبصورة مماثلة، نجد من أجل مقارنة متوسطات عرض الرف $(i=1)$ يمثل عادي،

$f = 2$ يمثل عريض) ما يلي مستخدمين (19,18):

$$\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 = 52 - 50 = 2$$

$$s^2(\hat{D}) = \frac{2(103)}{3(2)} = 3.43$$

$$q(.95; 2, 6) = 3.46$$

$$T = \frac{3.46}{\sqrt{2}} = 2.45$$

$$Ts(\hat{D}) = 2.45\sqrt{3.43} = 4.5$$

وبالتالي نحصل على فترات الثقة التالية لجميع المقارنات الثنائية لمتوسطات

مستويات عامل:

$$16 = 23 - 7.0 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 23 + 7.0 = 30$$

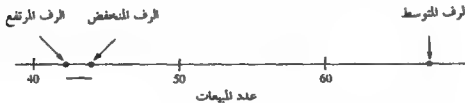
$$-5 = 2 - 7.0 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2 + 7.0 = 9$$

$$18 = 25 - 7.0 \leq \mu_2 - \mu_3 \leq 25 + 7.0 = 32$$

$$-2.5 = 2 - 4.5 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 2 + 4.5 = 6.5$$

ومعامل ثقة عاظمي 90 في المائة للمجموعة المشتركة من المقارنات يمكن أن

نستنتج من فترات الثقة هذه أن الرف متوسط الارتفاع أفضل بكثير من الارتفاعين العالي أو المنخفض، وذلك من أجل المنتج المدروس، وأنواع المعازن التي تناولتها التجربة، وأن الارتفاعين الآخرين، المنخفض والعالي، لا يختلفان بصورة مهمة في تأثيرهما على المبيعات. ومعامل الثقة العاظمي 90% يغطي هذ النتائج كافة. ويمكن تلخيص تأثير ارتفاع الرف بصورة بيانية كما يلي:



مثال ٢ - تقدير متوسطات معالجات

يتوفر حيز كاف، فقط، لرفوف متوسطة العرض في سوق مركزية مشابهة، من حيث الزبائن وحجم المبيعات، للأسواق المركزية التي شملتها دراسة "شركة كاسل للمحتمات"، ويرغب مدير هذه السوق في الحصول على تقديرات لمتوسط مبيعات كل من الرف متوسط الارتفاع والرف عالي الارتفاع. ونحصل على تقديري فترة

بمعامل ثقة عاظمي 90% مستخدمين طريقة بونفيروني.

لدينا من الجدولين (٧-١٨) و(٨-١٨)، ما يلي:

$$\bar{Y}_{21} = 65 \quad \bar{Y}_{31} = 40 \quad MSE = 10.3$$

ونحصل بالتالي على:

$$s^2\{\bar{Y}_{21}\} = s^2\{\bar{Y}_{31}\} = \frac{MSE}{n} = \frac{10.3}{2} = 5.15$$

$$s\{\bar{Y}_{21}\} = s\{\bar{Y}_{31}\} = 2.27$$

ومن أجل $g = 2$ ، نحتاج إلى $B = t(1 - \alpha/2g; (n-1)ab) = t(0.975; 6) = 2.447$ وهكذا نجد حدي الثقة:

$$65 \pm 2.447(2.27) \quad 40 \pm 2.447(2.27)$$

ونقرأ الثقة المطلوبتان هما:

$$59.4 \leq \mu_{21} \leq 70.6 \quad 34.4 \leq \mu_{31} \leq 45.6$$

(٣-١٩) تحليل تأثيرات العوامل عندما تكون التفاعلات مهمة

عند وجود تفاعلات مهمة لا يمكن جعلها غير مهمة عن طريق تحويل بسيط، فيجب أن يُبنى تحليل تأثيرات العوامل، بصورة عامة، على متوسطات المعالجات μ_{ij} . وبصورة تقليدية، سيتضمن هذا التحليل مقارنات متعددة أو اختبارات بدرجة واحدة من الحرية لمتوسطات المعالجات.

مقارنات ثنائية متعددة لمتوسطات المعالجات

إذا أردنا مقارنة أزواج من متوسطات المعالجات μ_{ij} ، فيمكن استخدام أي من طريقتي بونفيروني أو توكي للمقارنات المتعددة، ويعتمد هذا على الطريقة منهما الأكثر فائدة. وفي الواقع، يكافئ التحليل هنا التحليل في حالة عامل وحيد بعدد من المعالجات يساوي $r = ab$. ودرجات الحرية للمصاحبة لـ MSE هي هنا $nr - r = (n-1)ab$ ومتوسط المعالجة للقرنر، ونرمز له الآن بالرمز \bar{Y}_{ij} ، ينطوي على n من المشاهدات. وتصبح الصيغة (15.25) لطريقة توكي لمقارنات متعددة $\mu_{ij} - \mu_{kl} = D$ ، مع حجم متساوية

للعينات:

$$\hat{D} \pm Ts\{\hat{D}\} \quad i, j \neq i', j' \quad (19.25)$$

حيث:

$$\hat{D} = \bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i'j'} \quad (19.25a)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSE}{n} \quad (19.25b)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1 - \alpha; ab, (n-1)ab] \quad (19.25c)$$

وإذا استخدمنا طريقة بونفرونى يكون المضاعف B في فترة الثقة:

$$B = t[1 - \alpha/2g; (n-1)ab] \quad (19.26)$$

حيث g عدد المبارات في العائلة.

متضادات متعددة لموسطات المعالجات

يمكن، بصورة مباشرة، تطبيق طريقة شيفه لمقارنات متعددة في دراسات وحيدة العامل، وذلك لتقدير متضادات تتضمن متوسطات المعالجات μ_{ij} . ونرمز لهذه المتضادات كما يلي:

$$\sum \sum c_{ij} = 0 \quad \text{حيث:} \quad L = \sum \sum c_{ij} \mu_{ij} \quad (19.27)$$

والمقتر النقطة للمتضادة L هو:

$$\hat{L} = \sum \sum c_{ij} \bar{Y}_{ij} \quad (19.28)$$

والتباين المقتر لهذا المقتر هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{n} \sum \sum c_{ij}^2 \quad (19.29)$$

ومضاعف شيفه، S ، معطى بالعلاقة:

$$S^2 = (ab - 1)F[1 - \alpha; ab - 1, (n-1)ab] \quad (19.30)$$

والحدود المشتركة للثقة هي كالعادة:

$$\hat{L} \pm Ss\{\hat{L}\} \quad (19.31)$$

ومع عدد قليل من المتضادات، يمكن أن تكون طريقة بونفرونى أفضل. ويمكن

ببساطة تعديل فترتي الثقة (19.31) بوضع B ، كما عرفناها في (19.26)، بدلا من S .

اختبارات بدرجة واحدة من الحرية لموسطات معالجات

قد تكون اختبارات بدرجة واحدة من الحرية لموسطات معالجات μ_y مهمة أحيانا، عند وجود تفاعلات مهمة. والبدايل ثنائية الجانب لاختبار بدرجة واحدة من الحرية هي هنا كما يلي:

$$H_0: \sum \sum c_{ij} \mu_{ij} = c \quad (19.32)$$

$$H_a: \sum \sum c_{ij} \mu_{ij} \neq c$$

حيث c_{ij} و c ثوابت مناسبة.

ولاختبار البدايل (19.32) يمكن استخدام إحصاءة الاختبار t^* ، حيث:

$$t^* = \frac{\sum \sum c_{ij} \bar{y}_{ij} - c}{\sqrt{\frac{MSE}{\sum \sum c_{ij}^2}}} \quad (19.33)$$

وهي تتبع، عندما تكون H_0 صحيحة، التوزيع t بدرجات حرية عدتها $(n-1)ab$. وبصورة بديلة، يمكن استخدام إحصاءة الاختبار $F^* = (t^*)^2$ التي تتبع التوزيع F بدرجات من الحرية 1 و $(n-1)ab$ ، وذلك عندما تكون صحيحة H_0 .

وعند القيام بعدد من الاختبارات بدرجة واحدة من الحرية مع مستوى معنوية عائلي محدد، ينبغي استخدام طريقة مقارنات متعددة مناسبة (توكي، شيفه، بونفرونو) لتحديد فترات ثقة مناسبة. وستبين فترات الثقة أي البديلين (في بديل ثنائي الجانب) ينبغي أخذه في الاعتبار في كل حالة، وذلك وفقا لما شرحنا في الفصل ١٥ في حالة دراسات وحيدة العامل.

مثال ١- مقارنات ثنائية لموسطات المعالجات

قامت كلية متوسطة بدراسة تأثيرات طريقة التعليم (عامل A) والمقدرة الكمية للطالب (عامل B) على تعلم رياضيات الكلية. وقد دُرست طريقتان للتعليم - الطريقة المعتادة في التعليم (ونسسمها الطريقة القياسية)، والطريقة التي تؤكد على تعليم المفاهيم بصورة مجردة قبل المضي إلى المهارات التطبيقية (ونسسمها الطريقة المجردة). وُحددت المقدرة الكمية للطالب من خلال اختبار قابلية قياسي، صَنَّف الطالب على

أساسه إلى ممتاز أو جيد أو متوسط أو مقبول في قدرته الكمية. وهكذا يكون للعامل A في هذه الدراسة (طريقة التعليم) $a = 2$ من المستويات، وللعامل B (المقدرة الكمية للطلاب) $b = 3$ مستويات.

وقد اختير لكل من فئات المقدرة الكمية 42 طالباً وخصّصوا بصورة عشوائية إلى فصول دراسية وفقاً لطرق التعليم المحددة بحيث يتضمن كل فصل دراسي أعداداً متساوية من الطلاب من كل مستوى من مستويات المقدرة الكمية. وللتبسيط، افترض أن أية تأثيرات يمكن نسبتها إلى الفصول هي تأثيرات مهمة.

وكان المتغير التابع هو مقدار التعلّم من رياضيات الكلية مقاساً باختبار قياسي للتحصيل الرياضي. و نتائج الدراسة ملخصة في الجدول (١٩-١). (البيانات الأصلية غير معطاة) والمتوسطات المقدّرة للمعالجات مبيّنة في الجدول (١٩-٢)، وجدول تحليل التباين معطى في الجدول (١٩-٣).

ويتضمن الشكل (١٩-٣) رسمين للمتوسطات المقدّرة للمعالجات \bar{y}_{ij} . وفي الشكل (١٩-٣) يمثل المنحنيان المستويين المختلفين للعامل A ، وفي الشكل (١٩-٣) ب تمثل المنحنيات الثلاثة المستويات المختلفة للعامل B . ويقترح النقص الواضح في توازي المنحنيات وجود تأثيرات تفاعل بين طريقة التعليم والمقدرة الكمية للطلاب على حصيلّة التعلّم من الرياضيات. ويؤكد اختبار رسمي للتفاعل هذه النتيجة. فمن الجدول (١٩-١) ب، لدينا $F^* = MSAB / MSE = 325.5 / 28 = 11.625$ ومن أجل $\alpha = 0.01$ نحتاج إلى $F(99; 2, 120) = 4.79$ وبما أن $F^* = 11.625 > 4.79$ ، فنستنتج وجود تأثيرات تفاعل. والقيمة P لهذا الاختبار هي 0^+ .

ويقترح الشكل (١٩-٣) أن التفاعلات مهمة: الطلاب ذوو المقدرة الكمية المتأخرة لم يتأثروا إلا قليلاً بطريقة التعليم (ربما كان أدلّهم أفضل قليلاً في الطريقة المجردة)، والطلاب ذوو القدرات الكمية الجيدة أو المتوسطة تعلموا أفضل بكثير بطريقة التعليم القياسية. وبالتالي، فستحرى أولاً ما إذا كان يمكن لتحويل بسيط أن يجعل التفاعلات غير مهمة. ونقوم بذلك بطريقة تقريبية بتأمل بعض التحويلات لـ \bar{y}_{ij} .

ونقدّم في الشكل (٤-١٩) منحنيي طريقة التعليم من أجل $\sqrt{\bar{Y}_y} = \sqrt{\bar{Y}_y'}$ ، وفي الشكل (٤-١٩) ب نقدّم منحنيي طريقة التعليم من أجل $\log_{10} \bar{Y}_y$. ولم تصبح التفاعلات غير مهمة في أي من التحويلين، وهكذا يبدو أن التفاعلات هنا غير قابلة للتحويل.

جدول (١-١٩) نتائج دراسة تعلّم الرياضيات

أ) متوسطات درجات التعلّم			
المقدرة الكمية (١)			
طريقة التعليم	ممتاز	جيد	معتدل
مجرّدة	92($\bar{Y}_{11.}$)	81($\bar{Y}_{12.}$)	73($\bar{Y}_{13.}$)
قياسية	90($\bar{Y}_{21.}$)	86($\bar{Y}_{22.}$)	82($\bar{Y}_{23.}$)
ب) جدول التباين			
مصادر التفرّج	SS	df	MS
ما بين المعالجات	4,998	5	999.6
عامل A (طريقة التعلّم)	504	1	504
عامل B (المقدرة الكمية)	3,843	2	1,921.5
تفاعلات A B	651	2	325.5
الخطأ	3,360	120	28
المجموع	8,358	125	

ونعطي الآن إلى دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل في الشكل (٣-١٩) ونقوم بذلك من خلال تقدير مدى الفرق في متوسط التعلّم بالنسبة لطريقي التعليم وذلك بصورة منفصلة من أجل كل من فئات الطلاب ذوي المقدرة الكمية الممتازة والجيّدة والمعتدلة، وهكذا نرغب في تقدير:

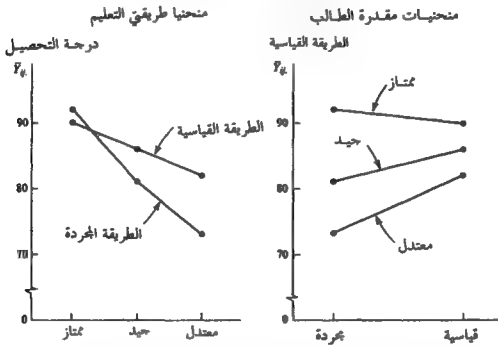
نماذج إحصائية عملية تطبيقية (٢٠٠٠)

$$D_1 = \mu_{11} - \mu_{21}$$

$$D_2 = \mu_{21} - \mu_{22} \quad (19.34)$$

$$D_3 = \mu_{13} - \mu_{23}$$

شكل (١٩-٣) رسوم المتوسطات للفترة للمعلمات - مثال تعلم الرياضيات.



وستستخدم طريقة المقارنات المتعددة لبونفروني. معامل ثقة عائلي 0.95.
 بما أن اهتمامنا يقتصر هنا على ثلاث مقارنات ثنائية، فقط، فإن طريقة بونفروني
 تنتج تقديرات أكثر دقة من طريقة توكي).

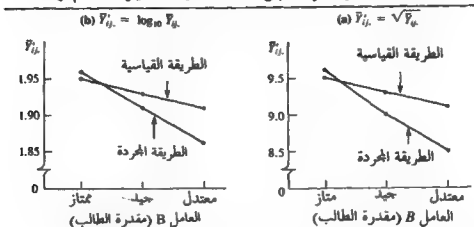
وباستخدام بيانات الجدول (١٩-١)، نجد التقديرات النقطية التالية للمقارنات الثنائية:

$$\hat{D}_1 = 92 - 90 = 2$$

$$\hat{D}_2 = 81 - 86 = -5 \quad (19.35)$$

$$\hat{D}_3 = 73 - 82 = -9$$

شكل (٤-١٩) رسوم منحني طريقي التعليم مع المتوسطات المقدرة بعد التحويل - مثال تعلم الرياضيات



وبما أن $n = 21$ ، فنحد من (19.25b) أن التباينات المقدرة لهذه التقديرات هي:

$$s^2(\hat{D}_1) = s^2(\hat{D}_2) = s^2(\hat{D}_3) = \frac{2(28)}{21} = 2.667$$

وبذلك يكون:

$$s(\hat{D}_1) = s(\hat{D}_2) = s(\hat{D}_3) = 1.633$$

وأعبراً، من أجل معامل ثقة عائلي $\alpha = 0.95$ و $g = 3$ ، نحتاج إلى

$$B = t[1-0.05/2(3); 120] = t(0.99167; 120) = 2.428$$

حدود الثقة:

$$2 \pm 2.428(1.633) \quad -5 \pm 2.428(1.633) \quad -9 \pm 2.428(1.633)$$

وال 95% فترات ثقة لعائلة المقارنات هي:

$$-1.96 \leq \mu_{11} - \mu_{21} \leq 5.96$$

$$-8.96 \leq \mu_{12} - \mu_{22} \leq -1.04$$

$$-12.96 \leq \mu_{13} - \mu_{23} \leq -5.04$$

ومن هذه العائلة يمكن أن نستخلص النتائج التالية، بمعامل ثقة

عائلي 95%: (١) من أجل الطلاب ذوي المقدرة الكمية الممتازة لا يختلف متوسطا

درجة التعلم لطريقي التعليم. (٢) من أجل كل من فئتي الطلاب ذوي المقدرة الكمية

الجيدة والمعتدلة يكون متوسط درجة التعلم البجدة أقل مما هو في الطريقة القياسية وقد

يكون تفوق طريقة التعليم القياسية أقوى في حالة الطلبة ذوي القدرات الكمية

للمتتلة.

مثال ٢ - متضادات متوسطات المعالجات

رغب مدير مدرسة في معرفة ما إذا كان مقدار الكسب في التحصيل في مثال تعلم الرياضيات المعائد لطريقة التعليم القياسية بالمقارنة مع الطريقة المجرىة أكر في حالة الطلاب ذوي المقدرة الكمية المتتلة منه في حالة الطلاب ذوي المقدرة الكمية الجيدة. وقد أثير هذا التساؤل قبل بدء الدراسة. وستقتر هنا المتضادة الوحيدة:

$$L = (\mu_{23} - \mu_{13}) - (\mu_{22} - \mu_{12}) \quad (19.36)$$

مستعملين حد الثقة الأدنى في فترة ثقة وحيدة الجانب، وباستخدام النتائج في الجدول (١٩-١) نجد أن التقدير التقطي للمقدار L هو $4 = (86 - 81) - (82 - 73) = \bar{L}$. ومن (19.29) نجد أن التباين المقتر هو:

$$s^2\{\bar{L}\} = \frac{28}{21}[(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2] = 5.333$$

أي أن الانحراف المعياري هو $s\{\bar{L}\} = 2.09$ ولعامل ثقة 95% نحتاج إلى $t(05;120) = -1.658$ وبالتالي يكون حد الثقة الأدنى $4 - 1.658(2.309) = 1.658$ وفترة الثقة المرغوبة هي:

$$L \geq 1.7$$

ونستنتج بالتالي، وبمعامل ثقة 95 بالمائة، أن الكسب في التعلم في طريقة التعليم القياسية فوق الطريقة المجرىة هو أكبر في حالة الطلاب ذوي المقدرة للمتتلة منه في حالة الطلاب ذوي المقدرة الجيدة، والفرق في الكسب هو في المتوسط 0.17 نقطة على الأقل.

(٩-٤) التحليل عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية

ذكرنا في الفصل ١٨ أنه عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية، ولا تكون صيغ التحاين المعتادة لاختبار تأثيرات العوامل صيغا مناسبة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل A و B وأتينا نحتاج بدلا من ذلك إلى استخدام أسلوب الاختبار الخطي العام.

وعلى أي حال، فلأغراض تقدير تأثيرات العوامل، لا تبرز تعقيدات إضافية عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية. ولاتزال صيغ الفقرة ٩-٣ الخاصة بمتضادات متوسطات المعالجات وبالاختبارات ذات الدرجة الواحدة من الحرية

قابلة للتطبيق في هذه الحالة.

ونوضح تحليل تأثيرات العوامل، عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية، بالعودة إلى مثال تعلم الرياضيات.

مثال

في مثال تعلم الرياضيات طلب مدير مدرسة معلومات عن طريقة التعليم التي تقود إلى تعلم أفضل لرياضيات الكلية عندما يكون لعشرين بالمائة من الطلاب في الفصل مقدرة كمية ممتازة، ولخمسعين بالمائة مقدرة جيدة، ولثلاثين بالمائة مقدرة معتدلة. ومتوسطا درجات التعلم في فصل مختلط كهذا هما، من أجل طريقتي التعليم، التركيبان المختطيان التاليان في متوسطات المعالجات:

$$L_1 = 2\mu_{11} + 5\mu_{12} + 3\mu_{13} \quad \text{طريقة مجردة:} \quad (19.37)$$

$$L_2 = 2\mu_{21} + 5\mu_{22} + 3\mu_{23} \quad \text{طريقة قياسية:}$$

ويفرض هذا أن متوسط درجات التعلم لطلاب ذوي قدرات مختلفة سوف لا يتأثر بوجود خليط في الفصل يختلف إلى حد ما عما افترض في الدراسة التجريبية. ويمكننا هنا تنفيذ اختبار بدرجة واحدة من الحرية من أجل تأثير طريقة التعليم أو استنباط تقدير بفترة، وسنقوم بهذا الأخير لأن قوة الثقة ستقدم معلومات ليس عن اتجاه أي فرق موجود بين طريقتي التعليم، فقط، ولكن، أيضا، عن مدى هذا الفرق.

والتقديرات النقطية للمتوسطات في (19.37) هي:

$$\hat{L}_1 = 2(92) + 5(81) + 3(73) = 80.8$$

$$\hat{L}_2 = 2(90) + 5(86) + 3(82) = 85.6$$

والفرق بين المتوسطون في (19.37) هو متضادة :

$$L = L_1 - L_2 \quad (19.38)$$

وتقدير هذه المتضادة هو:

$$\hat{L} = \hat{L}_1 - \hat{L}_2 = 80.8 - 85.6 = -4.8$$

والتباين المقدر للتقدير \hat{L} هو، باستعمال (19.29):

$$s^2(\hat{L}) = \frac{28}{21}[(2)^2 + (5)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (-5)^2 + (-3)^2] = 1.013$$

أي أن الانحراف المعياري المقتر هو $s\{\hat{L}\} = 1.006$. ومن أجل 95% معامل ثقة، نحتاج إلى $t(975; 120) = 1.980$. وبالتالي يكون حد الثقة $(-1.980(1.006) \pm 4.8$ - وفرة الثقة المرغوبة هي:

$$-6.79 \leq L \leq -2.81$$

ونستنتج بمعامل ثقة 95% أن طريقة التعليم القياسية هي الأفضل لهذا الخليط المحدد من الطلاب، وتقود إلى متوسط درجة تعلّم أكبر من متوسط درجة التعلّم بالطريقة المجرّدة بما لا يقل عن 2.8 نقطة وربما كان أكبر بـ 6.8 من النقاط.

ولو رغبتنا في اختبار رسمي لما إذا كان متوسط درجة التعلّم (L_2) في الفصل المختلط، كما حدده مدير المدرسة، الخاص بطريقة التعليم القياسية يتجاوز ذلك الخاص بالطريقة المجرّدة (L_1) أم لا، فستكون البدائل:

$$H_0: L_2 \leq L_1 \quad \text{أو} \quad H_a: L_1 - L_2 \geq 0$$

$$H_0: L_2 > L_1 \quad \text{أو} \quad H_a: L_1 - L_2 < 0$$

حيث L_1 و L_2 معرفان في (19.37). وبالنظر إلى الطبيعة وحيدة الجانب للبدائل، سنستخدم إحصاء الاختبار t^* في (19.33):

$$t^* = \frac{\hat{L} - 0}{s\{\hat{L}\}} = \frac{-4.8}{1.006} = -4.77$$

وبافتراض أن مستوى المعنوية هو $\alpha = 0.05$ نحتاج إلى 1658 - $t(0.05; 120)$ وتكون قاعدة القرار التالي:

$$\text{إذا كان } t^* \geq -1.658 \text{، فاستنتج } H_0$$

$$\text{وإذا كان } t^* < -1.658 \text{، فاستنتج } H_a$$

وبما أن $-4.77 < -1.658$ فاستنتج H_a ، أي أن متوسط درجة التعلّم للطريقة القياسية يتجاوز ذلك الخاص بالطريقة المجرّدة عندما يكون خليط الفصل بالشكل المحدد. والقيمة P - وحيدة الجانب لهذا الاختبار هي 0^+ .

(٩-٥) التحليل عندما يكون أحد العاملين أو كلاهما كميًا

عندما يكون أحد العاملين أو كلاهما كميًا في دراسة ثنائية العامل، فيمكن المضي في تحليل تأثيرات العوامل إلى ما وراء المقارنات المتعددة بحيث يتضمن دراسة لطبيعة

دالة الاستجابة. وبما أن الطرق المألوفة لتحليل الانحدار، والتي ناقشناها سابقاً، تقفز هنا إلى موقع الاعتبار، فسنناقش بإيجاز هذه التوسعة لتحليل الانحدار، ويمكن أن تكون الدراسة الابتدائية لتأثيرات العوامل بطرق المقارنات المتعددة مفيدة جداً في اختيار شكل دالي مناسب لعلاقة الانحدار.

تحليل دالة الاستجابة عندما يكون أحد العوامل كميًا

(نفترض هذه الفقرة أن الفصل العاشر قد دُرِس سابقاً)

لنعتبر تجربة يُدرس فيها تأثير نوع خليط الكمك (عامل A) ودرجة الحرارة (عامل B) على طراوة نسيج الكمكة مقاساً بصورة مناسبة. وقد دُرِس نوعان من خليط الكمك (H ، G) وأربع درجات حرارة (300° ، 315° ، 330° ، 345°). وقد يرغب المحلل في هذه الحالة بتوسعة دراسة تأثيرات العوامل لتتناول طبيعة دالة الاستجابة فيربط بين نسيج الكمكة ودرجة حرارة الفرن، وبما أن العامل A نوعي، فسنستخدم المتغيرات المؤشرة لتمثله في دالة الاستجابة. وإذا لم يكن نوع خليط الكمك ودرجة الحرارة متفاعلين فقد يكون النموذج التالي من المرتبة الأولى مناسباً:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \quad (19.39)$$

حيث:

$$X_{ijk1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الملاحظة وفق المستوى الأول للعامل } A \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

درجة حرارة الفرن لكل مشاهدة = X_{ijk2}

وترمز المقادير β للمعامل الانحدار، و X_{ijk1} ، X_{ijk2} هي القيم الموافقة للمتغيرين X_1 و X_2 ، على الترتيب، وذلك من أجل الملاحظة k أو التكرار k للمعالجة الموافقة للمستوى i من العامل A والمستوى j من العامل B .

ونعلم من الفصل ١٠ أن نموذج الانحدار (19.39) يتضمن علاقة خطية بين نسيج الكمكة ودرجة الحرارة، وبحيث يكون لها الميل نفسه من أجل كل من خليط الكمك ولكن بارتفاعين مختلفين. ويقدم الشكل (١٠-١) توضيحاً لهذا النموذج.

وإذا تفاعل خليط الكمك ودرجة الحرارة، فيمكن أن يكون النموذج المناسب:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \beta_3 X_{ijk1} X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \quad (19.40)$$

ونعلم من الفصل العاشر أن هذا النموذج يتضمن علاقة خطية بين نسيج الكمكة ودرجة الحرارة يحيلين مختلفين ومقطوعين مختلفين لنوعي خليط الكمك. ويقدم الشكل (١٠-٣) توضيحاً لهذا النموذج.

وإذا كانت علاقة الانحدار تربيعية ولا توجد تفاعلات بين العوامل، فقد يكون النموذج المناسب:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \beta_3 X_{ijk2}^2 + \varepsilon_{ijk} \quad (19.41)$$

حيث :

$$X_{ijk2} = X_{ijk2} - \bar{X}_2$$

تحليل دالة الاستجابة عندما يكون العاملان كلاهما كميّين

عندما يكون العاملان كلاهما كميّين ينطوي تحليل طبيعة دالة الاستجابة على انحدار متعدد عادي. وسنرمز للمتغيرين العاملين بـ X_1 و X_2 . وعندئذ يمكن أن يكون النموذج من المرتبة الأولى:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \quad (19.42)$$

حيث X_{ijk1} و X_{ijk2} قيمتا X_1 و X_2 ، على الترتيب، من أحمل الملاحظة k أو التكرار k للمعالجة الموافقة للعامل A في مستوى i والعامل B في مستوى j . والنموذج من المرتبة الثانية مع وجود تفاعلات يمكن أن يكون:

(19.43)

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \beta_3 X_{ijk2}^2 + \beta_4 X_{ijk2}^2 + \beta_5 X_{ijk1} X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk}$$

حيث:

$$X_{ijk1} = X_{ijk1} - \bar{X}_1$$

$$X_{ijk2} = X_{ijk2} - \bar{X}_2$$

ومناقشة سطوح الاستجابة في الفصل ٩ قابل هنا للتطبيق تماماً.

مثال (مأخوذ من المرجع 19.1). نُفذت دراسة لتحسين فعالية "مزبل الشَّقد" في آلة

لتمشيط نسيج صوفي. ويمكن تعديل البكرات في مزيج العقد بالنسبة لسرعتها أو للمسافات بينها. وقد استخدمت أربع مسافات وثلاث سرع في الدراسة كما هو مبين في الجدول (٢-١٩). وقد كُثرت كل معالجة أربع مرات، ولكن الجدول (٢-١٩) يقدم المتوسطات المقدرة للمعالجات، فقط. والمتغير الملحوظ هو قياس لفعالية التمشيط. ويقدم الشكل (٥-١٩) ربما متوسطات المعالجات.

وباستخدام حزمة حاسب تم الحصول على تحليل تباين لهذه الدراسة ثنائية العامل. والنتائج ملخصة في الجدول (٣-١٩)أ. ويستخدم اختبار التفاعلات إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{4.92}{1.32} = 3.73$$

جدول (٢-١٩) المتوسطات المقدرة للمعالجات في دراسة مزيج العقد ثنائية العامل، حيث العاملان
كميان (4 = m)

السرعة			المسافة الفاصلة .
500 rpm	400 rpm	300 rpm	
22.9	22.3	21.6	1.0 unit
21.6	19.1	18.7	1.2 units
19.4	17.9	15.8	1.4 units
19.5	16.7	13.2	1.6 units

المصدر : أحمد طبعها من كتاب *planning of Experiments* لـ D.R.cox : (New York :

John Wiley & Sons, 1958), P. 124 بعد الإذن بذلك.

ولمستوى معنوية $\alpha = .05$ ، نحتاج $F(95; 6, 36) = 2.36$ وبما أن $F^* = 3.73 > 2.36$ ، نستنتج أن المسافات والسرعة تتفاعل. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.0055.

وهكذا يقترح الشكل (٥-١٩) بالإضافة إلى التحليل أن نموذجاً من المرتبة الأولى مع إضافة تأثيرات تفاعل يمكن أن يكون مناسباً. ودالة الاستجابة لهذا النموذج هي:

$$E\{Y\} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 \quad (19.44)$$

حيث يمثل X_1 المسافة الفاصلة ويمثل X_2 السرعة. وقد تم توفير النموذج

باستخدام حزمة حاسب للاختبار المتعدد. والنتائج ملخصة في الجدول (٣-١٩) ب. وبما أن الدراسة تضمنت تكرارات، فيمكن القيام باختيار صلاحية دالة الاستجابة. ويمكن بسهولة الحصول على مجموع مربعات نقص التوفيق لأن SSE لنموذج التحاين هو نفسه $SSPE$ لنموذج الانحدار. وبالتالي نجد:

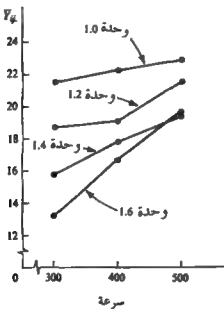
$$SSLF = \underbrace{SSE}_{\text{جدول 19.36}} - \underbrace{SSPE}_{\text{جدول 19.35}} = 57.29 - 47.61 = 9.68$$

شكل (٥-١٩) رسوم المتوسطات المقترنة للمعاجات مثال مُزِيل الطقد.

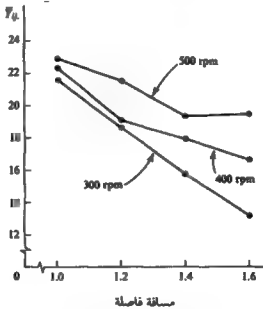
مُنحنِيات السَّيَّارات بين البكرات

مُنحنِيات سرعة البكرات

فعالية التمشيط



فعالية التمشيط



ويتضمن الجدول (٣-١٩) جـ التفكير الذي نحتاجه لاختبار نقص التوفيق،

فإحصاء الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSE} = \frac{121}{132} = 92$$

وبافتراض مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نحتاج إلى $F(95, 8, 36) = 2.21$. وبما أن $F^* = 92 > 2.21$

فستنتج أن دالة الاستجابة (19.44) مناسبة. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.51.

جدول (٣-١٩) جداول تحليل التباين للدراسة من أجل المقد			
أ - نموذج تحليل التباين			
مصدر التغير	SS	df	MSE
المسافة الفاصلة (A)	232.86	3	77.62
السرعة (B)	99.49	2	49.74
التفاعلات AB	29.53	6	4.92
الخطأ	47.61	36	1.32
المجموع	409.49	47	
ب - نموذج الانحدار			
$\hat{Y} = 45.09333 - 25.4545000X_1 - .03340X_2 + .03925X_1X_2$			
مصدر التغير	SS	df	MSE
الانحدار	352.20	3	117.40
الخطأ	57.29	44	1.30
المجموع	409.49	47	
ج - تباين اعتبار نقص التوفيق			
مصدر التغير	SS	df	MSE
الانحدار	352.20	3	117.40
الخطأ	57.29	44	1.30
نقص التوفيق	9.68	8	1.21
الخطأ البحت	47.61	36	1.32
المجموع	409.49	47	

لنلقِ نظرة أقرب على دالة الاستجابة المقترنة:

$$\hat{Y} = 45.0933 - 25.45000X_1 - .03340X_2 + .03925X_1X_2$$

فلاحظ أن y_2 موجب، وهذا يتضمن هنا (وتؤكد ذلك نظرية سريعة نلقبها على الشكل ١٩-٥) أن الفعالية تتناقص مع زيادة السرعة وذلك من أجل السرعة كافية (مثلا، إذا كان $X_2 = 300$ فإن $X_1 = 35.073 - 13.675X_2$)، إلا أن التناقص أقل في السرعة العالية. وبالمقابل، فإن الفعالية تزداد مع زيادة السرعة أما كانت المسافة الفاصلة (مثلا، إذا كان $X_1 = 1.0$ فإن $X_2 = 0.00585X_1 + 19.643$)، إلا أن الزيادة تكون أكبر في حالة المسافات الفاصلة الكبيرة.

(١٩-٦) تخطيط حجم العينات

نتناول تخطيط حجم العينات لدراسات ثنائية العامل، في الأساس، بالطريقة نفسها التي ناقشناها في الفصل ١٧ في حالة دراسات وحيدة العامل. وبالتالي فإننا نكتفي هنا بقليل من التعليقات الموجزة، فقط، ونعتبر أولا قوة الاختبارات F في دراسات ثنائية العامل، فالأسلوب الرئيس لتخطيط حجم العينات هو من خلال التحكم بقوة الاختبار.

قوة الاختبارات F

يمكن التعرف على قوة الاختبارات F للتفاعلات وللتأثيرات الرئيسة للعامل A والتأثيرات الرئيسة للعامل B بطريقة مماثلة لما رأيناه في حالة عامل بمفرده، وذلك باستخدام جدول بيرسون - هارنلي في الجدول أ-٨. ومعلمة اللامركزية هو درجات الحرية المناسبة لكل من هذه الحالات هي كما يلي:

$$(19.45a) \quad \text{اختبار التفاعلات}$$

$$\phi = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n \sum \sum (\alpha\beta)_i^2}{(a-1)(b-1)+1}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n \sum \sum (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})^2}{(a-1)(b-1)+1}}$$

$$v_1 = (a-1)(b-1) \quad v_2 = ab(n-1)$$

$$(19.45b) \quad \text{اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A}$$

$$\phi = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{nb \sum \alpha_i^2}{a}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{nb(\mu_{i.} - \mu_{..})^2}{a}}$$

$$v_1 = a-1 \quad v_2 = ab(n-1)$$

(19.45c) اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B

$$\phi = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{na \sum \beta_i^2}{b}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{na \sum (\mu_i - \mu_{..})^2}{b}}$$

$$v_1 = b - 1 \quad v_2 = ab(n - 1)$$

مثال. نرغب في إيجاد القوة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A (ارتفاع رف

للمروضات)، في مثال غيزر كاسل في الفصل ١٨، وذلك عندما يكون $\mu_1 = 50$ ، $\mu_2 = 55$ ، $\mu_3 = 45$ أو بما يكافئ ذلك، عندما يكون $\alpha_1 = 0$ ، $\alpha_2 = +5$ ، أو $\alpha_3 = -5$. افترض أننا

نعلم من خبرة سابقة أن $\sigma = 3$. ولدنا مما سبق لنا معرفته عن هذا الاختبار أن:

$$n = 2 \quad a = 3 \quad b = 2 \quad \alpha = .05$$

وبالتالي يكون:

$$\phi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(2)[(0)^2 + (5)^2 + (-5)^2]}{3}} = 2.7$$

ومن أجل $v_1 = 2$ ، $v_2 = 6$ ، $\alpha = .05$ و $\phi = 2.7$ نجد من الجدول أ-٨ أن القوة

هي حوالي 0.89. وهكذا، عندما يكون $\mu_1 = 50$ ، $\mu_2 = 55$ و $\mu_3 = 45$ و $\sigma = 3$ فإن

احتمال أن يكشف الاختبار F عن فروق في متوسطات ارتفاع رف للمروضات هو

حوالي 0.89.

أساليب التخطيط

يمكن تخطيط حجوم العينات للدراسات ثنائية العامل مستخدمين إما أسلوب

القوة أو أسلوب التقدير الذي ناقشناه في الفصل ١٧. وفي معظم الحالات نرغب في

حجوم عينات متساوية لكل معاملة.

وفي أسلوب القوة نهتم تقليدياً بكل من قوة كشف التأثيرات الرئيسة للعامل A

وقوة كشف التأثيرات الرئيسة للعامل B. ويمكن أن نحدد أولاً المدى الأقصى

لمتوسطات مستويات العامل الذي نرغب، في حدوده، كشف التأثيرات الرئيسة للعامل

A، ثم نحصل على حجوم العينات اللازمة من الجدول أ-١٠، حيث $\sigma = r$ ، وحجم

العينة الذي نحصل عليه هنا يمثل bm ، ومنه يمكن بسهولة حساب n . ويكون استخدام

الجدول أ-١. لهذه الغاية مناسباً شريطة أن لا يكون حجم العينة الناتج صغيراً ، وعلى وجه التحديد ، شريطة أن يكون $\alpha(bn - 1) \geq 20$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط، فينبغي استخدام جداول القوة لبيرسون وهارتلي المتوفرة في الجدول ٨.٨ وتتطلب هذه الجداول، كما ذكرنا سابقاً، طريقة تكرارية لتحديد أحجام العينات اللازمة.

وبالطريقة نفسها، عندئذ، يمكن تحديد المدى الأصغر لمتوسطات مستويات العامل B التي نرغب، في حدوده، كشف التأثيرات الرئيسة للعامل B ، ثم نحدد أحجام العينات التي نحتاجها. وإذا اختلفت أحجام العينات، التي حصلنا عليها من تحديد قوة العامل A وقوة العامل B اختلافاً كبيراً ، فسنحتاج إلى اتخاذ قرار تسوية للوصول إلى أحجام العينات اللازمة.

وبصورة بديلة، أو بالإضافة إلى أسلوب القوة، يمكن تحديد المتضادات المهمة المراد تقديرها، ثم إيجاد أحجام العينات التي يتوقع أن تزودنا بمستوى الدقة اللازم لمعامل الثقة العالي المرغوب. وكثيراً ما يكون هذا الأسلوب أكثر فائدة من أسلوب القوة، مع أنه يمكن استخدام الأسلوبين هذين كليهما معاً وصولاً إلى تحديد لحجوم العينات اللازمة.

وإذا كان الغرض من الدراسة العملية تحديد أفضل تركيب من التراكيب العاملة ab ، فيمكن استخدام الجدول أ-١١ لإيجاد أحجام العينات اللازمة، وذلك كما وصفناه في الفقرة ١٧-٣. ولهذه الغاية يكون $r = ab$.

مرجع ورد ذكره في النص

[19.1] Cox, D.R. *Planning of Experiments*. New York: John Wiley & Sons, 1958.

مسائل

(١٩-١) لماذا اقترح في جدول التفتق في الشكل (١٩-١) أنه ينبغي القيام باختبار التفاعلات قبل اختبارات التأثيرات الرئيسة للعوامل؟ اشرح
(١٩-٢) نُفذت دراسة ثنائية العامل فيها $n = 4$ ، $b = 5$ ، $a = 5$. ولم تُلاحظ تفاعلات بين العاملين A و B ، ويرغب المحلل في تقدير جميع المقارنات الثنائية بين

متوسطات مستويات العامل A وجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مستويات العامل B . ونريد معامل ثقة عائلي للمجموعة المشتركة من التقديرات بفترة يساوي 90 بالمائة.

أ - أيها أكثر فعالية استخدام طريقة بونفيروني للعائلة بأسرها أم استخدام طريقة توكي لكل عائلة من مقارنات متوسطات مستويات عامل ثم دمج العائلتين باستخدام طريقة بونفيروني؟

ب - هل سيختلف جوابك في حالة وجود ثلاثة مستويات لكل عامل، مع بقاء كل شيء آخر على حاله؟

(٣-١٩) نُفذت دراسة ثنائية العامل فيها $n = 10$ ، $b = 6$ ، $a = 6$ لم يوجد تفاعل بين العاملين A و B ، ونرغب الآن في تقدير خمس متضادات بين متوسطات مستويات العامل A وأربع متضادات بين متوسطات مستويات العامل B ، على أن يكون معامل الثقة العائلي للمجموعة المشتركة من التقديرات 95 بالمائة، أي الطرق الثلاث على الصفحة ستكون هنا الأكثر فعالية؟

(٤-١٩) بالإشارة إلى مثال غنيز كاسل على الصفحة حيث قمنا بمقارنات ثنائية عدة مستخدمين طريقة توكي، ثم ضُمت إلى بعضها بطريقة بونفيروني لإنتاج معامل ثقة عائلي 90 بالمائة للعائلة من المقارنات بأكملها، هل سيكون استخدام طريقة بونفيروني للعائلة من أربعة تقديرات بأكملها أكثر فعالية هنا؟ اشرح. هل ستكون طريقة شيفه (19.24) أكثر فعالية هنا؟

(٥-١٩) بالإشارة إلى مسائل العروض التقليدية (١٠-١٨) و (١١-١٨). فيما يلي بعض

النتائج الحسابية الإضافية:

	$\bar{Y}_{.j}$	j	$\bar{Y}_{i.}$	i
	23.94	1	21.50	1
$MSE = 2.389$	23.17	2	27.75	2
			21.42	3

لـ قدر μ_{11} مستخدما 95% فترة ثقة وفسر تقدير الفترة هنا.

- ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة لمستويات العامل B .
 ماذا يقترح هذا الرسم فيما يتعلق بتساوي متوسطات مستويات العامل B ؟
 جـ - قلّر $\mu_1 - \mu_2 = D$ مستخدماً 95% فترة ثقة. هل تسمح فترة الثقة هذه
 مع نتائج الاختبار في المسألة (١٨-١)؟ هل تسمح فترة الثقة مع
 ما وجدته في الفقرة ب؟ اشرح.
 د - جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة لمستويات العامل A .
 ماذا يقترح هذا الرسم حول التأثيرات الرئيسة للعامل A ؟
 هـ - احسب جميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مستويات العامل A ،
 واستخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. اعرض نتائجك
 بيانياً وقدم ملخصاً لها، هل تتفق نتائجك مع ما وجدته في د؟
 و - هل طريقة توكي المستخدمة في الجزء هـ الطريقة الأكثر فعالية التي يمكن
 استخدامها هنا؟ اشرح.
 ز - قلّر التضادة:

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \mu_2$$

- يـ - 95% فترة ثقة. فسّر تقدير الفترة هذا.
 ح - لنفرض أن 30% من مجتمع المالكات الإناث من الصبايا، و 60% من
 متوسطات العمر، و 10% من المسنات. أوجد 95% فترة ثقة لمتوسط
 العرض التقديري في مجتمع المالكات.
 (١٩-٦) بالإشارة إلى مسألتي تأثيرات النظر إلى العنسة (١٨-١٢) و (١٨-١٣)، فيما

يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

	$\bar{Y}_{.j}$	j	$\bar{Y}_{i.}$	i
	11.1	1	11.4	1
$MSE = 6.075$	15.0	2	14.7	2

أ - قلّر μ_{21} بـ 99% فترة ثقة وفسّر تقدير الفترة هذا.

- ب - قُدِّر μ_1 بـ 99% فترة ثقة وقدر تقدير الفترة هذا.
- ج - جهِّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل B المقترنة. ماذا يقترح هذا الرسم حول التأثيرات الرئيسة للعامل B ؟
- د - أوجد فترتي ثقة لـ μ_1 و μ_2 كلاهما ثقة 99% وفسر فترتي الثقة. ماهو معامل الثقة العائلي لمجموعة التقديرين معاً؟
- هـ - جهِّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقترنة لمستويات العامل A . ماذا يقترح هذا الرسم حول التأثيرات الرئيسة للعامل A ؟
- و - أوجد فترتي ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2 = D_1$ و $\mu_1 - \mu_2 = D_2$ استخدم طريقة بوتفروني ومعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. لخص نتائجك. هل تتفق نتائجك مع ما وجدته في الجزأين (جـ) و (هـ) ؟
- ز - هل طريقة بوتفروني المستخدمة في الجزء (و)، الطريقة الأكثر فعالية التي يمكن أن نستعملها هنا ؟ اشرح.
- (٧-١٩) بالإشارة إلى مسألتي الشفاء من حمى التَّلف (١٨-١٤) و (١٨-١٥)
- أ - قُدِّر μ_{21} بـ 95% فترة ثقة. فسر فترة الثقة هذه.
- ب - قُدِّر $\mu_{12} - \mu_{11} \approx D$ بـ 95% فترة ثقة. فسر فترة الثقة هذه.
- ج - قرر المحلل دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بين العوامل من خلال المتضادات التالية:

$$L_1 = \frac{\mu_{12} + \mu_{11}}{2} - \mu_{11} \quad L_4 = L_2 - L_1$$

$$L_2 = \frac{\mu_{22} + \mu_{21}}{2} - \mu_{21} \quad L_5 = L_3 - L_1$$

$$L_3 = \frac{\mu_{32} + \mu_{31}}{2} - \mu_{31} \quad L_6 = L_5 - L_2$$

- أوجد فترات الثقة لهذه المتضادات، استخدم طريقة شيفه للمقارنات المتعددة بمعامل ثقة عائلي 90%. فسر نتائجك.
- د - رغب المحلل، أيضاً، في تحديد المعالجة (المعالجات) التي تُنتج المتوسط الأطول لفترة عدم المعاناة من المرض. مستخدماً طريقة توكي بمعامل

ثقة عائلي 90% حدّد المعالجة (المعالجات) التي تؤدي إلى المتوسط الأطول لفترة عدم للماناة من المرض.

هـ - استخدم إحصاءة الاختبار (19.33) بدرجة واحدة من الحرية لاختبار بين البديلين التاليين:

$$H_0: \mu_{H2} - \mu_{H1} \leq \mu_{H3} - \mu_{H2}$$

$$H_a: \mu_{H2} - \mu_{H1} > \mu_{H3} - \mu_{H2}$$

اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$ ، اعرض قاعدة القرار والنتيجة.

و - افحص ما إذا كان تحويل البيانات يمكن أن يجعل التفاعلات غير مهمة، ارسم

بصورة منفصلة للمتوسطات المقترنة للمعالجات بعد التحويل وذلك من أجل

تحويلى المقلوب والجذر التربيعي وفي هيئة الشكل (١٩-٤) هل يمكن أن

يؤدي أي من هذين التحويلين إلى جعل تأثيرات التفاعل غير مهمة؟ اشرح.

(٨-١٩) بالإشارة إلى مسألتي خدمة مساق القرص (Disk Drive) (٦-١٨) و (١٧-١٨).

أ - قتر μ_{H1} بـ 99% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

ب - قتر $D = \mu_{H2} - \mu_{H1}$ بـ 99% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

جـ - نريد دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بالقيام، ومن أجل كل فني،

بالمقارنات الثنائية الثلاث جميعها بين أنواع مسابقات الأقراص كسي

نحدد، إذا أمكن، نوع المساق الذي يكون متوسط خدمة الفني من

أجله هو المتوسط الأقل. ونريد معامل الثقة العائلي لكل مجموعة من

ثلاث مقارنات مساويا لـ 95%. استخدم طريقة بونفيروني للقيام

بجميع المقارنات الثنائية المطلوبة. لخص نتائجك.

د - يقدم مركز الخدمة في الوقت الراهن خدماته أسبوعيا لثلاثين مساق

قرص من كل من الأنواع الثلاثة، بحيث يخدم كل فني عشر آلات من

كل نوع. قتر مقدار زمن الخدمة الكلي المتوقع الذي نحتاجه أسبوعيا

لخدمة مسابقات الأقراص التسعين استخدم 99% فترة ثقة.

هـ - كم من الزمن يمكن توفيره أسبوعيا، في المتوسط، إذا خصصنا الفني

الأول لخدمة النوع الثاني، فقط، والفني الثاني لخدمة النوع الأول، فقط، والفني الثالث لخدمة النوع الثالث، فقط؟ استخدم 99% فترة ثقة.

و - لفحص ما إذا كان يمكن لتحويل البيانات أن يجعل التفاعلات غير مهمة، ارسم بصورة منفصلة المتوسطات المقترنة للمعالجات بعد التحويل وذلك من أجل تحويل القلوب والتحويل اللوغاريتمي، وفي هيئة الشكل (١٩-٤). هل يمكن أن يؤدي أي من هذين التحويلين إلى جعل تأثيرات التفاعل غير مهمة؟ اشرح

(١٩-٩) بالإشارة إلى مسألتي معالجة القشل الكلوي في المستشفى (١٨-١٨)

و(١٨-١٩). استمر في العمل بالملاحظات المحوكة $Y' = \log_{10}(Y + 1)$.

أ - قتر μ_{22} بـ 95% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

ب - قتر $\mu_{21} - \mu_{22} = D$ بـ 95% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

ج - جهز بصورة منفصلة، رسوم احتمال طبيعي للمتوسطات المقترنة لمستويات العامل A والعامل B. ماذا تقترح هذه الرسوم حول التأثيرات الرئيسة للعامل؟

د - يرغب الباحث في دراسة التأثيرات الرئيسة لكل من العاملين من خلال القيام بجميع المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات العامل وبمعامل ثقة عائلي 90% لمجموعة المقارنات كافة. ما هي طريقة المقارنات المتعددة الأكثر فعالية هنا؟

هـ - مستخدماً طريقة يونفيروني قم بجميع المقارنات الثنائية المطلوبة في الجزء (د)، أعرض نتائجك وقم بإعداد ملخص بياني. هل تتفق نتائجك مع تلك التي وصلت إليها في (ج)؟

و - من المعروف من تجربة سابقة أن 30% من المرضى لديهم زيادة طفيفة في الوزن، و40% لديهم زيادة معتدلة في الوزن، و30% من المرضى لديهم زيادة حادة في الوزن، وأن هذه النسب تبقى نفسها في فتي الإقامة. قتر متوسط عدد أيام الإقامة في المستشفى (بالوحدات المحولة)

وذلك في المجتمع بكامله مستخدماً 95% فترة ثقة. ردّ حدي الثقة إلى الوحدات الأصلية. هل يبدو أن متوسط عدد الأيام أقل من 7 ؟
(١٠-١٩) بالإشارة إلى مسائلتي مطلبيات المبرمج (١٠-١٨) و (٢١-١٨).
أ - قتر μ_{22} - 99% فترة ثقة، وفسر فترة الثقة هذه .

ب - قتر $\mu_{22} - \mu_{23} = D$ - 99% فترة ثقة، وفسر فترة الثقة هذه.

ج - مراد دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بمقارنة تأثير نوع الحفرة لكل من سنتي سنوات الحفرة. وعلى وجه التحديد مراد تقدير المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_{11} - \mu_{21} \quad L_1 = D_1 - D_2$$

$$D_2 = \mu_{12} - \mu_{22} \quad L_2 = D_1 - D_3$$

$$D_3 = \mu_{13} - \mu_{23} \quad L_3 = D_2 - D_3$$

و مراد لمعامل الثقة العائلي أن يكون 95 بالمائة. ساهي طريقة المقارنات المتعددة الأكثر فعالية هنا ؟

د - استعمل الطريقة الأكثر فعالية لتقدير المقارنات المحددة في الجزء (ج).
أعرض نتائجك.

هـ - استعمل طريقة توكي لمعامل ثقة عائلي 95% لتحديد نوع سنوات الحفرة في فة (أو فئات) الحفرة ذات المتوسط الأصغر لأخطاء التنبؤ.

و - أوجد، لكل من الفئات المحددة في الجزء (هـ)، فترة ثقة لمتوسط خطأ

التنبؤ. استعمل طريقة بونفرونو لمعامل ثقة عائلي 95%. هل تمتلك

أية فة متوسط خطأ تنبؤ يمكن أن يكون صفراً ؟ اشرح.

ز - استعمل إحصاء الاختبار بدرجة واحدة من الحرية (19.33) للاختبار بين البديلين:

$$H_0: \frac{\mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}}{3} \leq 40$$

$$H_a: \frac{\mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}}{3} > 40$$

اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$. أعرض قاعدة القرار والنتيجة.

حـ - لفحص ما إذا كان يمكن لتحويل البيانات أن يجعل التضاعلات غير مهمة، ارسم بصورة منفصلة المتوسطات المقترنة للمعالجات بعد التحويل، وذلك من أجل تحويل القلوب والتحويل اللوغاريتمي، وفي هيئة الشكل (٤-١٩). هل يمكن لأي من هذين التحويلين أن يجعل تأثيرات التضاعل غير مهمة؟ اشرح.

(١١-١٩) بالإشارة إلى مسألة تفصيل الصنف (٨-٧). نفترض أن باحث التسويق قد رغب أولاً في استخدام نموذج تحليل التباين (18.23) لتحديد ما إذا كان عتري الرطوبة (عامل A) والحلاوة (عامل B) يؤثر في درجة الإقبال على الصنف. أ - اعرض نموذج تحليل التباين لهذه الحالة.
ب - اكتب جدول تحليل التباين.

جـ - اختر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

د - ادرس إمكانية انحناء في تأثير عتري الرطوبة بتقدير المقارنة التالية:

$$L = (\mu_4 - \mu_2) - (\mu_3 - \mu_1)$$

استخدم 95% قوة ثقة. ماذا تستنتج؟

هـ - اختبر ما إذا كان للحلاوة أثرها في الإقبال على الصنف؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

(١٢-١٩) بالإشارة إلى مسألة العروض النقدية (١٨-١٠). كان متوسط أعمار "المالكين" في ذات الأعمار الثلاث كما يلي:

24.8 :	فَقِي
45.3 :	متوسط العمر
66.7 :	مسن

وبما أن الأعمار الفعلية للمالكين في كل فئة عمرية، وللتحسين كليهما، كانت قريبة من متوسط العمر، فيمكن استخدام كل متوسط عمر ليمثل الأعمار للمالكين في تلك الفئة.

أ - قم بتوفيق نموذج الانحدار:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 x_{ijk1} + \beta_2 x_{ijk1}^2 + \beta_3 x_{ijk2} + \varepsilon_{ijk}$$

حيث $x_{ijk1} = X_{ijk1} - \bar{X}_1$ و $x_{ijk2} = 1$ إذا كان المالك ذكراً وصغيراً إذا كان المالك أنثى.

ب - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يبين رسمك؟

ج - قم باختبار رسمي لنقص التوفيق مستخدماً مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

د - اختبر ما إذا كان يمكن حذف الحد التربيعي في نموذج الانحدار في

الجزء (أ) أم لا، استعمل $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

(١٣-١٩) بالإشارة إلى مسألة الشفاء من حمى الملطف (١٨-١٤). يرغب الباحث

الآن في دراسة طبيعة العلاقة بين مقدار المنصرين النشيطين ودعمه

الشفاء. وكانت مقادير المنصرين المستخدمين في الدراسة كما يلي:

الكمية (بالليتر/الغرام)، مستوى العامل، المنصر 1، المنصر 2،،،

الكمية (بالليتر/الغرام)		
X_2	X_1	مستوى العامل
(المنصر 2)	(المنصر 1)	
7.5	5.0	منخفض
10.0	10.0	متوسط
12.5	15.0	عال

أ - قم بتوفيق نموذج الانحدار (19.43).

ب - قدر متوسط ديمومة الشفاء عندما يكون $X_1 = 8.75$ و $X_2 = 7.50$ ؛

استخدم 95% فترة ثقة. هل يمكن الحصول على هذا التقدير من

تحليل التباين؟ اشرح.

ج - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يبين رسمك؟

د - قم باختبار رسمي لنقص التوفيق، استخدم $\alpha = 0.005$. اعرض البدائل

وقاعدة القرار والنتيجة.

هـ - اختر ما إذا يمكن حذف حدّي التفاعل من النموذج أم لا، استعمل $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة .

(١٤-١٩) في دراسة ذات عاملين كان للعامل A أربعة مستويات وللعامل B ثلاثة مستويات، و $n = 6$. وقد جرى اختباران منفصلان للتأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B، بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ لكل منهما. ويرغب الباحث الآن في تحري قوة الاختبارين. افترض $\sigma = 20$ ؟

أ - ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A عندما يكون

$$? \alpha_1 = 0 \text{ و } \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 7, \alpha_4 = 10$$

ب - ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B عندما يكون

$$? \beta_1 = -4 \text{ و } \beta_2 = 8, \beta_3 = 4$$

(١٥-١٩) بالإشارة إلى مسألتي العروض التقليدية (١٠-١٨) و (١١-١٨). افترض أن $\sigma = 2.0$.

أ - ما هي قوة الاختبار لتأثيرات التفاعل في المسألة ١١-١٨ إذا كان :

$$(\alpha\beta)_{11} = -2, (\alpha\beta)_{12} = -2, (\alpha\beta)_{21} = -8,$$

$$(\alpha\beta)_{22} = 8, (\alpha\beta)_{31} = 1.0, (\alpha\beta)_{32} = -1.0.$$

ب - ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A في المسألة (١١-١٨) إذا كان

$$? \mu_1 = 23 \text{ و } \mu_2 = 25, \mu_3 = 21$$

جـ - ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B في المسألة (١١-١٨) إذا كان :

$$? \mu_1 = 24 \text{ و } \mu_2 = 20 \text{ ؟ إرشاد : استعمل الجدول أ-٥}$$

(١٦-١٩) بالإشارة إلى مسألتي الشفاء من حمى العلف (١٤-١٨) و (١٥-١٨). افترض أن $\sigma = 28$.

أ - ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A في المسألة (١٥-١٨) إذا كان

$$? \mu_1 = 6.6, \mu_2 = 7.0, \mu_3 = 7.4$$

ب - كيف تتأثر قوة الاختبار في الجزء (أ) إذا كان $\mu_2 = 7.3$ وكل شيء

آخر بقي على حاله؟

جـ- ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسية للعامل B في المسألة (١٨-١٥) إذا

كان: $\beta_1 = -2.5$, $\beta_2 = 2.5$, و $\beta_3 = 5.0$ ؟

(١٧-١٩) بالإشارة إلى مسألتي متطلبات المبرمج (١٨-٢٠) و (١٨-٢١). أوجد قوة

الاختبار للتأثيرات الرئيسية للعامل B في المسألة (١٨-٢١) إذا كان

$\beta_1 = 15$, $\beta_2 = -5$ و $\beta_3 = -10$ افترض أن $\sigma = 9.0$.

(١٨-١٩) يخطط مدير أبحاث تسويق لدراسة ديمومة دعاية (عامل A) ومستوى السعر

(B) على المبيعات. ولكل عامل ثلاثة مستويات. ولا يتوقع وجود أية

تفاعلات، ويريد للتحليل الأولي أن يتألف من مقارنات ثنائية لمتوسطات

مستويات عامل وذلك من أجل كل من العاملين. وستستخدم عينات من

الحجم نفسه لكل معالجة. ويُراد لدقة كل مقارنة أن تكون في حدود \pm

3000 دولار، ولعامل الثقة المعالي للمجموعة المشتركة من المقارنات أن

تكون 90 بالمائة، مع استخدام طريقة توكي للقيام بالمقارنات لكل عامل،

ثم استخدام طريقة بونفرونوني بعد ذلك لاعتبار المجموعتين من المقارنات

معاً. افترض أن $\sigma = \$7000$ تشكل قيمة تخطيطية معقولة للانحراف

المباري للمعطى. ماهو حجم العينة الذي توصي به؟

(١٩-١٩) بالإشارة إلى مسألة العروض التقلبية (١٨-١٠). لنفرض أن أحصم

العينات لم تُحدد بعد، ولكن تقرر استخدام العدد نفسه من المالكين في

كل فئة عمرية للمحسنين. ماهي أحصم العينات المطلوبة إذا كنا نريد: (١)

كشف فروق في متوسطات عامل العمر باحتمال 0.90 أو أكثر، وذلك

عندما يكون المدى في متوسطات مستويات العامل ثلاثمائة دولار، و (٢)

ضبط المخاطرة α عند 0.05؟ افترض أن القيمة التخطيطية المعقولة

للالانحراف للمباري للمعطى هي $\sigma = \$150$.

(٢٠-١٩) بالإشارة إلى مسألة النظر إلى العدمية (١٨-١٢). لنفرض أن أحصم

العينات لم تُحدد بعد، ولكن تقرر استخدام أحصم عينات متساوية لكل

معالجة. والاهتمام الأولي هو في المقارنتين $D_1 = \mu_1 - \mu_2$ و $D_2 = \mu_1 - \mu_2$

ما هي أحصم العينات المطلوبة إذا أردنا تقدير كل من هاتين المقارنتين

بدقة لا تتجاوز ± 1.2 ويعامل ثقة عاظمي 95 بالمائة، مستخدمين الطريقة الأكثر فعالية للمقارنات المتعددة؟ افترض أن $\sigma = 2.4$ هي قيمة تخطيطية معقولة للانحراف المعياري للخطأ.

(٢١-١٩) بالإشارة إلى مسألة الشفاء من حمى العلف (١٨-١٤). افترض أن أحجام العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر استخدام أحجام العينات نفسها لكل معالجة. والمهدف الرئيس هو تحديد مركب الجرعة الذي يؤدي إلى أطول فترة شفاء ممكنة. وينبغي أن يكون الاحتمال هو 0.99 على الأقل بأنه يمكن تحديد مركب الجرعة الصحيح وذلك عندما يختلف متوسط ديمومة الشفاء لمركب الجرعة الثاني من حيث فائدته بنصف ساعة أو أكثر. ما هي أحجام العينات المطلوبة؟ افترض أن $\sigma = 29$ ساعة هي قيمة تخطيطية معقولة للانحراف المعياري للخطأ.

(٢٢-١٩) بالإشارة إلى مسألة معالجة الفشل الكلوي في المستشفى (١٨-١٨). لنفترض أن أحجام العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر استخدام أحجام عينات متساوية لكل معالجة. والمهدف الرئيس هو تقدير المقارنات الثنائية:

$$\begin{array}{ll} D_1 = \mu_1 - \mu_2 & D_3 = \mu_1 - \mu_3 \\ D_2 = \mu_1 - \mu_3 & D_4 = \mu_2 - \mu_3 \end{array}$$

ماهي أحجام العينات المطلوبة إذا كان ينبغي لدقة كل من التقديرات أن لا تتجاوز ± 20 (بالحلقات بعد التحويل)، مستخدمين طريقة بوتقرونو. معامل ثقة عاظمي 90 بالمائة للمجموعة المشتركة من المقارنات؟ والقيمة التخطيطية للمعقولة للانحراف المعياري للخطأ هي $\sigma = 0.32$ (بالحلقات بعد التحويل).

(٢٣-١٩) بالإشارة إلى مسألة متطلبات المبرمج (١٨-٢٠). لنفترض أن أحجام العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر استخدام أحجام عينات متساوية لكل معالجة. والاهتمام الأولي هو في تحديد نوع سنوات الخبرة من مركب الخبرة الذي يكون متوسط خطأ التنبؤ من أجله هو المتوسط الأصغر. وينبغي أن لا يقل الاحتمال عن 0.95 بأن المركب الصحيح قد جرى تحديده عندما يكون متوسط خطأ التنبؤ الثاني من حيث الجودة مختلفاً

بشماتية أهام - مومج أو أكثر. افترض أن $\sigma = 9.1$ يوما هي قيمة تخطيطية معقولة لحطأ التنبؤ. ماهي أحجوم العينات المطلوبة؟

تقارين

(٢٤-١٩) بين أن المقدّر النقطي (19.11) غير منحاز. أوجد تباين هذا المقدّر.

(٢٥-١٩) أوجد تباين المقدّر (19.28).

(٢٦-١٩) اعتبر دراسة ثنائية العوامل مع $a = 2$, $b = 2$. استخدم (18.8b) لاستنباط

متضادة لكل من التفاعلين $(\alpha\beta)_{12}$ و $(\alpha\beta)_{21}$. استخدم (6.20) لتبيان أن المتضادتين غير مستقلتين خطيا.

مشاريع

(٢٧-١٩) بالإشارة إلى مجموعة البيانات *SENIC* والمشروعين (٣٦-١٨) و (٣٧-١٨).

أ - جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة \bar{y}_i لمستويات العامل. ماذا يقترح هذا الرسم فيما يتعلق بالتأثيرات الرئيسة للمنطقة؟

ب - حلل أثر المنطقة على متوسط طول الإقامة في المستشفى عن طريق القيام بجميع المقارنات التالية بين المناطق، استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عاظمي 0.90. اعرض نتائجك وقدم ملخصا بيانيا. هل تتفق نتائجك مع ما وجدته في الجزء (أ)؟

(٢٨-١٩) بالإشارة إلى مجموعة البيانات *SMSA* والمشروعين (٣٨-١٨) و (٣٩-١٨).

أ - جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة \bar{y}_i لمستويات العامل. ماذا يقترح هذا الرسم فيما يتعلق بالتأثيرات الرئيسة للمنطقة؟

ب - حلل تأثير المنطقة على معدل الجريمة عن طريق القيام بجميع المقارنات التالية بين المناطق، مستخدما طريقة توكي مع معامل ثقة عاظمي 95 بالمائة. اعرض نتائجك وقدم ملخصا بيانيا. هل تتفق نتائجك مع ما وجدته في الجزء (أ)؟

حجوم عينات غير متساوية في دراسات ثنائية العامل

في مناقشتنا للدراسات ثنائية العامل اقتصرنا حتى الآن على حالة حجوم عينات متساوية لنموذج ثمانين العاملين (18.23). وفي هذا الفصل سنتابع طرقاً تتناول حالات لا تتساوى فيها حجوم عينات المعالجات. ونستمر في افتراض أن لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها.

(٢٠-١) حجوم عينات غير متساوية

اختلاف حجوم العينات باختلاف المعالجات أمر شائع في بيانات المشاهدة. فعلى سبيل المثال، رغب محلل أبحاث تسويق في دراسة تأثيرات درجة الحرارة وهطول الأمطار والتلوج على مبيعات سلعة، وذلك من بيانات من أكبر ثلاثين من المساحات الحضرية في الولايات المتحدة. وفي هذا النوع من الحالات التي لا يمكن التحكم فيها، سيكون من غير المحتمل أن تتضمن كل فئة من فئات درجة الحرارة - معدل هطول المطر أو الثلج، العدد نفسه من المدن.

ويمكن أن نواجه، أيضاً، حجوم عينات غير متساوية في دراسات تجريبية. وعلى سبيل المثال، يمكن أن يهدف المحرّب لتأمين العدد نفسه من المشاهدات لكل معالجة، ولكن، ولأسباب مختلفة (مثلاً، مرض عنصر من العناصر الخاضعة للتجربة، سجلات غير مستكملة، مشاكل تقنية) ينتهي بحجوم عينات غير متساوية. وبالإضافة إلى ذلك، فإن بعض التجارب المصممة تتطلب درجة دقة لمقارنة بين المعالجات تختلف من مقارنة إلى أخرى، وبالتالي تُحدّد حجوم للعينات غير متساوية عند تصميم التجربة.

وفي مناقشتنا لحجوم عينات غير متساوية في الفقرتين ٢٠-٢ و ٢٠-٣، سنفترض وجود مشاهدة واحدة على الأقل من أجل كل معالجة. وسنستقي عن هذا القيد في الفقرة ٢٠-٤.

رموز

تبقى الرموز كما كانت من قبل باستثناء أن حجم العينة للمعالجة المولفة من المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B سنرمز لها الآن بالرمز n_{ij} . والعدد الكلي من المشاهدات عند المستوى i للعامل A سنرمز له بالرمز :

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij} \quad (20.1a)$$

وعند المستوى j للعامل B بالرمز :

$$n_{.j} = \sum_i n_{ij} \quad (20.1b)$$

ومن أجل الدراسة بكاملها بالرمز :

$$n_{..} = \sum_i \sum_j n_{ij} \quad (20.1c)$$

وكالمعتاد، نعرف المتوسط المقدّر للمعالجة عندما يكون العامل A في المستوى i والعامل B في المستوى j كمايلي:

$$\bar{Y}_{ij} = \frac{Y_{ij}}{n_{ij}} \quad (20.2)$$

حيث:

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk} \quad (20.2a)$$

(٢٠-٢) استخدام أسلوب الانحدار لاختبار تأثيرات العوامل عندما تكون أحجام العينات غير متساوية

عندما تكون أحجام العينات غير متساوية يصبح تحليل التباين لدراسات ذات عاملين أكثر تعقيدا. ولاتصور معادلات المربعات الدنيا ذات بنية بسيطة تؤدي إلى حلول سهلة ومباشرة، وتصبح صيغ تحليل التباين النظامي في (18.38) و(18.39) غير مناسبة الآن. فضلا عن ذلك، فإن مجاميع مربعات المركبات الخاصة بتأثيرات العوامل

تفقد خاصية التعمد - أي أنها لا تجمع إلى *SSTR*.

والطريقة الميسرة للحصول على مجاميع المربعات اللازمة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل وتأثيرات التفاعلات بينها هي من خلال أسلوب الانحدار الموصوف في الفقرة ١٨-٨. والفرق الوحيد، عندما لا تكون حجوم العينات متساوية، هو الحاجة إلى توفيق نموذج مخفض جديد لكل اختبار يتعلق بالتأثيرات الرئيسة للعوامل أو بالتفاعلات. وبما أن المسألة لا تنطوي على أية مبادئ جديدة، فسنمضي مباشرة إلى مثال يوضح كيفية إجراء اختبارات نحسين باستخدام أسلوب الانحدار وذلك عندما تكون حجوم العينات غير متساوية.

مثال

أعطي هرمون النمو البشري في مركز أبحاث طبي إلى أطفال يقصر دون البلوغ ويعانون من عَوَز هرمون النمو، وكان الباحث مهتما بتأثير الجنس (عامل *A*)، وتطور العظم (عامل *B*) على معدل النمو الناشئ عن إعطاء الهرمون. وقد صُنِّف تطور عظم الطفل إلى ثلاثة أصناف - قصور شديد، قصور معتدل، قصور طفيف. وقد اختير ثلاثة أطفال عشوائيا من كل فئة من فئات الجنس - تطور العظم. وكان المتغير التابع (*Y*) هو الفرق بين معدل النمو خلال فترة المعالجة بهرمون النمو ومعدل النمو الطبيعي السابق للمعالجة، مقاسا بالاستمرار للشهر الواحد. ولم يستطع أربعة من الأطفال الثمانية عشر استكمال فترة الدراسة التي امتدت لعام كامل، مما سبب حجوم عينات غير متساوية.

ويقدم الجدول (١-٢٠) بيانات هذه الدراسة. ويبين الشكل (١-٢٠) رسوم المتوسطات المقترنة للمعالجات. وتقترح الرسوم في الشكل (١-٢٠)، بوضوح، أن لتطور العظم وقعا مهما على التغير في معدل النمو. وتثير الرسوم التساؤل عما إذا كان هناك بعض من تأثيرات التفاعل، وعما إذا كان لجنس الطفل تأثير في معدل النمو. ولكي نختبر رسميا وجود تأثيرات العوامل هذه، نستخدم أسلوب الانحدار لأن حجوم العينات غير متساوية.

تطوير نموذج المحلار. نموذج التحاين (18.23) لعاملين هو كالتالي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \quad (20.3)$$

وللتعبير عن هذا النموذج بدلالة الانحدار، نستخدم المتغيرات المؤشرة التي تأخذ القيم

1، -1 أو 0 كما شرحناها في الفقرة ١٨-٨، وعلى وجه التحديد، سنحتاج هنا إلى

$1 = 2 - 1 = 1$ متغير مؤشر من أجل التأثيرات الرئيسة للعامل A و $1 = 3 - 1 = 2$ و

متغيرا مؤشرا من أجل التأثيرات الرئيسة للعامل B . ويقابل حدود التفاعل جداءات

المتغيرات المؤشرة للتأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B . وعلى وجه التحديد فإن

نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التحاين (20.3) هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \underbrace{\alpha_1 X_{ijk1}}_{\text{تأثير رئيسي العامل A}} + \underbrace{\beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3}}_{\text{تأثير رئيسي العامل B}} + \underbrace{(\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3}}_{\text{تأثير AB، AB، AB}} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.4) \text{ نموذج تام}$$

حيث:

$$X_{ijk1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل A} \\ -1 & \text{إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل A} \end{cases}$$

$$X_{ijk2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل B} \\ -1 & \text{إذا كانت الملاحظة من المستوى 3 للعامل B} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ijk3} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل B} \\ -1 & \text{إذا كانت الملاحظة من المستوى 3 للعامل B} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ومعاملات الانحدار في (20.4) هي معالم نموذج التحاين:

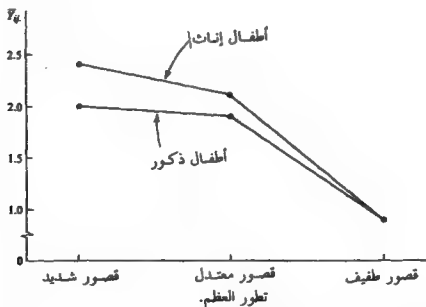
$$\begin{aligned} \mu_{..} &= \mu_{..} \\ \alpha_1 &= \mu_{1.} - \mu_{..} \\ \beta_1 &= \mu_{.1} - \mu_{..} \\ \beta_2 &= \mu_{.2} - \mu_{..} \\ (\alpha\beta)_{11} &= \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{.1} + \mu_{..} \\ (\alpha\beta)_{12} &= \mu_{12} - \mu_{.1} - \mu_{.2} + \mu_{..} \end{aligned} \quad (20.5)$$

جدول (١٠-١) بيانات عينة ورموز لثال هرمون النمو (الفرق في معدل النمو مقاس بالاستيعاب للشهر الواحد)

الجنس	تطور العظام (عامل B)		
	i		
(عامل A)	قصور شديد (B_1)	قصور معتدل (B_2)	قصور طفيف (B_3)
ذكر (A_1)	1.4(Y_{111})	2.1(Y_{121})	.7(Y_{131})
	2.4(Y_{112})	1.7(Y_{122})	1.1(Y_{132})
	2.2(Y_{113})		
أنثى (A_2)	2.0(\bar{Y}_{11})	.9(\bar{Y}_{12})	.9(\bar{Y}_{13})
	2.4(Y_{211})	2.5(Y_{221})	.5(Y_{231})
		1.8(Y_{222})	.9(Y_{232})
متوسط		2.0(Y_{223})	1.3(Y_{233})
	2.4(\bar{Y}_{21})	2.1(\bar{Y}_{22})	.9(\bar{Y}_{23})

شكل (١٠-٢) رسوم المتوسطات المقترنة للمعالمات - مثال هرمون النمو.

التغير في معدل النمو



وما تبقى من معالم نموذج التحاين لاجابة لها في نموذج الانحدار، وذلك بسبب القيود في (18.23). وهكذا نجد، عل سبيل المثال:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= -\alpha_1 \\
 \beta_3 &= -\beta_1 - \beta_2 \\
 (\alpha\beta)_{13} &= -(\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{12} \\
 (\alpha\beta)_{21} &= -(\alpha\beta)_{11}
 \end{aligned}
 \quad (20.6)$$

ويمثل الجدول (٢-٢٠) مصفوفتي البيانات Y و X لنموذج الانحدار (20.4) في دراسة هرمون النمو. ويمثل الجدول (٢-٢٠) دالة الانحدار التوفيقية وجدول تحاين الانحدار عند توفيق نموذج الانحدار التام (٢٠، ٤) للبيانات. ونلاحظ أن القيم التوفيقية للنموذج التام هي المتوسطات المقترنة للمعالجات \bar{Y}_i ، تماماً كما في حالة تساوي أحجوم عينات المعالجات. وعلى سبيل المثال، لدينا من أجل المشاهدات الخاصة بالمعالجة $i = 1, z$ حيث يكون $X_1 = X_2 = 1$ و $X_3 = 0$ ما يلي:

$$\hat{Y}_{111} = \hat{Y}_{112} = \hat{Y}_{113} = 1.7 - 1(1) + 5(1) + 3(0) - 1(1)(1) - 0(1)(0) = 2.0 = \bar{Y}_{11}$$

ولدينا من أجل المشاهدات الوحيدة للمعالجة $i = 2, z$ حيث يكون $X_1 = -1, X_2 = 1$ و $X_3 = 0$ ما يلي:

$$\hat{Y}_{211} = 1.7 - 1(-1) + 5(1) + 3(0) - 1(-1)(1) - 0(-1)(0) = 2.4 = \bar{Y}_{21}$$

جدول (٢-٢٠) مصفوفتا البيانات Y و X لنموذج الانحدار (20.4) الخاصة بدراسة هرمون النمو.

			X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	
$Y =$	Y_{111}	1.4	1	1	1	0	1	0
	Y_{112}	2.4	1	1	1	0	1	0
	Y_{113}	2.2	1	1	1	0	1	0
	Y_{121}	2.1	1	1	0	1	0	1
	Y_{122}	1.7	1	1	0	1	0	1
	Y_{131}	.7	1	1	-1	-1	-1	-1
	Y_{132}	1.1	1	1	-1	-1	-1	-1
	Y_{211}	2.4	1	-1	1	0	-1	0
	Y_{213}	2.5	1	-1	0	1	0	-1
	Y_{222}	1.8	1	-1	0	1	0	-1
	Y_{223}	2.0	1	-1	0	1	0	-1
	Y_{231}	.5	1	-1	-1	-1	1	1
	Y_{232}	.9	1	-1	-1	-1	1	1
	Y_{233}	1.3	1	-1	-1	-1	1	1

جدول (٣-٢٠) نتائج الانحدار لثال هرمون النمو

(أ) توفيق نموذج تام (20.4)				
معادلة التغير	SS	df	مصدر التغير	
$\hat{Y} = 1.7 - .1X_1 + .5X_2 + .3X_3 - .1X_1X_2 - 0.0X_1X_3$	4.4743	5	الانحدار	
	1.3000	8	الخطأ	
	5.7743	13	المجموع	
(ب) توفيق نموذج مخفض (20.8)				
معادلة التغير	SS	df	مصدر التغير	
$\hat{Y} = 1.68 - .0857X_1 + .467X_2 + .327X_3$	4.3989	3	الانحدار	
	1.3754	10	الخطأ	
$SSE(R) - SSE(F) = 1.3754 - 1.3000 = .0754$	5.7743	13	المجموع	
(ج) توفيق نموذج مخفض (20.10)				
معادلة التغير	SS	df	مصدر التغير	
$\hat{Y} = 1.69 - .444X_2 + .328X_3 - .0667X_1X_2 - .0167X_1X_3$	4.3543	4	الانحدار	
	1.4200	9	الخطأ	
$SSE(R) - SSE(F) = 1.4200 - 1.3000 = .1200$	5.7743	13	المجموع	
(د) توفيق نموذج مخفض (20.11)				
معادلة التغير	SS	df	مصدر التغير	
$\hat{Y} = 1.63 - .0190X_1 + .0667X_1X_2 - .193X_1X_3$.2846	3	الانحدار	
	5.4897	10	الخطأ	
$SSE(R) - SSE(F) = 5.4897 - 1.3000 = 4.1897$	5.7743	13	المجموع	

اختبار تأثيرات التفاعل لاختبار ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا، فإن بدائل نموذج التحاين هي:

$$H_0: \text{جميع المعالم } (\alpha\beta)_y \text{ مساوية للصفر} \quad (20.7)$$

$$H_a: \text{ليست جميع المعالم } (\alpha\beta)_y \text{ مساوية للصفر}$$

تصبح في نموذج الانحدار (20.4) كما يلي:

$$H_0: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = 0 \quad (20.7a)$$

$$H_a: \text{ليس كلا من } (\alpha\beta)_{11} \text{ و } (\alpha\beta)_{12} \text{ مساوي للصفر}$$

وهكذا نختبر، ببساطة، ما إذا كانت معلمتا الانحدار مساويتين للصفر أم لا. وبالتالي يصبح نموذج الانحدار المخفض:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i X_{ijk1} + \beta_j X_{ijk2} + \beta_r X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.8)$$

وعند توفيق هذا النموذج المخفض نحصل على النتائج المقدمة في الجدول (٢٠-٣) ب.

وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار (3.69) كما يلي:

$$F^* = \frac{\frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} + \frac{SSE(F)}{df_F}}{\frac{13754 - 13000}{10 - 8} + \frac{13000}{8} \cdot \frac{.0377}{.1625}} = 23$$

ولنضبط عتامة ارتكاب خطأ من النوع الأول عند $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F(95; 28) = 4.46$ ،

وبما أن $F^* = 23 \leq 4.46$ ، فنستنتج H_0 ، أي أن تأثيرات التفاعل غير موجودة. والقيمة P لإحصاءة الاختبار هذه هي 0.80.

اختبار التاثيرات الرئيسية للعامل. ونغضي الآن إلى اختبار ما إذا كانت التأثيرات

الرئيسية للعامل A وللعامل B موجودة أم لا. وتصبح بدائل نموذج التحاين وهي:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (20.9)$$

$$H_a: \text{ليست المعلمتان } \alpha \text{ كلاهما مساويتين للصفر}$$

$$H_a: \text{ليست جميع المعالم } \beta \text{ مساوية للصفر}$$

كما يلي في نموذج الانحدار (20.4):

$$H_0: \alpha_1 = 0$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 \neq 0 \quad H_a: \text{ليست المعلمتان } \beta \text{ كلاهما مساويتين للصفر} \quad (20.9a)$$

وبالتالي يكون نموذجنا الانحدار المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A

والتاثيرات الرئيسية للعامل B كما يلي:

اختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A (نموذج مخفض):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.10)$$

اختبار التأثيرات الرئيسية للعامل B (نموذج مخفض):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_2 X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{21} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.11)$$

وبقدم الجدولان (٣-٢٠) جـ و (٣-٢٠) د نتائج توفيق هذين النموذجين المخفضين،

وبالتالي تكون إحصاءات الاختبار كما يلي:

$$F_1^* = \frac{14200 - 13000}{9 - 8} + \frac{13000}{8} = \frac{1200}{.1625} = .74$$

$$F_2^* = \frac{54897 - 13000}{10 - 8} + \frac{13000}{8} = \frac{2.0949}{.1625} = 12.89$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F(95; 2, 8) = 4.46$ و $F(95; 1, 8) = 5.32$ للاختبارين.

وبما أن $F_1^* = .74 < 5.32$ و $F_2^* = 12.89 < 4.46$ فنستنتج عدم وجود تأثيرات رئيسة

للعامل A ولكن التأثيرات الرئيسية للعامل B موجودة. والقيم P -لهذين الاختبارين على

التوالي هما .41 و .0003.

جدول (٤-٢٠) جدول تباين مثال هرمون النمو.

مصدر التغير	SS	df	MS	F*
الجنس (A)	.1200	1	.1200	.74
تطور العظم (B)	4.1897	2	2.0949	12.89
التفاعلات AB	.0754	2	.0377	.23
الخطأ	1.3000	8	.1625	

وهكذا تدعم هذه الاختبارات التأثير البين لتطور العظم على التغير في معدل النمو

خلال فترة المعالجة بهرمون النمو، الأمر الذي لاحظناه سابقاً من الشكل (١-٢٠) وتشير،

أيضاً، إلى إمكانية اعتبار التغيرات المعالدة إلى الجنس، والتفاعل، في هذا الشكل بأنها،

بمجرد سلوك عشوائي. ووفقاً لمتباينة بونفيرون (5.5)، فإن مستوى المعنوية المعاللي

لمجموعة الاختبارات الثلاثة التي قمنا بها هو 0.15.

وعند هذه النقطة يبدو بوضوح أنه من المستحسن القيام بمزيد من التحاليل لطبيعة تأثيرات تطور العظم. وسنتناقش مثل هذه التحاليل في الفقرة التالية.

ويتضمن الجدول (٢٠-٤) جدول تخمين مكثف عُرضت فيه نتائج توفيق نماذج الانحدار الأربعة في الجدول (٢٠-٣). وبمجاميع المربعات لتأثيرات العامل، في كل حالة، هي الفروق بين مجموعي مربعات الخطأ للنموذج المخفض والنموذج التام، ودرجات الحرية المصاحبة هي الفروق بين درجات الحرية للموافقة لمجموعي مربعات الخطأ هذين. ونلاحظ أن مجموع المربعات الكلي غير مبين في الجدول (٢٠-٤) لأن مجاميع المربعات للأشكال الثلاثة لتأثيرات العوامل ومجموع مربعات الخطأ لا تجمع تماشياً إلى $SSTO$ عندما تكون أحجام العينات لكل معاملة غير متساوية.

تحسين نموذج التخمين

إذا كان من المرغوب تحسين نموذج التخمين بغية اختبار التأثيرات الرئيسة لعامل، وذلك عندما يؤدي اختبار التفاعل إلى استنتاج عدم وجود تأثيرات تفاعل، فينبغي تعديل أسلوب الانحدار الذي وصفناه آنفاً. وتحديداً، فإن النموذج التام (20.4) في مثال هرمون النمو سوف لا يعود نموذجاً تاماً لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B عندما لا يوجد تفاعل. وبدلاً من ذلك، فإن النموذج التام لهذه الاختبارات يستثني تأثيرات التفاعل ويصبح كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i X_{ijk1} + \beta_j X_{ijk2} + \beta_3 X_{ijk3} + \epsilon_{ijk} \quad (20.21)$$

ملاحظة

إذا كانت أحجام العينات n_{ij} لا تختلف كثيراً (ويقول بعض الإحصائيين بما لا يزيد عن نسبة 2 إلى 1، مع كون معظم الأعداد n_{ij} قريبة بعضها إلى بعض) ولم يكن أي من الأعداد n_{ij} صفراً، فيمكن استخدام تحليل تباين تقريبي يسمى طريقة المتوسطات غير الموزونة. وتستخدم هذه الطريقة التقريبية أحياناً مع اختلافات كبيرة بين الأعداد n_{ij} ولكن، فقط، عندما نرغب بتقريب أولي سريع لتأثيرات التفاعل.

والطريقة بسيطة إذ تقوم بتحليل التباين مستخدمين المتوسطات \bar{Y}_{ij} وكأنها مشاهدات منفردة لكل معاملة. وهكذا نحسب SSA ، SSB ، $SSAB$ ، بالطريقة المضادة،

بإستثناء أن لكل معالجة مشاهدة واحدة، فقط، هي \bar{y}_{ij} . ونعلم أن "للمشاهدة" \bar{y}_{ij} تباين يساوي σ^2 / n_{ij} ، وبالتالي يكون التباين المتوسط "للمشاهدات" هو:

$$\frac{\sum_i \sum_j \frac{\sigma^2}{n_{ij}}}{ab} = \frac{\sigma^2}{ab} \sum_i \sum_j \frac{1}{n_{ij}} \quad (20.13)$$

ويُقدَّر التباين σ^2 بالمقدار MSE ، سواء أكانت التكرارات متساوية أم لا:

$$MSE = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2}{n_T - ab} \quad (20.14)$$

ويكون التباين المتوسط المقدر للمشاهدات:

$$\frac{MSE}{ab} \sum_i \sum_j \frac{1}{n_{ij}} \quad (20.15)$$

ويُستخدم هذا التقدير عندئذ كتقدير لتباين الخطأ في تحليل التباين الخاص "بالمشاهدات" \bar{y}_{ij} .

وقد طور فيديرر (*Federer*) وزيلن (*Zelen*)، المرجع 20.1، طريقة تقريبية أخرى. وهي أكثر دقة غير أنها أكثر تعقيداً، إلى حد ما، من طريقة المتوسطات غير الموزونة.

(٢٠-٣) تقدير تأثيرات العوامل عندما تكون حجوم العينات غير متساوية

لا تبرز مشاكل جديدة في تقدير تأثيرات العوامل عندما تكون حجوم العينات غير متساوية. وتعتمد طبيعة التحليل، كما في حالة عينات متساوية، على ما إذا كانت هناك تفاعلات قوية أم لا. وعندما لا توجد تفاعلات قوية، يهتم التحليل، بصورة عامة، بمتوسطات مستويات العوامل μ_i و μ_j . وعلى الوجه الآخر، عندما توجد تفاعلات مهمة، يركز التحليل عادة، على متوسطات المعالجات μ_{ij} .

وعندما تكون حجوم العينات غير متساوية يجب، بالطبع، تعديل المقدرات والتباينات المقترنة المعطاة في الفصل ١٩ من أجل حجوم عينات متساوية. وعلى سبيل المثال، إذا كان الاهتمام في تقدير متوسطات مستويات العوامل μ_i كما عرفناها في (18.2):

$$\mu_i = \frac{\sum_j \mu_{ij}}{b}$$

فالمقدر المناسب هو ببساطة المتوسط غير المرحح لمتوسطات المعالجات المقطرة \bar{Y}_{ij} :

$$\hat{\mu}_i = \frac{\sum_j \bar{Y}_{ij}}{b}$$

وبما أن \bar{Y}_{ij} مستقلة، فتباين هذا المقدر هو:

$$\sigma^2\{\hat{\mu}_i\} = \frac{1}{b^2} \sum_j \sigma^2(\bar{Y}_{ij}) = \frac{1}{b^2} \sum_j \frac{\sigma^2}{n_{ij}} = \frac{\sigma^2}{b^2} \sum_j \frac{1}{n_{ij}}$$

والتباين المقدر هو:

$$s^2\{\hat{\mu}_i\} = \frac{MSE}{b^2} \sum_j \frac{1}{n_{ij}}$$

ويقدم الجدول (٢٠-٥) الصيغ الخاصة بالمقدر النقطي والتباين المقدر، وذلك عند تقدير متوسطات مستويات العوامل، ومقارنات ثنائية بين متوسطات مستويات العوامل، ومتضادات أو تراكيب خطية في متوسطات مستويات العوامل، في حالة حجم عينات غير متساوية. والصيغ المقابلة الخاصة بمتوسطات المعالجات، والمقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات، ومتضادات أو تراكيب خطية في متوسطات المعالجات، معروضة، أيضا، في هذا الجدول.

وجميع طرق المقارنات الثنائية القابلة للتطبيق في حالة حجم عينات متساوية تبقى مناسبة عندما تكون حجم عينات المعالجات غير متساوية. وطريقة توكي في المقارنات الثنائية هي الآن طريقة محافظة. ودرجات الحرية المصاحبة لـ MSE هي $n_T - ab$ ، كما في السابق. ولنتذكر في حجم العينات المتساوية أن $nab - n_T$. وبالتالي يكون $n_T - ab$ عندئذ مساويا لـ $(n-1)ab$. ويقدم الجدول (٢٠-٥)، أيضا، المقارنات المتعددة المتزامنة المناسبة للقيام باستقرائات حول متوسطات مستويات عامل أو متوسطات المعالجات.

جملول (٢٠-٥) مقارنات ثنائية وتباينات مقطرة لتحليل عاملين عندما تكون حجوم العينات غير متساوية

(أ) متوسط مستوى عامل

$$\begin{aligned}\mu_i &= \frac{\sum_j \mu_{ij}}{b} & \mu_j &= \frac{\sum_i \mu_{ij}}{a} \\ \hat{\mu}_i &= \frac{\sum_j \bar{y}_{ij}}{b} & \hat{\mu}_j &= \frac{\sum_i \bar{y}_{ij}}{a} \\ s^2(\hat{\mu}_i) &= \frac{MSE}{b^2} \sum_j \frac{1}{n_{ij}} & s^2(\hat{\mu}_j) &= \frac{MSE}{a^2} \sum_i \frac{1}{n_{ij}}\end{aligned}\quad (20.16)$$

(ب) مقارنة ثنائية لمتوسطات مستويات عامل

$$\begin{aligned}D &= \mu_i - \mu_{i'} & \hat{D} &= \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'} \\ \hat{D} &= \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'} & s^2(\hat{D}) &= \frac{MSE}{b^2} \sum_j \left(\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j}} \right) \\ s^2(\hat{D}) &= \frac{MSE}{b^2} \sum_j \left(\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j}} \right) & s^2(\hat{D}) &= \frac{MSE}{a^2} \sum_j \left(\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j}} \right)\end{aligned}\quad (20.17)$$

(ج) متضادة أو تركيب عطلي في متوسطات مستويات عامل

$$\begin{aligned}L &= \sum_i c_i \mu_i & \hat{L} &= \sum_j c_j \mu_j \\ \hat{L} &= \sum_i c_i \hat{\mu}_i & \hat{L} &= \sum_j c_j \hat{\mu}_j \\ s^2(\hat{L}) &= \frac{MSE}{b^2} \sum_i c_i^2 \sum_j \frac{1}{n_{ij}} & s^2(\hat{L}) &= \frac{MSE}{a^2} \sum_j c_j^2 \sum_i \frac{1}{n_{ij}}\end{aligned}\quad (20.18)$$

(د) فترات ثقة متعددة

تقدير مفردة

$$t(1 - \alpha/2; n_T - ab) \quad t(1 - \alpha/2; n_T - ab)$$

مقارنات متعددة

$$\begin{aligned}B &= t(1 - \alpha/2g; n_T - ab) & B &= t(1 - \alpha/2g; n_T - ab) \\ T &= \frac{1}{\sqrt{2}} q(1 - \alpha; a, n_T - ab) & T &= \frac{1}{\sqrt{2}} q(1 - \alpha; b, n_T - ab) \\ S^2 &= (a-1)F(1 - \alpha; a-1, n_T - ab) & S^2 &= (b-1)F(1 - \alpha; b-1, n_T - ab)\end{aligned}\quad (20.19)$$

جداول (٥-٢٠) صمة

(هـ) متوسط معالجة

$$\begin{aligned}\mu_y \\ \hat{\mu}_y = \bar{Y}_y \\ s^2(\hat{\mu}_y) = \frac{MSE}{n_y}\end{aligned}\quad (20.20)$$

(و) مقارنة ثنائية لمتوسطات المعالجات

$$\begin{aligned}D = \mu_y - \mu_{yf} \\ \hat{D} = \bar{Y}_y - \bar{Y}_{yf} \\ s^2(\hat{D}) = MSE \left(\frac{1}{n_y} + \frac{1}{n_{yf}} \right)\end{aligned}\quad (20.21)$$

(ز) متضادة أو تركيب عطي في متوسطات المعالجات

$$\begin{aligned}L = \sum \sum c_{ij} \mu_{ij} \\ \hat{L} = \sum \sum c_{ij} \bar{Y}_{ij} \\ s^2(\hat{L}) = MSE \sum \sum \frac{c_{ij}^2}{n_{ij}}\end{aligned}\quad (20.22)$$

(ح) فوات ثقة متعددة

تقدير منفرد

$$t(1 - \alpha/2; n_T - ab)$$

مقارنات متعددة

$$B = t(1 - \alpha/2g; n_T - ab)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(1 - \alpha; ab, n_T - ab) \quad (20.23)$$

$$S^2 = (ab-1)F(1 - \alpha; ab-1, n_T - ab)$$

وبما أن تقدير تأثيرات العوامل لا ينطوي على قضايا جديدة عندما تكون حجوم العينات غير متساوية، فستمضي مباشرة إلى مثالين.

مثال ٩- مقارنات ثنائية لمتوسطات مستويات عامل

نستمر الآن مع مثال هرمون النمو. فقد وجدنا سابقاً أن جنس الطفل وتطور المظلم لا يتضاعلان من حيث تأثيرهما على التغير في معدل النمو عند إعطاء هرمون

النمو. وفضلا عن ذلك فقد وجدنا أنه ليس للجنس (عامل A) تأثيرات رئيسة، ولكن استنتجنا أن تطور عظم الطفل (عامل B) يؤثر في معدل تغير النمو. وسنحلل الآن طبيعة تأثيرات تطور العظم باللجوء إلى مقارنات ثنائية بين فئات تطور العظم الثلاث، وسنستخدم طريقة توكي في المقارنات المتعددة. و هذه الطريقة محافظة عندما تكون حجوم العينات غير متساوية، وفي المقابل، فإن استخدام طريقة بونفرونو يمكن أن يؤدي هنا إلى فترات ثقة أوسع. وقد حُدد معامل الثقة العائلي ليكون 0.90.

سنستخدم الصيغ (20.7) للتقديرات النقطية والتباينات المقترنة، ومتوسطات المعالجات المقترنة معطاة في الجدول (٢٠-١). ويمكن العثور على MSE في الجدول (٢٠-٤). ونحصل من أجل المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات عامل تطور العظم ($j=1$): قصور شديد، $j=2$: قصور معتدل، $j=3$: قصور طفيف) على ما يلي:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{21}}{2} = \frac{2.0 + 2.4}{2} = 2.2$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{22}}{2} = \frac{1.9 + 2.1}{2} = 2.0$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{\bar{Y}_{13} + \bar{Y}_{23}}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9$$

$$\hat{D}_1 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = 2.2 - 2.0 = 2$$

$$\hat{D}_2 = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 = 2.2 - 9 = 13$$

$$\hat{D}_3 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_3 = 2.0 - 9 = 11$$

$$s^2\{\hat{D}_1\} = \frac{.1625}{(2)^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) = .0880 \quad s\{\hat{D}_1\} = .297$$

$$s^2\{\hat{D}_2\} = \frac{.1625}{(2)^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) = .0880 \quad s\{\hat{D}_2\} = .297$$

$$s^2\{\hat{D}_3\} = \frac{.1625}{(2)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = .0677 \quad s\{\hat{D}_3\} = .260$$

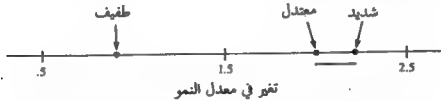
ولمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة نحتاج إلى:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(.90; 3, 8) = \frac{1}{\sqrt{2}} (3.37) = 2.38$$

وبالتالي نحصل على فترات الثقة التالية:

$$\begin{aligned} - .51 &= .2 - 2.38(.297) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq .2 + 2.38(.297) = .961 \\ .59 &= 1.3 - 2.38(.297) \leq \mu_1 - \mu_3 \leq 1.3 + 2.38(.297) = 2.01 \\ .48 &= 1.1 - 2.38(.260) \leq \mu_2 - \mu_3 \leq 1.1 + 2.38(.260) = 1.72 \end{aligned}$$

ونستنتج من فترات الثقة هذه، وبمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة، أن للأطفال القصار، مع عَوَز في هرمون النمو المتصفين بقصور طفيف في تطور العظم، زيادة في معدل النمو أقل بكثير، في المتوسط، منها في أطفال يتصفون بقصور معتدل أو قصور شديد في تطور العظم. وفضلاً عن ذلك، فإن الفئتين الأخيرتين من الأطفال لا تُظهران فرقاً بيناً في متوسطات تغير معدل النمو. ونلخص هذه النتائج في رسم الخط التالي للمتوسطات المقدرة لمستويات عامل:



مثال ٢- اختبار بدرجة واحدة من الحرية

في مثال هرمون النمو أراد باحث معرفة ما إذا كان الأطفال من فئة القصور الطفيف في تطور العظم يحصلون، في المتوسط، على أي زيادة في معدل النمو عند إعطائهم هرمون النمو. وهكذا، فإن البدائل التي ينبغي اعتبارها بدائل اختبار وحيد الجانب:

$$H_0: \mu_3 \leq 0$$

$$H_a: \mu_3 > 0$$

وسنضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$.

إحصاءة الاختبار التي ينبغي استخدامها هي:

$$t^* = \frac{\hat{\mu}_3 - 0}{s\{\hat{\mu}_3\}}$$

وقد وجدنا سابقاً أن $\hat{\mu}_3 = .9$ وأن $MSE = 0.1625$. وبالتالي نحصل، عند استخدام (20.16) على:

$$s^2\{\hat{\mu}_3\} = \frac{.1625}{(2)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = .0339 \quad s\{\hat{\mu}_3\} = .184$$

وتكون إحصاءة الاختبار:

$$t^* = \frac{9-0}{0.288} = 4.89$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $t^* = 1.860$ (8; 95). وبالتالي تكون قاعدة القرار وحيدة الجانب:

إذا كان $t^* \leq 1.860$ استنتج H_0 ،

إذا كان $t^* > 1.860$ استنتج H_a ،

وعا أن $1.860 < 4.89 = t^*$ نستنتج H_a ، أي أن متوسط التغير في معدل النمو للأطفال من فئة القصور الطفيل في تطور العظم هو أكبر من الصفر. والقيمة P -وحيدة الجانب لإحصاءة الاختبار هذه هي 0.0006.

(٢٠-٤) خلايا فارغة في دراسات ثنائية العامل

من وقت لآخر يجد المرء بعد استكمالته لدراسة ثنائية العامل أنه لا توجد مشاهدات في واحدة أو أكثر من خلايا المعالجات. وعندئذ لاتكون حجوم عينات المعالجات غير متساوية فحسب، وإنما لاتوجد أية معلومات عينة عن متوسطات المعالجات ذات الخلايا الفارغة. لنعتبر ثانية الجدول (٢٠-١) الخاص بدراسة هرمون النمو، فنلاحظ أن بتين من يعانين من قصور شديد في تطور العظم قد هجرتا الدراسة قبل استكمالها مما ترك مشاهدة واحدة فقط ($n_{21} = 1$) لتلك المعالجة. ويمكن أن نتصور بسهولة أن البنت الثلاثة جميعهن كان يمكن أن يتركن الدراسة. وعندئذ سيكون لدينا $n_{21} = 0$ ، ولا تتوفر لنا أية معلومات عينة عن متوسط المعالجة μ_{21} .

تحليل جزئي لتأثيرات الجوامل

عندما تكون إحدى خلايا المعالجات أو عدد منها خالية، لايمكن تنفيذ تحليل التباين المعتاد لحجوم عينات غير متساوية باستخدام أسلوب الانحدار الذي شرحناه آنفا. وهذا لايعني، على أي حال، أن الدراسة ثنائية العامل قد أصبحت بكاملها عديمة الجدوى. وفي العادة، يمكن القيام بتحليل متنوع تقدم لنا، على الأقل، معلومات جزئية عن طبيعة تأثيرات العوامل. وتعتمد التحاليل التي يمكن القيام بها على الخلايا

ذاتها التي لا تتوفر عنها معلومات عينة. وستوضح بواسطة مثال كيف يمكن الحصول على معلومات جزئية من دراسات ثنائية العامل مع خلايا فارغة. مثال. في مثال هرمون النمو، لنفترض أنه لم تكن هناك مشاهدات من أجل البنات ذوات القصور الشديد في تطور العظم، أي أن $n_{21} = 0$. ففي هذه الحالة سوف لا تتوفر معلومات عينة عن متوسط المعالجة μ_{21} .

ولا يزال من الممكن الحصول على معلومات جزئية عن التفاعلات بقصر الانتباه على أطفال من ذوي القصور المعتدل والقصور الطفيف في تطور العظم. ومن أجل هؤلاء الأطفال، تكون التفاعلات موجودة إذا لم تبق الفروق بين متوسطات المعالجات للجنسين نفسها من أجل فتي تطور العظم. والفرقان هنا هما:

$$\mu_{12} - \mu_{22} \quad \mu_{13} - \mu_{23}$$

وهكذا ستأمل المتضادة التالية بين متوسطات المعالجات:

$$L = \mu_{12} - \mu_{22} - \mu_{13} + \mu_{23}$$

ويمكننا إما تقدير L بفترة ثقة، ثم ملاحظة ما إذا كانت الفترة تتضمن الصفر أم لا، وإما إجراء اختبار بدرجة واحدة من الحرية لمعرفة ما إذا كانت التفاعلات موجودة أم لا. وفي أي من الأسلوبين يمكن استخدام MSE مبنية على مشاهدات العينة كافية، وبمحت تكون درجات الحرية المصاحبة لـ $MSE = 8 = 13 - 5 = (ab - 1) = n_T - 7$. (تذكر أن $n_{21} = 0$ الآن).

وإذا اقترح التحليل الجزئي للتفاعلات عدم وجود تفاعلات، فيمكن دراسة تأثير الجنس بمقارنة متوسطات مستويات العامل مستثنين الأطفال ذوي القصور الشديد في تطور العظم:

$$\mu_1 = \frac{\mu_{12} + \mu_{13}}{2} \quad \mu_2 = \frac{\mu_{22} + \mu_{23}}{2}$$

وبفضل ذلك، يمكن دراسة تأثير تطور العظم للصبين بمقارنة متوسطات المعالجات μ_{11} ، μ_{12} ، μ_{13} ، أو يمكن دراستها للأطفال من الجنسين مستثنين أولئك الذين يعانون من قصور شديد في تطور العظم:

$$\mu_2 = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{2} \quad \mu_3 = \frac{\mu_{13} + \mu_{23}}{2}$$

التحليل عند إمكانية استخدام نموذج بدون تفاعلات

توفر أحيانا معلومات من دراسات سابقة أن العاملين في دراسة ثنائية العامل لا يتفاعلان. وفي هذه الحالة، يمكن استخدام نموذج أبسط من نموذج التباين (18.22). ونموذج اللاتفاعل بعاملين مع مستويات عامل مثبتة هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad (20.24)$$

ولم نناقش هذا النموذج سابقا لأن المعلومات عن صلاحية هذا النموذج (أي عما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا) لا تتوفر، في العادة، سلفا.

وعلى أي حال، إذا كان نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسباً فيمكن القيام بتحليل التباين وتحليل التأثيرات الرئيسة للعوامل باستخدام أسلوب الانحدار وذلك حتى في حالة وجود خلية أو عدة خلايا فارغة، طالما أنه يمكن تقدير متوسطات الخلايا الفارغة من متوسطات الخلايا غير الفارغة باستخدام (18.7b).

وعلى سبيل المثال، لنفترض ثانية أن خلية النبات ذوات القصور الشديد في تطور العظم، في مثال هرمون النمو، فارغة، ولكن يمكن للباحث أن يفترض، من معرفة سابقة، عدم وجود تفاعل بين الجنس وتطور العظم. ففي هذه الحالة يُختزل نموذج الانحدار (20.4) إلى النموذج في (20.12):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i X_{ijk2} + \beta_j X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.25)$$

ولاختبار التأثيرات الرئيسة للجنس، مثلاً، نقوم أولاً بتوفيق النموذج التام ونحصل على $SSE(F)$ والبدائل التي نريد اختبارها هي:

$$H_0: \alpha_1 = 0$$

$$H_a: \alpha_1 \neq 0$$

وبالتالي يكون النموذج المخفض:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_j X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.26)$$

ثم نقوم بتوفيق هذا النموذج المخفض ونحصل على $SSE(R)$ ، ونحسب إحصائية الاختبار الخطي العام (3.69) بالطريقة المعتادة. وفي هذه الحالة بالذات، يمكن، أيضاً، استخدام إحصائية الاختبار F^* في (8.23) باعتبار أن الاختبار هو ببساطة حول ما إذا

كانت معلمة الانحدار بمفردها مساوية للصفر أم لا. وبصورة مماثلة يمكن القيام باعتبار تأثيرات تطور العظم.

والسبب في إمكانية القيام بتحليل التباين المعتاد بأسلوب الانحدار مع $\mu_{21} = 0$ هو أن افتراض عدم وجود تفاعل يسمح لنا في الواقع بتقدير μ_{21} . ومن الناحية الذهنية يحتاج هذا التقدير لـ μ_{21} إلى خطوتين. فنحتاج أولاً إلى تقدير متوسطات المعالجات μ_{ij} للخلايا غير الفارغة. وهذه التقديرات هي أكثر تعقيداً من مجرد استخدام المتوسطات المقدرة للمعالجات $\bar{y}_{i.}$ ، إذ نحتاج إلى الانتفاع بما يفرضه النموذج من عدم وجود تفاعلات، ونحصل على هذه التقديرات باستخدام طرق المصفوفات الموصوفة في الفقرة ٨-٦. سنوضح كيفية تقدير متوسطات المعالجات μ_{ij} في حالة نموذج اللاتفاعل في الفقرة ٢١-١) وحالما نجد تقديرات لمتوسطات المعالجات μ_{ij} للخلايا غير الفارغة، تكون الخطوة الثانية في تقدير μ_{21} هي الاستفادة من العلاقة (18.76) الخاصة بحالة اللاتفاعل، إذ يمكننا التعبير عن μ_{21} بدلالة متوسطات المعالجات الثلاثة الباقية، فعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\mu_{21} = \mu_{22} + \mu_{11} - \mu_{12}$$

وهكذا تسمح لنا تقديرات μ_{22} ، μ_{11} و μ_{12} التي تتوفر من أجلها بيانات عينة، بتقدير μ_{21} وذلك عندما لا توجد تفاعلات.

وينبغي التحذير بأنه من غير المناسب استخدام نموذج اللاتفاعل كنموذج تام عندما لا تتوفر معلومات سابقة عن غياب التفاعلات. وكما شرحنا سابقاً، لا يمكن عندئذ القيام إلا بتحليل جزئية لتأثيرات العوامل، وذلك عندما تكون بعض خلايا المعالجات فارغة.

(٢٠-٥) حزم الحسابات الإحصائية

لابد من ممارسة الحذر الشديد عند استخدام برامج تحليل التباين في الحزم بمجموع عينات غير متساوية لأن الاختيار المتأخر في الحزمة قد لا ينحصر بالضرورة الأهمية نفسها لكل متوسط معالجة. وينبغي أن يقرأ المستخدم وثائق الحزمة بعناية ويطمئن إلى أن الحزمة تؤكد مجموع المربعات المناسب للاختبارات ذات الأهمية بالنسبة له.

وفي الحزم الإحصائية *SAS, BMDP*، و *SPSS* نجد أن المخرجات المكافئة لنتائج الانحدار التي حصلنا عليها في الفقرة ٢٠-٢ في حالة متوسطات معالجات متساوية الأهمية وعدم وجود خلايا فارغة هي كمايلي عند كتابة هذا المرجع:

BMDP2V - اختيار متأخر (*Default Option*)

SAS *ROC GLM* - مجموع المربعات من النوع III أو النوع IV.

ANOVA *SPSS* - الاختيار التاسع.

كما ينبغي ممارسة الحذر، أيضاً، مع تحاين حزم الحاسب التي تزود بنتائج عندما تكون بعض خلايا المعالجات فارغة. فقد تفرض الحزمة افتراضات حول التفاعلات لايرحب الباحث بها. وفي حالة وصف واضح لكيفية تناول الحزمة للخلايا الفارغة، يكون من المفضل القيام بالتحاليل المناسبة دون مساعدة الحزمة باستثناء الحصول على تقديرات لمتوسطات المعالجات وعلى *MSE*.

مراجع ورد ذكرها

[20.1] Federer, W. T., and M. Zelen. "Analysis of Multifactor Classifications with Unequal Numbers of Observations." *Biometrics* 22 (1966), pp. 525 - 52.

مسائل

(١٠-١) اختار باحث تسويق مقيم عينة عشوائية من 400 منطقة وصنفها وفقاً لعدد السكان (أربعة مستويات) وللموقع الجغرافي (خمسة مستويات) وذلك لدراسة تأثيرات هذين العاملين على مبيعات منتجات الشركة. وعندما وجد أن حجوم عينات المعالجات غير متساوية. وكان أصغرها 4، قام بتزويد أعداد عشوائية لتخفيض عدد المناطق في كل خلية إلى أربع. ثم مضى إلى تحليل تأثيرات عدد السكان وللموقع الجغرافي على أسس المناطق الثمانية الباقية.

أ - هل تفقد طريقة الإهمال العشوائي لملاحظات إلى أية انحيازات؟

ب- هل كان من الحكمة أن يهمل الباحث 320 مشاهدة بصورة عشوائية

كي يحصل على حجوم عينات متساوية؟

(٢-٢٠) سأل طالب: "إذا كان لابد من تحليل دراسات ثنائية العامل مع حجم عينات غير متساوية بأسلوب الانحدار فلم نزع أنفسنا، على الإطلاق، بنموذج تحليل التباين ذي العاملين؟ علق.

(٣-٢٠) بالإشارة إلى مسألة العروض النقدية (١٨-١٠). افترض أن المشاهدين $Y_{214} = 18$ و $Y_{323} = 20$ مفقودتان لأن المرض الذي جرى تسليمه في كل من هاتين الحالتين كان على شكل سلعة وليس عرضا نقديا.

أ- اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. واعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ، استخدم 0، 1، كمستويات مؤشرة.

ب- اكتب المصفوفتين X و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

ج- أوجد $X\beta$ وبن أنه يمكن الحصول على متوسطات المعالجات المناسبة بواسطة النموذج الذي وضعته.

د- ما هو النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

هـ- اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفير النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

و- اعرض النموذجين المخفضين لاختبار كل من تأثيرات العمر والجنس، على الترتيب. نقد هذين الاختبارين. استخدم $\alpha = 0.05$. في كل منهما واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

ز- لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعمر، قدر المقارنات الثنائية التالية:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_1 - \mu_2 & D_3 &= \mu_2 - \mu_3 \\ D_2 &= \mu_1 - \mu_3 \end{aligned}$$

استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة.

ح- في مجتمع المالكين الإناث، كان 30 بالمائة من الفتيات، 60 بالمائة متوسطات العمر، و 10 بالمائة من المسنات. قدر متوسط العرض النقدي لهذا المجتمع مستخدما 95% قوة ثقة.

(٤-٢٠) بالإشارة إلى مسألة شفء حصى العلف (١٨-١٤). افترض أن المشاهدات

$Y_{221} = 8.9$, $Y_{113} = 2.3$ و $Y_{224} = 9.0$ مفقودة لأن المرضى لم يسجلوا مباشرة

تاريخ بدء معاناتهم مجدداً من حصى العلف.

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. اعرض، أيضاً، نموذج الانحدار

المكافئ استخدم المتغيرات المؤشرة 0, -1, 1.

ب - اعرض المصفوتين X و β لنموذج الانحدار في (أ).

ج - أوجد $X\beta$ وبين أنه يمكن الحصول على متوسطات المعالجات المناسبة بواسطة النموذج.

د - ما هو النموذج للمخفض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

هـ - اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفير

النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة

القرار، والنتيجة. ماهي القيمة p - للاختبار؟

و - تُراد دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بواسطة المتضادات التالية:

$$L_1 = \frac{\mu_{12} + \mu_{13}}{2} - \mu_{11} \quad L_4 = L_2 - L_1$$

$$L_2 = \frac{\mu_{22} + \mu_{23}}{2} - \mu_{21} \quad L_5 = L_3 - L_1$$

$$L_3 = \frac{\mu_{32} + \mu_{33}}{2} - \mu_{31} \quad L_6 = L_3 - L_2$$

أوجد فترات ثقة لهذه المتضادات، استخدم طريقة شيفه للمقارنات

التعددية بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. فسر نتائجك.

(٥-٢٠) بالإشارة إلى مسألة معالجة الفشل الكلوي في المستشفى (١٨-١٨). افترض

أن المشاهدات $Y_{124} = 12$, $Y_{216} = 2$ و $Y_{238} = 9$ مفقودة لأن سجلات

المستشفى هؤلاء المرضى غير تامة. مع الاستمرار في العمل بالبيانات المحوكة

$$Y' = \log_{10}(Y+1)$$

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. اعرض، أيضاً، نموذج الانحدار

المكافئ، استخدم المتغيرات المؤشرة 0, -1, 1.

ب - اكتب المصفوفتين X و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).
 جـ - أوجد $X\beta$ وبيّن أنه يمكن الحصول على متوسطات المعالجات المناسبة بواسطة النموذج الذي وضعته.

د - ما هو النموذج المخفّض لاختبار تأثيرات التفاعل؟
 هـ - اختر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفير النموذجين التام والمخفّض، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

و - اعرض النموذجين المخفّضين لاختبار التأثيرات الرئيسة لفترة دوام المعالجة وللزيادة في الوزن، على الترتيب. نفّذ كلا من الاختبارين. استخدم $\alpha = 0.05$. في كل منهما واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - لكل اختبار؟

ز - استخدم الإحصاءة χ^2 بدرجة واحدة من الحرية لاختبار ما إذا كان متوسط عدد أيام المستشفى (بالوحدات بعد التحول) للمرضى الذين كانت زيادة الوزن عندهم طفيفة يتجاوز 0.5، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ح - لتحليل طبيعة التأثيرات الرئيسة للعوامل، قدّر المقارنات الثنائية التالية:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_1 - \mu_2 & D_3 &= \mu_3 - \mu_1 \\ D_2 &= \mu_2 - \mu_1 & D_4 &= \mu_3 - \mu_2 \end{aligned}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عالمي 90 بالمائة. اعرض نتائجك.

(٢٠٠٠-٦) أساتذة ملحوظون

اختار متخصص في العلوم الاجتماعية عينة عشوائية من 45 أستاذًا ملحقا ممن يعملون في القسم المسائي من جامعة كبيرة لدراسة المشاكل الخاصة بالمصاحبة للتعليم في القسم المسائي، وتضمن البيانات المجموعة مقياس اللغة التي تسلمها عضو هيئة التدريس وفقا لموضوع المقرر للدروس (عامل A) ولأعلى درجة حصل عليها المدرس (عامل B). والتعويضات على أساس المقرر الواحد (بآلاف الدولارات) معطاة في بداية هذه المسألة.

(أعلى درجة) B عامل			
$j = 3$ دكتوراه	$j = 2$ ماسر	$j = 1$ بكالوريوس	عامل A موضوع الدراسة
2.5	1.8	1.7	$i = 1$ علوم إنسانية
2.7	2.1	1.9	
2.9			
2.5			
2.6			
2.8			
2.7			
2.9			
3.5	2.7	2.5	$i = 2$ علوم اجتماعية
3.3	2.4	2.3	
3.6	2.6	2.6	
3.4	2.4	2.4	
	2.5		
3.7	2.9	2.7	$i = 3$ هندسة
3.6	3.0	2.8	
3.7	2.8		
3.8	2.7		
3.9			
3.3	2.3	2.5	$i = 4$ إدارة
3.4	2.8	2.6	
3.3			
3.5			
3.6			

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. اعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ،

استخدم المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0.

ب - اكتب المصفوفتين X و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

ج - أوجد $X\beta$ و بين أنه يمكن الحصول على تقديرات مناسبة لمتوسطات المعالجات بواسطة النموذج الذي وضعته.

د - أوجد الرواسب، ثم جهّز رسوم رواسب نقطية متحايدة للمعالجات. ما

هي النتائج التي توصلت إليها؟

هـ - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب للرتبة وقيمها المتوقعة تحت افراض الطبيعية. هل يبدو افراض الطبيعية معقولا هنا؟

(٧-٢٠) بالإشارة إلى مسألة الأسئلة الملحقين (٦-٢٠). افترض أن نموذج التحاين مناسب هنا، باستثناء أن m_{ij} ، $i=1, \dots, m$ ، $j=1, \dots, n$ ، $k=1, \dots, m$ ، $j=1, \dots, n$.

أ - ارسم المتوسطات المقترنة للمعالجات \bar{y}_{ij} في هيئة الشكل (١-٢٠). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - ما هو النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

ج - اختر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفير النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

د - اعرض النموذجين للمخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة لموضوع الدراسة ولأعلى درجة، على الترتيب. نفذ كلا من هذين الاختبارين. استخدم $\alpha = 0.01$. في كل مرة واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

هـ - قُم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مواضيع الدراسة، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. اعرض النتائج التي توصلت إليها وقدم ملخصا بيانيا.

و - قُم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات أعلى درجة، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. اعرض النتائج التي توصلت إليها وقدم ملخصا بيانيا.

(٨-٢٠) بالإشارة إلى مسألة الأسئلة الملحقين (٦-٢٠). لنفرض أن لدى المتخصص في العلوم الاجتماعية معلومات سابقة تفيد أن العاملين لا يتفعلن، وبالتالي فإن نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسب.

أ - اعرض نموذج الانحدار التام المكافئ في هذه الحالة. اعرض، أيضاً، النماذج المخفضة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B . استخدم المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0.

ب - قم بتوفيق النموذجين المخفضين والتام واختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B ، استخدم $\alpha = 0.05$. لكل اختبار. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

(٩-٢٠) بالإشارة إلى مسألة الشفاء من حمى التَّلف (١٨-١٤). لنفرض أننا فقدنا البيانات المتعلقة بالمعالجة عندما يكون كل من المنصرين النشطين في مستواه المتوسط، وأننا نحتاج إلى تحاليل مباشرة للبيانات المتوفرة، أي لنفرض أن $n_{22} = 0$ و $n_T = 32$.

أ - للدراسة ماإذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا، قسّر المقارنات التالية:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_{13} - \mu_{11} & L_1 &= D_1 - D_2 \\ D_2 &= \mu_{23} - \mu_{21} & L_2 &= D_1 - D_3 \\ D_3 &= \mu_{33} - \mu_{31} \end{aligned}$$

استخدم طريقة بونفرونّي بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. اعرض النتائج التي توصلت إليها.

ب - وللمزيد من استطلاع طبيعة تأثيرات ممكنة للتفاعل، قم بتنفيذ اختبارات منفصلة كل منها بدرجواحدة من الحرية لما إذا كان $\mu_{13} = \mu_{12}$ ولما إذا كان $\mu_{32} = \mu_{33}$. استخدم $\alpha = 0.02$. لكل اختبار واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهو مستوى المعنوية العائلي مستخدماً مراجعة بونفرونّي؟

(١٠-٢٠) بالإشارة إلى مسألة معالجة القشل الكلوي في المستشفى (١٨-١٨). لنفرض أن أياً من المرضى المتصفين بزيادة طفيفة في الوزن لم يتلق معالجة الديالزة لفترة طويلة، أي لنفرض أن $n_T = 50$ و $n_{21} = 0$. ولنستمر في العمل

بالببيانات المحولة وفقا للعلاقة $Y = \log_{10}(Y+1)$ وبناء على نتائج بحث مشابه يعتقد المحلل أنه من المنطقي الافتراض بأن العاملين لا يتفاعلان، وأن نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسب.

أ - اعرض نموذج الانحدار الثام المكافئ لهذه الحالة. اعرض، أيضا، النموذجين المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B . استخدم في نموذج الانحدار المتغيرات المؤشرة 1, 0.

ب - قم بتوفيق النموذجين الثام والمخفض. اختر التأثيرات الرئيسة للعامل B للعامل B ، استخدم $\alpha = 0.05$. لكل اختبار. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P لكل اختبار؟

(١١-٢٠) بالإشارة إلى مسألة متطلبات المبرمج (١٨-٢٠). لنفرض عدم وجود مبرمجين بأقل من خمس سنوات خبرة على كل من النظم الصغيرة والكبيرة، أي لنفرض أن $m_7 = 20$ و $m_{21} = 0$.
أ - لدراسة ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا، قُدِّر المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_{12} - \mu_{13} \quad L_1 = D_1 - D_2$$

$$D_2 = \mu_{22} - \mu_{23}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. اعرض النتائج التي توصلت إليها.

ب - لمزيد من الدراسة عن طبيعة التأثيرات الممكنة للتفاعل، اختر ما إذا كان m_{22} يتجاوز m_{21} أم لا ؟ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P للاختبار؟

(١٢-٢٠) بالإشارة إلى مسألة الأساتذة الملتحقين (٦-٢٠). لنفرض أنه لم يكن هناك أساتذة يعلمون مقررات علوم إنسانية ويحملون درجة بكالوريوس، فقط، أي أن الدراسة تشمل $m_7 = 43$ أستاذًا ملحقًا و $m_{11} = 0$. وبناء على بحث

سابق يعتقد المختص الاجتماعي أن من المعقول الافتراض بأن العاملين لا يتفاعلان وأن نموذج الالتفاعل (20.24) مناسب هنا.

أ - اعرض نموذج الانحدار التام المكافئ في هذه الحالة. اعرض، أيضاً، النموذجين المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B . استعمل في نموذج الانحدار المتغيرات المؤثرة 1، 0، 1.

ب - قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض. اختر التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B ، استعمل $\alpha = 0.01$. لكل اختبار. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة p - لكل اختبار؟

تمارين

(١٣-٢٠) في طريقة المتوسطات غير المرجحة اعط عبارات لكل من SSA ، SSB ، $SSAB$.

(١٤-٢٠) استبط $\sigma^2\{\bar{L}\}$ للمتضادة المقترنة في (20.18) التي تتضمن \bar{m}_i .

(١٥-٢٠) بين أن $\sigma^2\{\bar{L}\}$ في (20.22) مقدر غير منحاز لـ $\sigma^2\{\bar{L}\}$.

(١٦-٢٠) لتعود دراسة ذات عاملين حيث $a=2$ ، $b=2$ ، $n_{11}=n_{12}=n_{21}=n_{22}=1$.

وحيث ينطبق نموذج الالتفاعل (20.24). استخدم طرق المصفوفات في

الفقرة ٦-٨ لتقدير μ_{22} (إرشاد: تأمل الطريقة المتبعة في الفقرة ٢١-١)

(١٧-٢٠) بالإشارة إلى مسألة معالجة الفضل الكلوي في مستشفى (٢٠-١٠).

لتفرض أنك ستستخدم أسلوب المصفوفات العام الوارد في الفقرة ٨-٦،

بدلاً من أسلوب الانحدار، لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A .

أ - اعرض للمصفوفتين X و β اللتين سنستخدمهما في النموذج التام (8.63).

ب - اعرض اختبار الفرضية (8.66) في صيغة مصفوفية.

مشاريع

(١٨-٢٠) بالإشارة إلى مجموعة البيانات $SENIC$. يراد دراسة تأثيرات الإقليم (عامل

A : متغير 9) ومتوسط عمر المرضى (عامل B : متغير 3) على متوسط فترة

الإقامة في المستشفى (متغير 2)، ولأغراض تتعلق بدراسة التحاين هذه،

سنصنّف متوسط العمر إلى ثلاث فئات : تحت 52.0 سنة، 52.0 إلى ما تحت 55.0 سنة، 55.0 سنة أو أكثر.

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. واعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ، استخدم المتغيرات المؤشرة 0، 1، -1.

ب - أوجد الرواسب ثم جهّز رسوم رواسب نقطية معاذية للمعالجات. ماهي النتائج التي توصلت إليها؟

ج - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. هل يبدو افتراض الطبيعية معقولا هنا؟

(٢٠-١٩) بالإشارة إلى مجموعة البيانات SENIC وإلى المشروع (٢٠-١٨). افترض أن نموذج التحاين (18.23)، حيث $n_j, j = 1, \dots, k$ ، هو النموذج المناسب.

أ - ارسم المتوسطات المقدّرة للمعالجات \bar{y}_j في هيئة الشكل (٢٠-١). هل يبدو أن أية تأثيرات عوامل موجودة ؟ اشرح

ب - اعرض النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل.

ج - اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A . قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

هـ - اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B . قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين الأقاليم، استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عاتلي 95%. اعرض النتائج التي توصلت إليها وقدم ملخصا بيانيا.

(٢٠-٢٠) بالإشارة إلى مجموعة البيانات SMSA. تُراد دراسة تأثيرات الإقليم (عامل A : متغير 12) والنسبة المئوية للسكان في المدن المركزية (عامل B : متغير 4) على

معدل الجرمية (متغير 11 ÷ متغير 3). ولأغراض تتعلق بدراسة التحاين هذه سنصنف النسبة المئوية للسكان في المدن المركبة إلى ثلاث فئات: تحت 30.0 بالمائة، 30.0 بالمائة إلى ما تحت 50.0 بالمائة، 50.0 بالمائة أو أكثر.

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. واعرض، أيضاً، نموذج الانحدار المكافئ مستخدماً المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0.

ب - أوجد الرواسب، ثم جهّز رسوم راسب نقطية معاذية للمعالجات. ماهي النتائج التي توصلت إليها؟

ج - جهّز رسم طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضاً، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. هل يبدو افتراض الطبيعية هنا معقولاً؟

(٢١-٢٠) بالإشارة إلى مجموعة البيانات SMSA وإلى المشروع (٢٠-٢٠). افترض أن نموذج التحاين (18.23)، حيث $k = 1, \dots, m$ ، هو النموذج المناسب.

أ - ارسم المتوسطات المقدرة للمعالجات \bar{y}_k في هيئة الشكل (١٢٠-١). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات عوامل؟ اشرح.

ب - اعرض النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل.

ج - اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا بتوفيق النموذجين الثام والمخفض، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

د - اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A . قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

هـ - اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B . قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين الأقاليم. استخدم طريقة توكي ومعامل عاقل 95 بالمائة. اعرض ماتوصلت إليه من نتائج وقدم تلخيصاً بيانياً.

نماذج تأثيرات عشوائية ومنطقة لدراسات تتناول عاملين ومواضيع أخرى في تحليل التباين (التباين)

نناقش في هذا الفصل عددا من المواضيع المختارة في تحليل التباين لدراسات تتناول عاملين. وسنعالج أولا حالة خاصة حيث توجد مشاهدة واحدة، فقط، لكل معالجة. في هذا السياق سنناقش اختبار توكي (Tukey) الخاص بالتحقيقية، وهو اختبار لا تقتصر أهميته على الحالة التي توجد فيها مشاهدة واحدة لكل معالجة عند دراسة عاملين، ولكنه مفيد، أيضا، في تشكيلة من التصاميم التجريبية مما سنناقشه في فصول لاحقة. ومن ثم نوضح كيفية إنجاز اختبارات تحاين عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية. وأخيرا، نعتبر نوعين من نماذج دراسات تتناول عاملين ومناسبة لحالات يمكن فيها النظر إلى مستويات أحد العاملين أو كليهما على أنها مستويات عشوائية.

(٢١-١) مشاهدة واحدة لكل معالجة

عندما توجد مشاهدة واحدة، فقط، لكل مشاهدة، لا نعود قادرين على استخدام نموذج التحاين (18.23) لعاملين، وذلك بسبب عدم توفر تقديرات لتباين الخطأ^٢. لنذكر من (18.38c) أن SSE مجموع مربعات الخطأ يتشكل من مركبات تقيس التغير ضمن كل معالجة $\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$ ومع مشاهدة واحدة لكل معالجة، لا يوجد تغير ضمن معالجة، وسيكون SSE عندئذ مساويا للصفر دائما.

وإحدى الطرق للخروج من هذه الصعوبة هو تغيير النموذج. ونظرة إلى الجدول (٩-١٨) تشير إلى أنه إذا كان العاملان لا يتفاعلا فإن توقع متوسط مربعات التفاعل $MSAB$ يساوي σ^2 ، وهكذا فإنه إذا أمكن افتراض عدم وجود تفاعل بين العاملين،

فيمكن استخدام $MSAB$ كمقدّر لتباين الخطأ σ^2 والمضني في تحليل تباين العاملين كالمعاد. وإذا لم يكن من المنطقي افتراض عدم وجود تفاعل بين العاملين، فيمكن محاولة القيام بتحويلات لإزالة التفاعل. وسنقول المزيد عن هذا الأمر في الفقرة القادمة.

نموذج اللاتفاعل

قلنا في الفقرة (٢٤-٢٠) نموذج تحاين لعاملين مع مستويات مثبتة لكل عامل وعدم وجود تفاعل. وفي حالة $n = 1$ التي نعتبرها هنا يكون النموذج:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad (21.1)$$

حيث حدود النموذج هي كما في نموذج التحاين (18.23) لعاملين. ونلاحظ سقوط الدليل الثالث من حدي Y و ε بسبب وجود مشاهدة واحدة، فقط، لك للمعالجة.

ويُحسب SSA و SSB ، كما سبق، من (18.39a) و (18.39b)، على الترتيب. بعد وضع $n = 1$ ويُبرّر عن مجموع مربعات التفاعل في (18.39c) مع وضع $n = 1$ الآن كما يلي:

$$SSAB = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_j + \bar{Y})^2 \quad (21.2)$$

ونلاحظ أن $SSAB$ في (21.2) يتطابق مع $SSAB$ في (18.39c) بعد وضع $n = 1$ ، وقد ألغى الدليل الثالث لوجود مشاهدة واحدة، فقط، لكل معالجة، والسبب نفسه حلّت المشاهدة Y_{ij} محل المتوسط \bar{Y}_{ij} . وعدد درجات الحرية الموافق لـ $SSAB$ في (21.2) هو نفس عدد درجات الحرية الموافق لـ $SSAB$ في (18.39c) ونقص $(a-1)(b-1)$.

وجنول التحاين في حالة $n = 1$ لنموذج اللاتفاعل (21.1) مبين في الجدول (٢١-١). ولا تجرّ مشاكل جديدة لا في الاختبارات الخاصة بالتأثيرات الرئيسية للعاملين A و B ، ولا في تقدير هذه التأثيرات. وبما أن القيمة المتوقعة لـ $MSAB$ هي σ^2 في حالة نموذج اللاتفاعل (21.1)، كما هو مبين في العمود الأخير من الجدول (٢١-١)، فإن إحصاءة الاختبار F^* لاختبار التأثيرات الرئيسية للعاملين A و B

ستستخدم الآن $MSAB$ في المقام بدلا من MSE المستخدمة سابقا:

$$F^* = \frac{MSA}{MSAB} \quad (21.3a)$$

$$F^* = \frac{MSB}{MSAB} \quad (21.3b)$$

وبصورة مماثلة، لتقدير مقارنات بين متوسطات مستويات العامل A والعامل B نستبدل ببساطة $MSAB$ بـ MSE في جميع النتائج السابقة باعتباره مقدرًا لتباين الخطأ ثم، ونعدل درجات الحرية وفقا لذلك.

وتوجد مشكلة خاصة، على أي حال، في تقدير متوسطات المعالجات، ومنشروح كيفية معالجة هذه للمشكلة بعد تقديم مثال.

مثال

يبين الجدول (٢١ - ٢) مقادير أقساط التأمين عن ثلاثة أشهر التي تتقاضاها شركة تأمين سيارات لقاء نوع ومقدار من التغطية محددتين لصنف معين من المحاطر، وذلك من أهل ست مدن، مصنفة وفقا لحجم المدينة (العامل A)، والمنطقة الجغرافية (العامل B). لاحظ وجود مشاهدة واحدة لكل علية، وهو مقدار القسط لمدينة واحدة في كل من تراكيب مستويات العاملين، وتدخل هذه الشركة تعديلات دورية على أقساطها تعكس تحركات الخسارة في موقع مقارنة مع تحركات الخسارة في موقع آخر. وقد رغب محلل تأمين في تقويم آثار حجم المدينة والموقع الجغرافي المبيين في الجدول (٢١ - ٢) على مقدار القسط. ومن تحركاته في حالات أخرى نحن عدم وجود تأثيرات التفاعل بالنسبة للأقساط الخاضعة للتحليل. وقد أدى اختبار التفاعلات بالفعل (وستناقشه في الفقرة ٢١ - ٢) إلى استنتاج عدم وجود تأثيرات تفاعل، وهكذا تبني المحلل نموذج التحاين (21.1).

وحصل على مجاميع المربعات التي يتطلبها التحليل كما يلي [مستخدما الصيغ

المعرفة في (18.38) و(18.39) في حالة $n = 1$].

$$SSA = 2[(120 - 175)^2 + (195 - 175)^2 + (210 - 175)^2] = 9,300$$

$$SSB = 3[(190 - 175)^2 + (160 - 175)^2] = 1,325$$

$$SSAB = [(140 - 120 - 190 + 175)^2 + \dots + (200 - 210 - 160 + 175)^2] = 100$$

$$SSTO = [(140 - 175)^2 + \dots + (200 - 175)^2] = 10,750$$

جدول (٩ - ١) جدول تحليل التباين لا عاملين مستقلين، حيث مستويات العامل متساوية و $n = 1$.				
مصدر التباين	SS	df	MS	$E(MS)$
العامل A	$SSA = b \sum (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a - 1}$	$\sigma^2 + \frac{b}{a - 1} \sum (u_i - \mu)^2$
العامل B	$SSB = a \sum (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b - 1}$	$\sigma^2 + \frac{a}{b - 1} \sum (u_j - \mu)^2$
المعطل	$SSAB = \sum \sum (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$	$(a - 1)(b - 1)$	$MSAB = \frac{SSAB}{(a - 1)(b - 1)}$	σ^2
المجموع	$SSTO = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$ab - 1$		

جدول (٢-٢١) دراسة لأقسام التأمين تتضمن عاملين مع $m = 1$

(أ) أقساط بوليصة تأمين لسيارة (بالدولار)			
للنطقة (العامل B)			
حجم المدينة (العامل A)	شرق (j = 1)	غرب (j = 2)	متوسط
صغير (i = 1)	140	100	120
وسط (i = 2)	210	180	195
كبير (i = 3)	220	200	210
	190	160	175
ب) جدول تباين			
مصدر التغير	SS	df	MS
حجم المدينة (A)	9,300	2	4,650
المنطقة (B)	1,350	1	1,350
الخطأ	100	2	50
المجموع	10,750	5	

وجداول التباين معطى في الجدول (٢-٢١) ب. وفي اختبار المحلل لتأثيرات حجم المدينة (العامل A) نجد النتائج البديلة:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ليست جميع α_i مساوية للصفر: H_a

وإحصاء الاختبار F^* معطاة هنا بالعلاقة (21.3a):

$$F^* = \frac{MSA}{MSAB}$$

وقاعدة القرار هي (تذكر أن مقام F^* يتطوي على $(a-1)(b-1)$ درجة من الحرية):

إذا كان $F^* \leq F[1 - \alpha; a-1, (a-1)(b-1)]$ ، استنتج H_0

إذا كان $F^* > F[1 - \alpha; a-1, (a-1)(b-1)]$ ، استنتج H_a

ومن أجل $\alpha = 0.05$ نحتاج إلى $F(95; 2, 2) = 19.0$. ويقدم الجدول (٢-٢١) ب قيمة

إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{4,650}{5} = 93$$

وبما أن $F^* = 93 > 19.0$ ، فنأخذ بالفرض البديل H_0 ، ونستنتج وجود تأثيرات لحجم المدينة. والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.011.

وعرضي اختبار تأثيرات المنطقة الجغرافية (العامل B) بصورة مماثلة، فالتائج البديلة هي:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

H_a : ليست جميع التأثيرات β مساوية للصفر

ومن أجل $\alpha = 0.05$. تكون قاعدة القرار:

إذا كان $F^* \leq F(95; 1, 2) = 18.5$ ، استتج H_0

إذا كان $F^* > F(95; 1, 2) = 18.5$ ، استتج H_a

والإحصاء (21.3b) تساوي في مثالنا هنا:

$$F^* = \frac{MSB}{MSAB} = \frac{1,350}{50} = 27$$

وبما أن $F^* = 27 > 18.5$ ، أي أن تأثيرات المنطقة الجغرافية موجودة، أما القيمة P - لهذا الاختبار فهي 0.035.

ومع هذه النتائج للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B ، اختبر المحلل بعد ذلك متوسطات مستويات العاملين μ_i و μ_j بالطرق التي نوقشت في الفقرة (٢-١٩).

تقدير متوسط المعالجة

عندما توجد مشاهدة واحدة لكل معالجة في دراسة بعاملين ومع استخدام نموذج الالتفاعل (21.1)، نحتاج الطريقة المعتادة لتقدير متوسط معالجة μ_{ij} بمتوسط العينة \bar{y}_{ij} ، وهو هنا ببساطة المشاهدة الوحيدة y_{ij} ، إلى التعديل. وسبب ذلك هو أن هذا المقتر لا يستفيد مما يفرضه النموذج من عدم وجود تفاعلات. ونستعمل الطرق المصفوفية العامة الموصوفة في الفقرة ٨-٦ حيث يمكننا الانتفاع من افتراض الالتفاعلات. ولتوضيح الطريقة في مثال قسط التأمين، نبداً بنموذج التحاين لمتوسطات الخلابا

(18.15) دون قيود على التفاعلات (تذكر أن $n = 1$ هنا) :

$$Y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

ونعبر عن هذا النموذج بدلالة المصفوفات على الشكل $Y = X\beta + \varepsilon$ حيث

المصفوفات موضحة في (18.19) وفي مثالنا، حيث $n = 1$ ، $ab = 6$ ، $m_T = 6$ ، نعرف X و β كما يلي:

$$X = I_{6 \times 6} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{31} \\ \mu_{32} \end{bmatrix} \quad (21.4)$$

ومقدرات المربعات الدنيا لمتوسط المعالجات μ_{ij} في التجه β هي كالمعتاد المتوسطات \bar{Y}_{ij} ، وبما أن $n = 1$ ، فكل متوسط عينة هو ببساطة المشاهدة Y_{ij} ، مفردة، وبالتالي فإن مقدر المربعات الدنيا لـ β ، وسنرمز له بـ b_F كي يتفق مع رموز الفصل الثامن، هو متجه المشاهدات Y :

$$b_F = Y \quad (21.5)$$

وسنبر عن قيد الالتفاعل على الشكل (8.66):

$$C\beta = h \quad (21.6)$$

مستعملين العلاقة (18.7) للتعبير عن متوسط معالجة μ_{ij} بدلالة متوسطات المعالجات الثلاثة الأخرى عند عدم وجود تفاعلات، سنحتاج هنا إلى $2(1) = 2$ (بـ $(b-1)(a-1)$ من مثل تلك العلاقات. وسنستخدم العلاقات:

$$\begin{aligned} \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} &= 0 & \text{أو} & \mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22} \\ \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{31} + \mu_{32} &= 0 & \mu_{11} &= \mu_{12} + \mu_{31} - \mu_{32} \end{aligned}$$

وبالتالي، تكون المصفوفتان C و h في القيد (21.6)، في مثالنا هنا، كما يلي:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 6} \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

ونستخدم الآن (8.68) للحصول على مقدرات المربعات الدنيا لمتوسطات

المعالجات μ_{ij} تحت قيد عدم وجود تفاعلات. ونرمز لهذه المقدرات المقيدة بـ b_R في

(8.68). وبما أن $X = I$ ، $h = 0$ ، و $b_F = Y$ فيمكن تبسيط (8.68) لتصبح:

$$b_R = AY \quad \text{نموذج اللاتفاعل } n = 1 \quad (21.7)$$

حيث:

$$A = I - C'(CC')^{-1}C \quad (21.7a)$$

وفي مثال قسط التأمين، يؤدي التعويض في (21.7) إلى:

$$b_R = \begin{bmatrix} 135 \\ 105 \\ 210 \\ 180 \\ 225 \\ 195 \end{bmatrix}$$

وهكذا يكون مقدّر المربعات الدنيا لقسط التأمين في مدينة صغيرة في الشرق هو، على سبيل المثال $\hat{\mu}_{11} = \$135$.

ومن المهم ملاحظة أن مقدرات المربعات الدنيا $\hat{\mu}_{ij}$ في (21.7) تتمحضر عن كونها بسيطة في بنيتها، وتعكس قيد اللاتفاعلات:

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..} \quad (21.7b)$$

وهكذا نحصل على التقديرات التالية، مستخدمين معطيات الجدول (٢-٢١):

$$\hat{\mu}_{11} = 120 + 190 - 175 = 135$$

$$\hat{\mu}_{12} = 120 + 160 - 175 = 105$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

ولوضع فترة ثقة لمتوسط المعالجة μ_{ij} نحتاج إلى تبين $\hat{\mu}_{ij}$ المقدر. ويمكن الحصول عليه من (6.47)، حيث A معطى في (21.7a) و $\{Y\}$ مقدر بـ $(MSAB)I$.

تعليقات

١ - يعتمد تحليل دراسات بعاملين، مع $n = 1$ مما أجهلناه لتونا، على فرضية عدم وجود تفاعل بين العاملين. وإذا استخدمنا مسرؤ هذا التحليل مع أن التفاعلات في الحقيقة موجودة، فالنتيجة هي تدني مستوى المعنوية الفعلي لاختبار التأثيرات الرئيسة للعاملين A و B تحت المستوى المحدد، وتكون القوى الفعلية للاختبارات أقل من القوة المتوقعة. وبالتالي فإن فترات الثقة لمقارنات بين متوسطات مستويات العوامل ستتزع

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين وموضوع آخرى في تحليل التباين (التحليل) ٣٧٧

إلى أن تصبح عريضة جدا. وهذا يعني أنه، في حال وجود تفاعلات، سيكون من المرجح أن يفشل التحليل في الإفصاح عن تأثيرات حقيقية متوقعة. وعلى أي حال، عندما يُبنى التحليل على نموذج الالتفاعل ويشير بالفعل إلى وجود تأثيرات رئيسة للعامل A أو للعامل B ، فيمكن أخذها على أنها تأثيرات حقيقية حتى لو كانت التفاعلات موجودة بالفعل.

٢ = ونواجه، أحيانا، الحالة $n = 1$ عندما تكون المشاهدات y_{ij} نسبا. وعلى سبيل المثال، يمكن أن تتألف البيانات من نسبة المستخدمين في شركة التغيين في الأسبوع الماضي، مع تصنيف الشركات وفقا لحجمها ولموقعها الجغرافي. وكما ذكرنا قبلا يمكن استخدام تحويل قوس الجيب لبيانات كهذه بغية جعل التباينات مستقرة. ويمكن عندئذ تحليل البيانات المحولة باستخدام نموذج الالتفاعل (21.1). شريطة أن تكون كل نسبة قائمة بصورة تقريبية، على العدد نفسه من المشاهدات. وإذا اختلف عدد المشاهدات اختلافا كبيرا من نسبة إلى أخرى، فينبغي استخدام طريقة المربعات الدنيا المرجحة.

(٢١-٢) اختبار توكي من أجل التجميعية

ونصف الآن اختبارا ابتكره توكي ويمكن استخدامه لاختبار ما إذا كان عاملان، في دراسة ذات عاملين، يتفاعلان أم لا، وذلك في حالة $n = 1$. وهذا الاختبار مفيد، أيضا، لتشكيلة من تصاميم التجارب مما سنتناقشه في فصول لاحقة.

تطوير إحصاء الاختبار

اعتبرنا، كما ذكرنا في الفقرة (٢١-١)، نموذج الالتفاعل (21.1) عندما $n = 1$ ، كي يسمح لنا بالحصول على تقدير لتباين الخطأ في هذه الحالة. وكان من الممكن على أي حال فرض قيود أقل صرامة على $(\alpha\beta)_{ij}$ ، وجعل نموذج تحليل التباين متضمنا لتأثيرات تفاعل مقيدة. هب أننا نفرض أن:

$$(\alpha\beta)_{ij} = D\alpha\beta_{ij} \quad (21.8)$$

حيث D ثابت ما. وأحد الخواص لهذا القيد هو أنه إذا كان $(\alpha\beta)_{ij}$ أي دالة كثيرة

حدود من الدرجة الثانية في α_i و β_j فلا بد أن تكون عندئذٍ من الشكل (21.8)، وذلك بسبب القيود في (18.23) على α_i و β_j التي تقضي أن يكون المجموع في أي منها وفوق أي دليل بعينه مساوياً للصفر.

وباستخدام (21.8) في نموذج تخمين عادي بمعاملين مع تفاعلات، وفي حالة

$n = 1$ ، نجد :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + D\alpha_i\beta_j + \epsilon_{ij} \quad (21.9)$$

حيث لكل من الحدود معناه المعتاد. ولتذكر أنه لا يوجد دليل ثالث هنا لأن $n = 1$

ونحتاج الآن إلى الحصول على مجموع مربعات التفاعل $\sum \sum D^2 \alpha_i^2 \beta_j^2$ ومفروضين أن المعامل الأخرى معروفة، يتبين أن مقدر المربعات الدنيا لـ D هو:

$$\hat{D} = \frac{\sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j Y_{ij}}{\sum_i \alpha_i^2 \sum_j \beta_j^2} \quad (21.10)$$

ومقدر α_i المعتاد هو $\bar{Y}_i - \bar{Y}$ ومقدر β_j المعتاد هو $\bar{Y}_j - \bar{Y}$ وبجديد المقدرات هذه بالمعالم الموافقة لها في \hat{D} نجد :

$$\hat{D} = \frac{\sum_i \sum_j (\bar{Y}_i - \bar{Y})(\bar{Y}_j - \bar{Y})Y_{ij}}{\sum_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \sum_j (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2} \quad (21.10a)$$

وسنرمز لنظير مجموع مربعات التفاعل $\sum \sum D^2 \alpha_i^2 \beta_j^2$ محسوباً من العينة بالرمز $SSAB^*$ كي نتذكر أن مجموع مربعات التفاعل هذا هو من أجل الشكل الخاص للتفاعل في النموذج (21.9). وبتمويض تقديرات العينة في $\sum \sum D^2 \alpha_i^2 \beta_j^2$ ، نجد مجموعة مربعات التفاعل على الشكل:

$$SSAB^* = \sum_i \sum_j \hat{D}^2 (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2$$

$$= \frac{\left[\sum_i \sum_j (\bar{Y}_i - \bar{Y})(\bar{Y}_j - \bar{Y})Y_{ij} \right]^2}{\sum_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \sum_j (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2} \quad (21.11)$$

ويمكن تبسيط هذه العبارة بفكها وصولاً إلى شكل أبسط للحسابات.

ومفكوك تحليل التباين لنموذج التفاعل الخاص (21.9) هو إذن:

$$SSTO = SSA + SSB + SSAB^* + SSR_{em}^* \quad (21.12)$$

حيث SSR_{em}^* هو مجموع مربعات الباقي:

$$SSR_{em}^* = SSTO - SSA - SSB - SSAB^* \quad (21.12a)$$

ويمكن تبين أنه إذا كان $D = 0$ ، أي إذا لم يكن التفاعل من النوع $Da\beta$

موجوداً، فإن $SSAB^*$ و SSR_{em}^* يتوزعان مستقلين وفقاً للتوزيع كاي - مربع بدرجة

واحدة وبـ $ab - a - b$ درجة من الحرية، على الترتيب. وبالتالي، إذا كان $D = 0$ ، فإن

الاختبار :

$$F^* = \frac{SSAB^*}{1} + \frac{SSR_{em}^*}{ab - a - b} \quad (21.13)$$

يتبع التوزيع $F(1, ab - a - b)$.

وهكذا فإنه لا اختبار:

$$H_0: D = 0 \text{ (لا يوجد تفاعلات)} \quad (21.14a)$$

$$H_a: D \neq 0 \text{ (تفاعلات من الشكل } Da\beta \text{ موجودة)}$$

نستخدم إحصاءة الاختبار F^* المعروفة في (21.13). والقيم الكبيرة لـ F^* تقود إلى

النتيجة H_a . وقاعدة القرار المناسبة لإبقاء مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند المستوى

α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F(1 - \alpha; 1, ab - a - b) \quad (21.14b)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* > F(1 - \alpha; 1, ab - a - b)$$

وقد درست قوة هذا الاختبار، ويبدو أنه إذا كانت التفاعلات، على وجه

التقريب، من النوع المفروض في (21.8) وموجودة، وكانت التأثيرات الرئيسة للعامل A

وللعامل B ، كبيرة، فإن الاختبار يكون فعالاً في كشف وجود التفاعلات. ويُدعى هذا

الاختبار علاقة اختبار توكي بدرجة واحدة من الحرية. ويمكن استعمال هذا الاختبار، أيضاً، لاختبار

وجود تفاعلات عامة.

مثال

ستطبق اختبار توكي في مثال قسط التأمين. والبيانات مقدمة في الجدول (٢١-٢).

ونحصل أولاً على عناصر $SSAB^*$:

$$\sum \sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})(\bar{Y}_j - \bar{Y})Y_{ij} = (120 - 175)(190 - 175)(140) + \dots \\ + (210 - 175)(160 - 175)(200) = -13,500$$

$$\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \frac{SSA}{2} = \frac{9,300}{2} = 4,650$$

$$\sum (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 = \frac{SSB}{3} = \frac{1,350}{3} = 450$$

وبالتالي يكون مجموع مربعات التفاعل:

$$SSAB^* = \frac{(-13,500)^2}{4,650(450)} = 87.1$$

وقد وجدنا سابقاً في الجدول (٢٠١-ب) أن $SSA = 9,300$, $SSTO = 10,750$

و $SSB = 1,350$ ؛ وبالتالي لدينا من (21.12a):

$$SSRem^* = 10,750 - 9,300 - 1,350 - 87.1 = 12.9$$

وأخيراً نحصل من (21.13) على إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{87.1}{1} + \frac{12.9}{3(2) - 3 - 2} = 6.8$$

وبافتراض أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$ ، نحتاج إلى القيمة الجدولية

$F(90; 1, 1) = 39.9$. وبما أن $6.8 \leq F^* = 6.8$ نستنتج أن المنطقة وحجم المدينة لا

يتفاعلان. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.23.

واستخدام نموذج اللافاعل للبيانات في الجدول (٢٠١-أ) يبدو إذن استخداماً له

ما يبرره.

إجراءات علاجية إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة

إذا أشار اختبار توكي إلى وجود تأثيرات تفاعل في تطبيق لتحليل التباين $n = 1$ ،

فينبغي بذل جهود لإزالة التفاعلات بحيث يمكن الاستفادة من التحليل الموصوف في

الفقرة (١٠٢١). وكما وصفنا في الفصل الثامن عشر يمكن، في الغالب، استخدام

التحويلات لإزالة تأثيرات التفاعل أو لجعلها غير ذات أهمية.

ويمكن تجربة تحويلات بسيطة مثل تحويل الجذر التربيعي أو التحويل

اللوغاريتمي، أو يمكن بصورة بديلة البحث ضمن عائلة تحويلات القوة لـ λ الموصوفة

في الفصل الرابع في سياق تحويلات بوكس - كوكس. والطريقة تلتخص في القيام بتحويلات لـ ٢ وفقاً لـ (4.29) وذلك من أجل قيم مختارة لـ ٢. ولكل من قيم ٢ هذه، نحصل على إحصاء اختبار توكي (21.13). وإذا أدت قيمة من قيم ٢ إلى إحصاء اختبار F^* غير معنوية، فسنكون قد عثرنا عندئذٍ على تحويل يزيد تأثير التفاعل. وكثيراً ما نعر على مدى من قيم ٢ التي تقود إلى إحصاءات اختبار غير معنوية، وفي مثل هذه الحالة يمكن اختبار قيمة بسيطة لـ ٢ من ذلك للذي مثل $0.5 = \lambda$.

وإذا لم نستطع العثور على تحويل يجعل التفاعل غير ذي بال، فيمكن استخدام طريقة تحليل تقريبية؛ انظر، مثلاً، المرجع (١-٢١).

ملاحظة

إذا كان أحد العاملين أو كلاهما كمياً، فيمكن، أيضاً، الحصول على اختبار لتأثيرات التفاعل بواسطة طرق الانحدار. وقد نوقشت سابقاً اختبارات الانحدار هذه، الخاصة بتأثيرات التفاعل.

(٣-٢١) اختبارات التحايين عندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها

أسلوب اختبار خطي عام

ذكرنا في فصول سابقة أن أساليب التقدير الأساسية تبقى هي ذاتها قابلة للتطبيق سواء أكانت متوسطات المعالجات متساوية الأهمية أم لا، إلا أن صيغ الاختبار في التحايين المعتاد لا تكون مناسبة عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية. وبدلاً من ذلك، يجب، في العادة، إجراء اختبارات التحايين باستخدام أسلوب الاختبار الخطي العام للمعطى في الفقرة (٨ - ٦) بدلالة المصفوفات، عندما تكون متوسطات المعالجة غير متساوية الأهمية.

وسنعتبر الآن كيفية استخدام أسلوب الاختبار الخطي العام عندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها. وعلى أي حال، نحتاج أولاً إلى التأكيد على أن اختبار تأثيرات التفاعل لا يتأثر بعدم تساوي أهمية متوسطات المعالجات باعتبار أن الاختبار يتعلق بجوازي منحنيات متوسطات للمعالجات أو غياب هذا التوازي. وقد أوضحنا

ذلك في الأشكال (١-١٨)، و(٢-١٨)، و(٣-١٨). وتبنى منحنيات متوسطات المعالجات هذه على متوسطات المعالجات μ_{ijk} مفردة، وبالتالي فهي لا تنطوي على متوسطات لمتوسطات المعالجات. وهكذا نقوم باختيار التفاعلات كما هو موضح في الفقرة (٦-١٨) عندما تكون أحجام العينات متساوية، وكما هو موضح في الفقرة (٢-٢٠) عندما تكون أحجام العينات غير متساوية، وذلك سواء أكان لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها أم لا.

وعندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها يمكن إجراء اختبارات التأثيرات الرئيسة للعوامل بكل سهولة عن طريق العمل بنموذج متوسطات الخلايا (18.15). وبما أن ذلك لا ينطوي على أية مبادئ جديدة، فسنوضح اختبارات التأثيرات الرئيسة بالأمثلة إلى مثال.

مثال. في مثال هرمون النمو في الفصل العشرين جدول (١-٢٠)، من المعروف أن عدد الأطفال الذكور الذين يخضعون لمعالجة هرمون النمو يبلغ ضعف عدد الأطفال الإناث، وتبقى هذه النسبة نفسها في حالة أطفال يعانون اضطرابا حادا أو معتدلا أو طفيفا في تطور العظام. ونرغب في استقرارات تتعلق بالاجتماع المهدف من الأطفال الخاضعين للتدوي. وعلى وجه التحديد نريد اختبار ما إذا كانت حالة تطور العظام تؤثر أو لا تؤثر في تغير معدل النمو. والبدائل إذن هي :

$$H_0: \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} = \frac{2\mu_{12} + \mu_{22}}{3} = \frac{2\mu_{13} + \mu_{23}}{3} \quad (21.15)$$

ليست كل المتساويات صحيحة $H_a:$

وسنعيد عرض البديل H_0 بالطريقة المكافئة التالية:

$$H_0: \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{12} + \mu_{22}}{3} = 0$$

$$H_0: \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{13} + \mu_{23}}{3} = 0 \quad (21.15a)$$

وبما أن H_0 معر عنها بدلالة μ_{ijk} ، فسنستخدم نموذج متوسطات الخلايا بعاملين

:(18.15)

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \alpha_{jk} \quad (21.16)$$

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين ومواقع أخرى في تحليل التباين (تصلين) ٣٨٣

ولفرض هذا النموذج الخطي بدلالة للمصفوفات على الشكل $Y = X\beta + \varepsilon$ ، نعرف المصفوفة X كما هو موضح في (18.19). ويتضمن الجدول (٣-٢١) المصفوفة X والمتجه β لبيانات مثل هرمون النمو في الجدول (١-٢٠) وكان المتجه Y قد أعطي سابقا في الجدول (٢-٢٠)، ومتجه المتوسط $X\beta$ مبيّن، أيضا، في الجدول (٣-٢١). ونرى أن $E\{Y_{gh}\} = \mu_{gh}$ ، كما يقتضي نموذج التحاين (21.16).

ويمكن عرض الفرضية H_0 في (21.15a) الآن كما يلي مستخدمين الشكل

المصفوفي (8.66):

$$H_0: C\beta = b \quad (21.17)$$

حيث

$$C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

جدول (٣-٢١) المصفوفات X ، β و $X\beta$ للنموذج التحاين (21.16)، مثال هرمون النمو

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} \quad X\beta = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{11} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{22} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{23} \\ \mu_{23} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن هذه الصيغة تنتج (21.15a):

$$\mathbf{C}\beta_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)\mu_{11} - \left(\frac{2}{3}\right)\mu_{12} + \left(\frac{1}{3}\right)\mu_{21} - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_{22} \\ \left(\frac{2}{3}\right)\mu_{11} - \left(\frac{2}{3}\right)\mu_{13} + \left(\frac{1}{3}\right)\mu_{21} - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}$$

ولحساب $SSE(R) - SSE(F)$ ، نستعمل (8.70):

$$(\mathbf{C}\mathbf{b}_F - \mathbf{h})(\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{b}_F - \mathbf{h})) \quad (21.18)$$

ونحتاج أولاً للحصول على تقديرات متجه المعامل \mathbf{b}_F . وبما أننا نعلم من (18.29)

أن تقديرات متوسطات المعالجات \bar{y}_{ij} هي تقديرات المربعات الدنيا، فلدينا:

$$\mathbf{b}_F = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} \\ \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{13} \\ \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}_{22} \\ \bar{Y}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.9 \\ .9 \\ 2.4 \\ 2.1 \\ .9 \end{bmatrix}$$

ويمكننا الآن التمييز في (21.18) للحصول على $SSE(R) - SSE(F)$. ولا نقدم

الحسابات المصفوفية باعتبارها مجرد روتين. ونجد:

$$SSE(R) - SSE(F) = 3.454$$

لقد حصلنا في الجدول (٣-٢٠) سابقاً على مجموع مربعات الخطأ للنموذج

التام؛ وهو $SSE(F) = 1.3000$. ودرجات الحرية الموافقة لـ SSE للنموذج التام عددها

$df_F = 8$ ، كما هو مبين في الجدول (٣-٢٠). وعدد درجات الحرية الموافق لـ

$SSE(R) - SSE(F)$ هو $df_R - df_F = s = 2$ وبالتالي، تكون إحصاءة الاختبار الخطي العام

(8.71):

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة للدراسات تتناول عاملين وموضوعين أخرى (في تحليل التباين) (الصفحة) ٢٨٥

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{s} + \frac{SSE(F)}{n-p}$$

$$= \frac{3454}{2} + \frac{13000}{8} = 10.63$$

وإذا كانت H_0 كانت صحيحة، فإن F^* تتبع التوزيع F بدرجتين وثمانين درجات من الحرية وضبط مستوى المنوية عند $\alpha = 0.05$. يتطلب $F(95;28) = 4.64$. وبما أن $F^* = 10.63 > 4.64$ فنستنتج H_0 ، أي أن متوسطات مستوى العامل المرحلة للمجموعات المختلفة لتطور العظام غير متساوية. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.006.

ملاحظة

كان يمكن إجراء اختبار البدائل (21.15a)، أيضا، بتقدير المقارنتين:

$$L_1 = \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{12} + \mu_{22}}{3} \quad L_2 = \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{12} + \mu_{22}}{3}$$

باتباع طريقة المقارنات المتعددة (طريقة بونفرون) وملاحظة ما إذا كانت فروقا الثقة الناتجتان تتضمنان الصفر أم لا.

ترجيحات متناسبة مع أحجام العينات

هناك تبسيطات في تحديد المقدار $SSE(F) - SSE(R)$ في إحصاء الاختبار الخطي العام لاختبار التأثيرات الرئيسة للعاملين A ، B ، عندما تكون ترجيحات متوسطات المعالجات μ_{ij} متناسبة مع أحجام عينات المعالجات n_{ij} . وستكون مثل هذه الترجيحات مناسبة في بعض الظروف.

لنعتبر دراسة مخازن البيع بالتجزئة (القطّاعي) حيث يُراد دراسة تأثيرات حجم المخزن (العامل A) وموقع المخزن ضمن المدينة (العامل B) على الحسائر الناجمة عن سرقة البضائع المعروضة. وستتم استقراعات حول جميع مخازن البيع بالتجزئة في المجتمع المدروس. اختبرت عينة عشوائية من m_1 من مخازن البيع بالتجزئة من مجتمع المخازن كافة، ثم صُنفت المخازن التي وقع عليها الاختيار وفقا لحجمها وموقعها. وسنرمز لحجوم عينات الخلايا الناتجة بـ n_{ij} . وإذا كانت نسب المخازن في فئات "الحجم - الموقع" المختلفة في المجتمع نسباً معروفة، فيمكن استخدام هذه النسب كترجيحات

مناسبة للقيام باستقراعات حول التأثيرات الرئيسة للحجم والموقع، ويمكن استخدام طرق الاختبار الخطي العام الذي ناقشناه ثوتنا. وعلى أي حال، عندما لا تكون هذه النسب معلومة، فيمكن استخدام أحجام عينات الخلايا n_{ij} لتقدير هذه النسب وبالتالي يمكن أن نخدم كترجيحات معقولة.

ولتوضيح هذا، لنفرض أننا استعملنا في دراسة مخازن البيع بالتحزلة فني حجم $\alpha = 2$ ، وثلاث فئات موقع $b = 3$ وأن العينة العشوائية تتضمن $m_T = 60$ غزنا أتنحت بعد تصنيفها أحجام عينات الخلايا n_{ij} التالية:

المجموع	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
29	4	5	20	$i = 1$
31	6	15	10	$i = 2$
60	10	20	30	المجموع

وهكذا يكون $n_{11} = 20$ ، $n_{21} = 10$ ، وهلمحرا. وبالإضافة إلى ذلك، لنرمز بـ $n_{i.}$ لأحجام العينات الكلية لمستويات العامل A والعامل B ، كما عرفناها في (20.1a) و (20.1b) على الترتيب، فلدينا هنا $n_{1.} = 29$ ، $n_{2.} = 30$ ، وهكذا.

وسنطوي اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A عندما تعكس أحجام العينات n_{ij} الأهمية النسبية لمتوسطات المعالجات، على مقارنة المتوسط المرجح للمستوى $i = 1$ للعامل A :

$$\frac{20\mu_{11} + 5\mu_{12} + 4\mu_{13}}{29}$$

والمعوسط المرجح للمستوى $i = 2$ للعامل A :

$$\frac{10\mu_{21} + 15\mu_{22} + 6\mu_{23}}{31}$$

ومعبرا عنها بصورة رمزية، ستكون البدائل:

$$H_0: \left(\frac{n_{11}}{n_{1.}}\right)\mu_{11} + \left(\frac{n_{12}}{n_{1.}}\right)\mu_{12} + \left(\frac{n_{13}}{n_{1.}}\right)\mu_{13} = \left(\frac{n_{21}}{n_{2.}}\right)\mu_{21} + \left(\frac{n_{22}}{n_{2.}}\right)\mu_{22} + \left(\frac{n_{23}}{n_{2.}}\right)\mu_{23}$$

المساواة غير صحيحة: H_a

وبصورة ماثلة، فإن البدائل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B ستكون كما يلي

في مثال هرمون النمو حيث تعكس أحجام العينات أهمية متوسطات المعالجات:

$$H_0: \left(\frac{n_{11}}{n_1}\right)\mu_{11} + \left(\frac{n_{21}}{n_1}\right)\mu_{21} = \left(\frac{n_{12}}{n_2}\right)\mu_{12} + \left(\frac{n_{22}}{n_2}\right)\mu_{22} = \left(\frac{n_{13}}{n_3}\right)\mu_{13} + \left(\frac{n_{23}}{n_3}\right)\mu_{23}$$

ليست كل المتساويات صحيحة: H_0

وبصورة عامة، ستكون البدائل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A عندما تكون

ترجيحات متوسطات المعالجات متناسبة مع أحجام العينات، كما يلي:

$$H_0: \sum_j \left(\frac{n_{1j}}{n_1}\right)\mu_{1j} = \dots = \sum_j \left(\frac{n_{sj}}{n_s}\right)\mu_{sj} \quad (21.19)$$

ليست كل المتساويات صحيحة: H_0

والبدائل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B هي:

$$H_0: \sum_j \left(\frac{n_{1j}}{n_1}\right)\mu_{1j} = \dots = \sum_j \left(\frac{n_{sj}}{n_s}\right)\mu_{sj} \quad (21.20)$$

ليست كل المتساويات صحيحة: H_0

ويمكن الرهان على أنه يمكن تبسيط الحد $SSE(F) - SSE(R)$ لاختبار التأثيرات

الرئيسة للعامل A ، والذي ينطوي على البدائل (21.19)، إلى مجموع مربعات المعالجات

العادي للعامل A مفردة كما ورد في (14.25)، حيث المعالجات هي مستويات العامل A :

$$SSA = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (21.21)$$

وحيث:

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{n_i} \quad (21.21a)$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{n_T} \quad (21.21b)$$

و

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} Y_{ijk} \quad (21.21c)$$

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} Y_{ijk} \quad (21.21d)$$

وبصورة مماثلة، يمكن تبسيط الحد $SSE(R) - SSE(F)$ لاختبار التأثيرات الرئيسية للعامل B ، والذي ينطوي على البدائل (21.20)، إلى مجموع مربعات المعالجات لعامل B منفردة في (14.25) حيث نعتبر مستويات العامل B كمعالجات:

$$SSB = \sum_j n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 \quad (21.22)$$

وحيث:

$$\bar{Y}_j = \frac{Y_j}{n_j} \quad (21.22a)$$

و:

$$Y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} \quad (21.22b)$$

مثال. في مثال هرمون النمو في الجدول (١-٢٠)، لنفرض أن أحجام عينات المعالجات n_{ij} تعكس الأهمية النسبية لتوسطات المعالجات. فقد رأينا في الفصل العشرين أن الجنس (العامل A) وتطور العظام (العامل B) لا يتفاعلان. ونرغب الآن في اختبار ما إذا كان الجنس يؤثر في متوسط تغير معدل النمو. والبدائل (21.19) هي هنا:

$$H_0: \left(\frac{3}{7}\right)\mu_{11} + \left(\frac{2}{7}\right)\mu_{12} + \left(\frac{2}{7}\right)\mu_{13} = \left(\frac{1}{7}\right)\mu_{21} + \left(\frac{3}{7}\right)\mu_{22} + \left(\frac{3}{7}\right)\mu_{23}$$

المساواة غير صحيحة H_0 :

ولحساب SSA في (21.21) نحتاج من الجدول (١-٢٠) لما يلي:

$Y_{1..} = 11.6$	$n_{1.} = 7$	$\bar{Y}_{1.} = 1.65714$
$Y_{2..} = 11.4$	$n_{2.} = 7$	$\bar{Y}_{2.} = 1.62857$
$Y_{..} = 23.0$	$n_{.} = 14$	$\bar{Y} = 1.64286$

وهكذا نجد:

$$SSA = 7(1.65714 - 1.64286)^2 + 7(1.62857 - 1.64286)^2 = .002857$$

وهناك درجة واحدة من الحرية $1 = 2 - 1 = \alpha$ ، موافقة لـ SSA .

وقد وجدنا سابقاً في الجدول (٣-٢٠) أن مجموع مربعات الخطأ للنموذج التام $SSE(F) = 1.3000$ ويرتبط به ثماني درجات من الحرية. وبالتالي تكون إحصاءة

الاختبار الخطي العام:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} + \frac{SSE(F)}{df_F} = \frac{SSA}{1} + MSE(F)$$

$$= \frac{.002857}{1} + \frac{13000}{8} = .018$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F(.95; 1, 8) = 5.32$. وبما أن $0.18 \leq F^* = 0.018$ ، فنستنتج H_0 ، أي أن متوسط تغير معدل النمو هو نفسه للأطفال الذكور والإناث. والقيمة P - للاختبار 0.897 .

وبصورة مماثلة يمكن اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B .

تعليقات

١ - اعتُبرت أحجام عينات الخلايا في البنائات (21.19) و(21.20) كمقادير ثابتة، وليست متغيرات عشوائية. وهكذا، فإن صلاحية البدائل تعتمد على منطقية اعتبار الأحجام الفعلية لعينات الخلايا كمؤشرات لأهمية متوسطات المعالجات.

٢ - ويمكن الحصول، أيضاً، على مجموع المربعات SSA في بسط (21.21)، و SSB في بسط (21.22)، باستخدام أسلوب الانحدار الذي شرحناه في الفصل العشرين في حالة متوسطات معالجة متساوية الأهمية، ووضع المتغيرات المناسبة لتأثير العامل كمتغيرات ابتدائية بغية الحصول على مجموع مربعات إضافي.

وعلى سبيل المثال، يمكن توفيق نموذج الانحدار (20.4) في مثال هرمون النمو

بحيث نحصل على $SSR(X_1)$ ، وسنجد عندئذ:

$$SSA = SSR(X_1)$$

وبصورة مماثلة يمكن الحصول على SSB من خلال:

$$SSB = SSR(X_2) + SSR(X_3 | X_2)$$

٣ - في الحزم الإحصائية SAS و $SPSS$ ، يمكن الحصول على مجموع

المربعات في (21.21) و(21.22) باستخدام مجموع مربعات $PROC GLM-Type I$ و $ANOVA Option 10$ ، على الترتيب. ولا يقدم البرنامج $BMDP2V$ هذه النتائج بصورة مباشرة.

حجوم عينات متناسبة. تقع حالة خاصة من الرجيجات المتناسبة مع أحجام العينات

عندما تتبع أحجام العينات نفسها غطا تناسيبيا. فلنفترض أن سلسلة من مؤسسات الحماية الغذائية تقوم بتجارب على نظامي حمية متساويين الأهمية. وتقدم المؤسسات الطعام لعدد من النساء يبلغ ثلاثة أمثال العدد من الرجال الذين تزودهم بالطعام. اختبر ثلاثمائة امرأة ومائة رجل، وتُخصَّص نصف العدد من كل فئة عشوائيا لكل من نظامي الحمية. وبالتالي، فإن أحجام عينات المعالجات تصبح كما يلي :

الحمية	رجال	نساء	المجموع
1	50	150	200
2	50	150	200
المجموع	100	300	400

ونلاحظ أن أحجام عينات المعالجات تتبع العلاقة:

$$n_{ij} = \frac{n_i n_j}{n_T} \quad (21.23)$$

ويتضمن الشرط (21.23) أن أحجام العينات في أي صفين (أو عمودين) متناسبة، وتدعى حالة كهذه حالة التواترات المتناسبة.

وفي هذه الحالة الخاصة لأوزان متناسبة مع أحجام العينات (أي عندما تكون أحجام العينات متناسبة، أيضا، فيما بينها) لا يُعطى SSA و SSB فقط بالصيغتين البسيطتين (21.21) و (21.22)، على الترتيب، ولكن بمجموع مربعات التفاعل، أيضا، يُعطى بالصيغة البسيطة :

$$SSAB = \sum_i \sum_j n_{ij} (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \quad (21.24)$$

وفضلا عن ذلك، تكون مجاميع المربعات في هذه الحالة الخاصة متعامدة بحيث أن SSA ، SSB ، SSE تجمع مجامعا إلى $SSTO$.
تعليقات

١ - تطبيق الصيغة (21.24) حيثما كانت أحجام العينات متناسبة، وسواء أكانت متوسطات المعالجات متساوية الأهمية أم لا، فكما نعلم سابقا لا يعتمد مجموع مربعات التفاعلات على ترجيحات متوسطات المعالجات.

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين ومواضيع أخرى في تحليل التباين (التحايين) ٣٩١

٢ - عند استخدام أحجام عينات متناسبة ولكن أحجام العينات لا تعكس الأهمية النسبية لتوسطات المعالجات (مثلا، عندما لا تكون أحجام العينات متساوية ولكن لتوسطات المعالجات الأهمية نفسها)، فلا بد من استخدام أسلوب الانحدار أو أسلوب الاختبار الخطي العام اللذين شرحناهما سابقا.

(٤-٢١) نماذج II (مستويات عامل عشوائية) و III (مستويات عامل مخططة) لدراسات

تتضمن عاملين

نموذج تحايين عشوائي

لتعديدراسة تتضمن تأثيرات شغيلة آلة (عامل A) وتأثيرات الآلات (عامل B) على عدد القطع المنتجة في يوم. استخدم في الدراسة خمسة شغيلة وثلاث آلات. إلا أن الاستقرارات سوف لا تقتصر على الشغيلة الخمسة والآلات الثلاث بالذات التي تضمنتها الدراسة، ولكنها زيادة على ذلك ستتناول جميع المشتغلين على الآلات وجميع الآلات المتوفرة في الشركة. وسيكون نموذج التحايين العشوائي (نموذج II) مناسباً لدراسة ذات عاملين. إذ يمكن اعتبار كل من مجموعتي مستويات العاملين عينة من مجتمع (جميع الشغيلة، جميع الآلات) سنخرج باستقرائات حوله.

وفي نموذج تحايين عشوائي لدراسة ذات عاملين، نفرض، بصورة مشابهة لما افترضناه في نموذج تحايين عشوائي لدراسة تتضمن عاملاً واحداً، أن كلا من التأثيرات الرئيسية α_i للعامل A والتأثيرات الرئيسية β_j للعامل B هي متغيرات عشوائية مستقلة، وفضلاً عن ذلك، نفرض أن تأثيرات التفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ متغيرات عشوائية مستقلة. وهكذا يكون نموذج التحايين العشوائي لدراسة ذات عاملين مع أحجام عينات متساوية n على الشكل:

$$Y_{ijk} = \mu. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (21.25)$$

حيث:

$\mu.$ ثابت

$\alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}$ متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة توقعاتها أصفار وتبايناتها، على الترتيب، $\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_{\alpha\beta}^2$.

y_{ijk} مستقلة وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$.

$\alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}$ ، y_{ijk} مستقلة فيما بينها متنى متنى.

$$i = 1, \dots, a ; j = 1, \dots, b ; k = 1, \dots, n$$

والقيمة المتوقعة للملاحظة y_{ijk} في نموذج التحاين هذا هي:

$$E\{y_{ijk}\} = \mu. \quad (21.25a)$$

وتباين y_{ijk} ونرمز له بـ σ_y^2 هو:

$$\sigma^2\{y_{ijk}\} = \sigma_y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2 \quad (21.25b)$$

وهكذا يكون للملاحظات y_{ijk} تباين ثابت. وهي تتوزع طبيعياً لأنها تراكيب خطية في متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة. وفضلاً عن ذلك، وقبل إجراء التجارب العشوائية، تكون الملاحظات المختلفة مستقلة باستثناء تلك الملاحظات من المستوى نفسه للعامل A و/أو من المستوى نفسه للعامل B، حيث تكون مرتبطة بسبب احتوائها لبعض الحدود العشوائية المشتركة.

معنى النموذج، سنشرح معنى الحدود في نموذج التحاين (21.25) من خلال مثال الإنتاج المتضمن لعاملين هما شغيلة آلة والآلات، والتأثير الرئيس للشغيلة i في الدراسة (وقد اختير عشوائياً من مجتمع شغيلة الآلات) هو α_i . وبصورة مماثلة فإن التأثير الرئيس للآلة j (وقد اختيرت عشوائياً من مجتمع الآلات) هو β_j . وفضلاً عن ذلك، فإن التفاعل بين الشغيلة i والآلة j هو $(\alpha\beta)_{ij}$. ويفترض نموذج التحاين (21.25) أن هذه التأثيرات الرئيسة للشغيلة على الإنتاج اليومي تتوزع طبيعياً بمتوسط يساوي الصفر وتباين σ_α^2 . وبصورة مماثلة، فإن التأثيرات الرئيسة للآلات تتوزع طبيعياً بمتوسط يساوي الصفر وتباين σ_β^2 . وأخيراً فإن تفاعلات الشغيلة - آلة تتوزع طبيعياً بمتوسط يساوي الصفر وتباين $\sigma_{\alpha\beta}^2$. وبما أن نموذج التحاين (21.25) يفترض أن هذه التأثيرات الثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة فإن متوسط الإنتاج لمركب الشغيلة i - الآلة j ونقصه

يمكن أن يُنظر إليه في نموذج التحاين العشوائي كـ مجموع اختيارات مستقلة لـ α_i, β_j و $(\alpha\beta)_{ij}$ من ثلاثة توزيعات طبيعية مختلفة.

ملاحظة

نحذر بأنه لا ينبغي استخدام نموذج التحاين العشوائي إلا إذا كانت مستويات كل عامل من العوامل المختلفة تمثل حقا عينة عشوائية من مجتمعات تهتم بها الدراسة.

نموذج تحاين مختلط

عندما ينطوي أحد العاملين على مستويات عامل مثبتة بينما ينطوي الآخر على مستويات عامل عشوائية، يكون نموذج التحاين المختلط (النموذج III) هو النموذج المناسب. وكمثال يمكن أن يكون هذا النموذج مناسباً فيه نسوق دراسة لتأثيرات أربع مواد تدريب مختلفة (عامل A) وخمسة معلمين (عامل B) على التعلّم في برنامج تدريبي في شركة. ويمكن اعتبار المستويات الأربعة للمواد التدريبية مثبتة، باعتبار أن الاهتمام يتركز على مواد التدريب المستخدمة بالذات. وعلى الوجه الآخر، يمكن النظر إلى مستويات المعلمين على أنها عشوائية باعتبار أن الاستقرارات ستجري حول مجتمع المعلمين الذي يشكل المعلمون الخمسة المستخدمون في الدراسة عينة منه.

وعندما تكون مستويات العامل A مثبتة ومستويات العامل B عشوائية فإن التأثيرات α_i تكون ثوابت، وتكون التأثيرات β_j متغيرات عشوائية. وتأثيرات التفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ هي، أيضاً، متغيرات عشوائية لأن مستويات العامل B عشوائية. ونموذج التحاين المختلط والبسيط نسبياً لمثل هذه الحالة حيث A عامل التأثيرات المثبتة، و B عامل التأثيرات العشوائية، واختبرت حجوم عينة ثابتة n لكل معاملة، هو:

$$Y_{ijk} = \mu.. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (21.26)$$

حيث:

$\mu..$ ثابت.

α_i ثوابت خاضعة للقيود $\sum \alpha_i = 0$.

β_j مستقلة وتبع التوزيع $N(0, \sigma_{\beta}^2)$

$(\alpha\beta)_{ij}$ تتبع التوزيع $N(0, \frac{a-1}{a} \sigma_{\alpha\beta}^2)$ خاضعة للقيود:

$$\sum_i (\alpha\beta)_i = 0$$

$$\sigma\{(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\beta)_{i'j'}\} = -\frac{1}{a} \sigma_{\alpha\beta}^2 \quad i \neq i'$$

ϵ_{ijk} مستقلة وتبع التوزيع $N(0, \sigma^2)$.

$(\alpha\beta)_{ij}$ و ϵ_{ijk} مستقلة متى متى.

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$$

لاحظ في نموذج التحاين المختلط هذا أننا نفرض استقلال أي حدود تفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ و $(\alpha\beta)_{i'j'}$ ، ما لم يشر كل منهما إلى المستوى العشوائي نفسه للعامل B ، الحالة التي يكونان فيها مرتبطتين سلباً.

وفي نموذج التحاين المختلط (21.26)، تكون القيمة المتوقعة للملاحظة Y_{ijk} هي:

$$E(Y_{ijk}) = \mu + \alpha_i \quad (21.26a)$$

وتباين Y_{ijk} هو:

$$\sigma^2(Y_{ijk}) = \sigma_i^2 = \sigma_\beta^2 + \frac{a-1}{a} \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2 \quad (21.26b)$$

وهكذا يكون للملاحظات Y_{ijk} تباين ثابت. وفضلاً عن ذلك، فهي تتوزع طبيعياً لأنها تراكيب خطية في متغيرات عشوائية مستقلة. وأخيراً، تكون الملاحظات المختلفة، قبل إجراء التجربة العشوائية، مستقلة باستثناء مشاهدات من المستوى العشوائي نفسه للعامل B ، حيث تكون مرتبطة بسبب أنها تتضمن حدوداً عشوائية مشتركة وبعض الحدود العشوائية المرتبطة. وسنقدم في الفصل الخامس والعشرين مناقشة أكثر تفصيلاً للارتباط بين الملاحظات في نماذج التحاين المختلطة.

تعليقات

١ - سبب التبعية عن تباين حدود التفاعل في نموذج التحاين (21.26) على الشكل $(a-1)\sigma_{\alpha\beta}^2 / a$ بدلاً من الشكل البسيط $\sigma_{\alpha\beta}^2$ هو توخّي البساطة في عبارة توقع متوسط المربعات، مما يسهل القيام باستقراعات في هذا النموذج.

٢ - لاحظنا أن النموذج (21.26) يفترض $\sum_i (\alpha\beta)_i = 0$ ، وسوف لا تكون

عادة مساوية للصفر.

٣ - هناك صياغة لنماذج تحايين معقدة أكثر تعقيدا.

(٥-٢١) اختبارات تحليل التباين للنموذجين II و III

في كل من نموذجي التحايين المختلط والعشوائي لعاملين، تتطابق حسابات تحليل التباين لمجموع المربعات مع تلك الخاصة بنموذج تحايين مثبت. وهكذا، فإن الصيغ (18.40)-(18.38) قابلة للتطبيق تماما في نموذجي التحايين II و III. وبصورة مماثلة، فإن تحديد درجات الحرية ومتوسط المربعات هو بالضبط كما في نموذج التحايين المثبت، أي كما هو مبين في الجدول (٩-١٨). ولا يختلف نموذجنا التحايين العشوائي والمختلط عن نموذج التحايين المثبت إلا في توقع متوسطات المربعات والاختيار الذي يتبع ذلك لإحصاء الاختبار المناسبة.

توقع متوسطات المربعات

يمكن استنباط توقع متوسط المربعات في نموذجي التحايين العشوائي والمختلط بالاستفادة من خواص النموذج وتطبيق نظريات التوقع المتتادة. وهي مبينة في الجدول (٤-٢١)، مع ما يقابلها في نموذج التحايين المثبت. والاشتقاق عويصة إلا أن قواعد بسيطة قد استنبطت لإيجاد توقع متوسط المربعات لنماذج التحايين العشوائية والمختلطة، ونستأنف الحديث عن هذه القواعد في الفصل السابع والعشرين.

ملاحظة

ولإيضاح استنباط توقع متوسطات مربعات باستخدام نظريات التوقع، سنحدد $E(MSA)$ لنموذج تحايين عشوائي بعاملين (21.25). ونرغب في إيجاد:

$$E(MSA) = E\left\{\frac{nb \sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{a-1}\right\}$$

والآن :

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_j \sum_k [\mu_- + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}] \\ &= nb\mu_- + nb\alpha_i + n \sum_j \beta_j + n \sum_j (\alpha\beta)_{ij} + \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

ومنه نجد:

جدول (٤-٩) توقع متوسطات المربعات في دراسات تتضمن عاملين				
مستويات مختلفة للعاملين	مستويات عشوائية	مستويات عشوائية	df	متوسط مربعات
مستويات مختلفة للعاملين	مستويات عشوائية	مستويات عشوائية	df	متوسط مربعات
(A و B مشترك و B مشترك)	(A و B مشترك)	(A و B مشترك)	(A و B مشترك)	(A و B مشترك)
$\sigma^2 + nb \frac{\sum a_i^2}{a-1} + n\sigma_a^2$	$\sigma^2 + nb \sigma_a^2 + n\sigma_b^2$	$\sigma^2 + nb \frac{\sum a_i^2}{a-1}$	$a-1$	MSA
$\sigma^2 + n\sigma_b^2$	$\sigma^2 + n\sigma_b^2$	$\sigma^2 + nb \frac{\sum b_j^2}{b-1}$	$b-1$	MSB
$\sigma^2 + n\sigma_{ab}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{ab}^2$	$\sigma^2 + n \frac{\sum (ab)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$(a-1)(b-1)$	$MSAB$
σ^2	σ^2	σ^2	$(n-1)nb$	MSE

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة للدراسات تتناول عاملين وموضوع أخرى في تحليل التباين (التحليل) ٣٩٧

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{nb} = \mu_{..} + \alpha_i + \bar{\beta}_{..} + (\overline{\alpha\beta})_{i.} + \bar{\varepsilon}_{i.} \quad (21.27)$$

حيث يشير المخطط كالمعتاد إلى عملية أخذ المتوسط فوق الأدلة التي حلت محلها نقاط. وبصورة مماثلة نجد:

$$\bar{Y}_{..} = \mu_{..} + \bar{\alpha}_{..} + \bar{\beta}_{..} + (\overline{\alpha\beta})_{..} + \bar{\varepsilon}_{..} \quad (21.27a)$$

وبالتالي، لدينا:

$$\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} = (\alpha_i - \bar{\alpha}_{..}) + [(\overline{\alpha\beta})_{i.} - (\overline{\alpha\beta})_{..}] + (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) \quad (21.28)$$

وبتوزيع طرفي (21.28) والجمع، نجد:

$$\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha}_{..})^2 + \sum_i [(\overline{\alpha\beta})_{i.} - (\overline{\alpha\beta})_{..}]^2 \quad (21.29)$$

حدود جدالية

$$+ \sum_i (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 +$$

ولإيجاد $E\left\{\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2\right\}$ ، نحتاج إلى أخذ توقع كل حد في الجانب الأيمن.

وتسقط الحدود الجدالية من الاعتبار نظرا لاستقلال α_i ، $(\alpha\beta)_{ij}$ و ε_{ijk} ، والحقيقة أن توقع كل من هذه المتغيرات العشوائية هو الصفر. ويمكن التفكير في كل من الحدود الباقية على أنه البسط في تباين عينة من a من المشاهدات، ونعلم من حقيقة أن تباين عينة غير منحاز أن:

$$E\left\{\sum_{i=1}^a (Y_i - \bar{Y})^2\right\} = (a-1)\sigma^2(Y_i) \quad (21.30)$$

وبالتالي:

$$E\left\{\sum_i (\alpha_i - \bar{\alpha}_{..})^2\right\} = (a-1)\sigma_{\alpha}^2 \quad (21.31)$$

ذلك لأن $\sigma^2\{\alpha_i\} = \sigma_{\alpha}^2$ وبصورة مماثلة، نجد:

$$E\left\{\sum_i (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right\} = (a-1)\frac{\sigma^2}{bn} \quad (21.32)$$

باعتبار أن $\sigma^2\{\bar{\varepsilon}_{i.}\} = \frac{\sigma^2}{bn}$ و:

$$E\left\{\sum_i [(\overline{\alpha\beta})_{i.} - (\overline{\alpha\beta})_{..}]^2\right\} = (a-1)\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b} \quad (21.33)$$

وباستخدام (21.33) - (21.31) نجد:

$$E\left\{\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right\} = (a-1)\sigma_a^2 + (a-1)\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b} + (a-1)\frac{\sigma^2}{bn} \quad (21.34)$$

و:

$$E\{MSA\} = \frac{nb}{a-1} E\left\{\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right\} = nb\sigma_a^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2 \quad (21.35)$$

وهي النتيجة المبينة في الجدول (٤-٢١).

إنشاء إحصاء اختبار

كالمعتاد ينشأ كل إحصاء لاختبار تأثيرات عامل عن مقارنة متوسطي مربعات يتمتعان بالخواص التالية:

- ١- تحت الفرضية H_0 لكل منهما التوقع نفسه.
- ٢- تحت الفرضية H_a يكون توقع متوسط المربعات في البسط أكبر من توقع متوسط المربعات في المقام.

ويمكن الزعم على أن إحصاء الاختبار تتبع التوزيع F إذا كانت H_0 صحيحة. وتوضع قاعدة القرار بالطريقة المعتادة حيث تؤدي القيم الكبيرة لإحصاء الاختبار إلى H_a . وعلى سبيل المثال، لاختبار وجود تأثيرات رئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي (21.25)، ونقصد:

$$H_0: \sigma_a^2 = 0 \quad (21.36)$$

$$H_a: \sigma_a^2 > 0$$

ونرى من الجدول (٤-٢١) أن MSA و $MSAB$ هما التوقع نفسه إذا كان $\sigma_a^2 = 0$ ، أي إذا لم يكن للعامل A تأثيرات رئيسة. وإذا كان $\sigma_a^2 > 0$ ، فإن $E\{MSA\}$ أكبر من $E\{MSAB\}$. وبالتالي تكون إحصاء الاختبار المناسبة:

$$F^* = \frac{MSA}{MSAB} \quad (21.37)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند المستوى α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha; a - 1, (a - 1)(b - 1)] \quad (21.38)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* > F[1 - \alpha; a - 1, (a - 1)(b - 1)]$$

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين وموضوع أخرى في تحليل البيانات (التحان) ٣٩٩

ونلاحظ أن المقام عند اختبار التأثيرات الرئيسية لعامل A في نموذج التحان العشوائي هو $MSAB$ ، بينما يكون في نموذج التحان للمثبت MSE .

ونلخص في الجدول (٥-٢١) إحصاءات الاختبار المناسبة لنموذجي التحان المختلط والعشوائي. ولأغراض المقارنة، نقدم في الجدول، أيضا، إحصاءات الاختبار لنموذج التحان للمثبت، وكما نرى من الجدول (٥-٢١) ، يختلف مقام إحصاء الاختبار في نموذجي التحان المختلط والعشوائي عنه في نموذج التحان للمثبت، وذلك في عدد من الحالات. وبالتالي، فمن المهم أن يكون توقع متوسط المربعات معروفا عند استخدام نماذج عشوائية أو مخططة بحيث يمكن تحديد إحصاء الاختبار المناسبة.

جدول (٥-٢١) إحصاءات اختبار لنماذج تحان مخططة وعشوائية ومفيدة.

اختبار وجود تأثيرات رئيسية لـ	نموذج تحان مثبت (A و B ثابتان)	نموذج تحان عشوائي (A و B عشوائيان)	نموذج تحان مختلط (A مثبت، B عشوائي)
العامل A	MSA / MSE	$MSA / MSAB$	$MSA / MSAB$
العامل B	MSB / MSE	$MSB / MSAB$	MSB / MSE
التفاعلات AB	$MSAB / MSE$	$MSAB / MSE$	$MSAB / MSE$

مثال

نعود إلى مثال التحان المختلط السابق وفيه أربع مواد تدريب مختلفة (عامل A ، مثبت) وخمسة معلمين (عامل B ، عشوائي). وقد امتُحنت أربعة صفوف من أجل كل مركب مادة تدريب - معلم. وبين الجدول (٦-٢١) تحليل التباين كما أعطته حزمة حاسب خاصة بدراسات عاملين ، والبيانات الأصلية غير معطاة. ولاختبار ما إذا كانت مواد التدريب تتفاعل مع المعلمين أم لا:

$$H_0: \sigma_{\mu\theta}^2 = 0$$

$$H_a: \sigma_{\mu\theta}^2 > 0$$

نستخدم وفقا للجدول (٥-٢١) إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE}$$

ومستعلمين النتائج في الجدول (٦-٢١) نجد:

$$F^* = \frac{3.9}{2.1} = 1.86$$

جدول (٦-٢١) جدول تخمين لنموذج تخمين مخطط يتناول مثال التدريب (A) مثبت، B عشوائي،
(n = 4, b = 5, a = 4).

مصدر التغير	SS	df	MS	F*
العامل A (المواد التدريبية - مثبت)	42	3	14.0	14.0/3.9 = 3.59
العامل B (المعلمون - عشوائي)	54	4	13.5	13.5/2.1 = 6.43
التفاعل AB	47	12	3.9	3.9/2.1 = 1.86
الخطأ	126	60	2.1	
المجموع	269	79		
				$F(95; 3, 12) = 3.49$
				$F(95; 4, 60) = 2.53$
				$F(95; 12, 60) = 1.92$

وعند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، نحتاج إلى $F(95; 12, 60) = 1.92$. وبما أن $F^* = 1.86 \leq 1.92$ ،

نستنتج أن مواد التدريب والمعلمين لا تتفاعل. والقيمة P- لهذا الاختبار هي 0.06.

ويبين الجدول (٦-٢١) إحصاءتي الاختبار لاختبار التأثيرات الرئيسة لمواد التدريب والتأثيرات الرئيسة للمعلمين، وبمقارنة إحصاءتي الاختبار مع المئينات المناسبة للتوزيع F المعطاة في أسفل الجدول (٦-٢١) عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، نجد أن فعاليات المعلمين مختلفة وتأثيرات مواد التدريب مختلفة.

ملاحظة

في حال وجود مشاهدة واحدة لكل معالجة ($n = 1$)، فكما نذكر من الفقرة (١-٢١) لا يمكن إجراء اختبارات مضبوطة مع نموذج تخمين مثبت لعاملين ما لم يكن ممكناً تعديل النموذج. والسبب هو أن $MSE = 0$ دائماً في حالة كهذه مما لا يسمح بالحصول على تقدير لـ σ^2 . ويشير الجدول (٤-٢١) إلى إمكانية القيام باختبارات مضبوطة للتأثيرات الرئيسة لكل من العامل A والعامل B مع نموذج تخمين عشوائي فيه ($n = 1$)، ودون أية قيود مفروضة حول التفاعلات. وذلك بسبب أن $MSAB$ هو المقام

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين وموضوع لآخر في تحليل التباين (التحانين) ٤٠١

المناسب لإحصاءة الاختبار هنا، ويمكن تحديد $MSAB$ بصرف النظر عن حجم العينة. ومع نموذج تحانين مختلط حيث العامل A مثبت، يمكن، أيضا، اختبار وجود التأثيرات الرئيسية للعامل A عندما $n=1$ دون الحاجة إلى فرض تقيد التفاعلات. إلا أن الاختبار للضبط للتأثيرات الرئيسة للعامل B سيحتاج إلى الافتراض بأن جميع لفاعلات صفر، أو إلى تعديل ما لنموذج التحانين.

(٦-٢١) تقدير تأثيرات عامل في النموذجين II و III

تقدير مركبات التباين

في حالة عوامل عشوائية تأثيراتها الرئيسة مهمة ، نرغب في الغالب بتقدير مقدار مركبة التباين. ويمكننا بسهولة استنباط مقدرات نقطية غير منحازة، مستخدمين تراكيب خطية لتوقعات متوسطات المربعات في الجدول (٤-٢١). وفي نموذج التحانين العشوائي، مثلا ، يمكن تقدير σ_a^2 بملاحظة أن :

$$E\{MSA\} - E\{MSAB\} = \sigma^2 + nb\sigma_a^2 + n\sigma_{ab}^2 - \sigma^2 - n\sigma_{ab}^2 = nb\sigma_a^2$$

وبالتالي فإن المقدّر التقطي غير المنحاز لـ σ_a^2 هو:

$$s_a^2 = \frac{MSA - MSAB}{nb} \quad (21.39)$$

مثال في مثال التدريب في الجدول (٦-٢١)، وجدنا للعامل العشوائي B تأثيرات مهمة. ولتقدير σ_B^2 نستفيد من توقعات متوسطات المربعات في الجدول (٤-٢١) لنموذج مختلط فيه العامل A مثبت، والعامل B عشوائي، ونحدد مقدرا نقطيا غير منحاز كما يلي:

$$s_B^2 = \frac{MSB - MSE}{na} \quad (21.40)$$

وبالتعويض نجد:

$$s_B^2 = \frac{135 - 21}{16} = .71$$

تقدير التأثيرات المثبتة في نموذج مختلط

عندما تكون التأثيرات الرئيسة لعامل مثبت، في نموذج مختلط لعاملين، تأثيرات

ذات أهمية، فترغب عادة في الحصول على تقديرات لهذه التأثيرات على شكل مقارنات، ومناقشتنا السابقة في الفصل التاسع عشر لنموذج تحاين مثبت ذي عاملين قابلة للتطبيق هنا، مع تغيير رئيس يظهر في التباين المقدر للمقارنة، وفي نموذج التحاين المثبت يتضمن التباين المقدر MSE ، كما هو مبين مثلاً، في (19.8) ولكن، عند التعامل مع نموذج مختلط، لا يعود متوسط المربعات المناسب الذي نستعمله في صيغة التباين المقدر MSE . وهناك قاعدة بسيطة تخبرنا بمتوسط المربعات المناسب، ونعني ذلك المتوسط المستخدم في مقام إحصائية اختبار وجود تأثيرات رئيسة للعامل المثبت المدروس. وعلى سبيل المثال، مع النموذج المختلط (21.26) حيث A هو العامل المثبت، يكون $MSAB$ هو متوسط المربعات المناسب (جدول ٥-٢١). ودرجات الحرية عند وضع فترة ثقة هي تلك الموافقة لمتوسط المربعات المستخدم لتقدير تباين المقارنة.

مثال. في مثال التدريب في الجدول (٦-٢١) لم نثر على تأثيرات تفاعل. ونرغب في تقدير الفرق بين متوسطي مقدارتي التعلم عند استخدام مادتي التدريب 1 و 2 مستخدمين 95% فترة ثقة. ونتائج العينة ذات الصلة هي:

$$\bar{Y}_1 = 43.1 \quad \bar{Y}_2 = 40.8$$

وبالتالي يكون تقديرنا لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\hat{D} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 43.1 - 40.8 = 2.3 \quad (21.41)$$

وباستخدام الصيغة (19.16b) حيث نحل $MSAB$ محل MSE ، يكون التباين المقدر:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSAB}{bn} \quad (21.42)$$

وفي مثالنا، لدينا:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(39)}{20} = 3.9$$

أو $s\{\hat{D}\} = 0.62$. وعدد درجات الحرية الموافق لـ $MSAB$ هو 12، وبالتالي نجد $t(975; 12) = 2.179$ ويكون حدا الثقة بالتالي $2.3 \pm 2.179(0.62)$ وتكون فترة الثقة المرغوبة:

$$0.9 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 3.7$$

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة للدراسات تتناول عاملين وموضوع آخرى في تحليل التباين (التحايين) ٤.٣

وهكذا نستنتج بمعامل ثقة 0.95 أن المادة التدريبية 1 أكثر فعالية من المادة التدريبية 2، كون متوسطها أكبر بما يؤولح بين 0.9 و 3.7 وحدة قياس. طرق المقارنات المتعددة. يمكن الاستفادة من طرق المقارنات المتعددة في حالة التأثيرات الرئيسية لعامل مثبت في نموذج تحايين مختلط بالطريقة نفسها المطبقة عندما يكون نموذج التحايين مثبتا. وفي التباين المقدر للمقارنة نحتاج ببساطة إلى استبدال متوسط مربعات مناسب بـ MSE . وعلى سبيل المثال، لنفرض أننا نرغب في الحصول على جميع المقارنات الثنائية بين مواد التدريب المختلفة في مثال التدريب في الجدول (٦-٢١) بتطبيق طريقة توكي. فسنحسب $\{D\}^2$ كما في المثال السابق. والعامل T في (c 19.16) سيكون الآن:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1 - \alpha; a, (a-1)(b-1)] \quad (21.43)$$

حيث حلت $(a-1)(b-1)$ محل $(n-1)$ كدرجات حرية موافقة لمتوسط المربعات المستخدم. وبالإشارة إلى مثال التدريب بالذات المعطى في الجدول (٦-٢١)، فلأننا كي نضع فترات بمعامل ثقة عالى يساوي 95% لجميع المقارنات الثنائية بين مواد التدريب نحتاج إلى:

$$q(95; 4, 12) = 4.20$$

و:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} (4.20) = 2.97$$

المرجع المذكور

[21.1] Johnson, D. E., and F. A. Graybill. "Estimation of σ^2 in a To-Way Classification Model with Interaction." *Journal of the American Statistic Association* 67 (972), pp. 388 - 94.

مسائل

(١-٢١) لنفرض أننا نريد تطبيق نموذج تحليل التباين لعاملين (18.23) مع $n = 1$ لكل مركب من مستويات العاملين. ما هو عدد درجات الحرية الموافقة لـ SSE في (18.38)؟ ماذا يقتضي ذلك؟

(٢٠٢١) طرفيات تُدار بالعملة. قام مركز الحاسب في جامعة بتجربة وضعت فيها طرفية حاسب تدار بالعملة في كل من أربعة مواقع مختلفة في الحرم الجامعي في الفصل الأخير وذلك خلال الأسبوع الذي يتوسط الفصل الدراسي. وكذلك خلال الأسبوع الأخير من الدراسة. ويقدم البيان التالي عدد الساعات التي بقيت فيها كل طرفية بلون استخدام خلال الأسبوع وذلك في المواقع الأربعة (عامل A) وفي كل من الأسبوعين (عامل B).

$j = 2$	$j = 1$	
نهائي		
21.4	16.5	$i = 1$
17.3	11.8	$i = 2$
16.9	12.3	$i = 3$
21.9	16.6	$i = 4$

افترض أن نموذج التحاين بدون تفاعل (21.1) هو النموذج المناسب.

أ - لرسم البيان في هيئة الشكل (٥-١٨). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة؟ ناقش.

ب - قم باختبارات منفصلة للتأثيرات الرئيسة للأسبوع والموقع. وفي كل اختبار استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. إعط حداً أعلى لمستوى المعنوية المائلي؛ استخدم متباينة كيمبل . ماهي القيمة P لكل اختبار؟

ج - قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الموقع وقدر الفرق بين متوسطي الأسبوعين، استخدم طريقة بونفيروني. معامل ثقة عالي 90%. اعرض نتائجك.

(٢٠٢١) بالإشارة إلى مسألة الطرفيات التي تُدار بالعملة رقم (٢٠٢١). نرغب في تقدير μ_{92} .

أ - أوجد تقديراً نقطياً لـ μ_{92} مستخدماً (21.7b).

ب - تحقق من التقدير النقطي μ_{92} الذي حصلت عليه في (أ) مستخدماً

(21.7) و (21.7a) . اعرض للمصنفين C و A اللتين استعملتهما.

جـ - أوجد التباين المقدر لـ $\hat{\mu}_{22}$ إرشاد: استعمل (6.47) ولاحظ أن

$$A [(MSE) I] A' = (MSE) A$$

د - ضع 95% قوة ثقة لـ μ_{22} . فسر تقديرك بقوة. هل يمكن تطبيق تقديرك

بقوة إذا وضع في العام القادم ثلاث طرقيات في الموقع ٢٣ اشرح.

(٤-٢١) بالإشارة إلى مسألة الطرقيات التي تُدار بالعملة رقم (٢١-٢) طبق اختبار

توكي للجمعية، استعمل $\alpha = 0.025$. اعرض البدائل، قاعدة القرار،

والنتيجة. إذا كان النموذج التجميعي غير مناسب، فماذا يمكنك أن تفعل؟

(٥-٢١) أفكار مفاجئة. تخمّر باحث ما إذا كانت الأفكار المفاجئة أكثر فعالية في

الفئات الأكبر منها في الفئات الأصغر، وذلك بتشكيل أربع فئات من

الإداريين في مجال الأعمال الزراعية، وكانت أحجام الفئات اثنين وثلاثة

وأربعة وخمسة، على الترتيب. وكذلك شكّلت أربع فئات من العلماء في

مجال الأعمال الزراعية، وكانت أحجام الفئات كما في حالة الإداريين. وقد

أعطى الباحث المسألة نفسها لكل فئة: "كيف يمكن لكندا أن تزيد من قيمة

صادراتها الزراعية؟" وقد أعطيت كل فئة ثلاثون دقيقة لتوليد الأفكار.

وكان المتغير موضع الاهتمام هو عدد الأفكار المختلفة المقترحة من كل فئة.

وكانت النتائج بعد تصنيفها وفق نوع الفئة (عامل A) وحجم الفئة (عامل

B) كما يلي:

العامل B (حجم الفئة)					العامل A (نوع الفئة)
j = 4	j = 3	j = 2	j = 1		
خمسة	أربعة	ثلاثة	اثنان		
32	31	22	18	إداريون زراعيون	i = 1
33	29	23	15	علماء زراعيون	i = 2

افترض أن نموذج التباين بدون تفاعل (21.1) هو النموذج المناسب.

أ - ارسم البيان في هيئة الشكل (٥-١٨). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟

هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة؟ ناقش.

ب - قم باختبارات منفصلة للتأثيرات الرئيسة لنوع الففة وحجم الففة. وفي كل اختبار استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. واعرض البدائل وقاعدة القرار، والنتيجة، إعط حداً أعلى لمستوى المعنوية المعاكس؛ استخدم متباينة كيميل. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

ج - أوجد فترات ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2, D_1 = \mu_3 - \mu_2, D_2 = \mu_3 - \mu_3, D_3 = \mu_4 - \mu_3$ استخدم طريقة بونفرونو. معامل ثقة عاكلي يساوي 95%. اعرض نتائجك.

د - هل طريقة بونفرونو المستخدمة في الجزء ج الطريقة الأكثر كفاءة؟ اشرح.

(٦-٢١) بالإشارة إلى مسألة الأفكار المفاجئة (٥-٢١). نرغب بتقدير μ_{14} .

أ - أوجد تقديراً نقطياً لـ μ_{14} مستخدماً (21.7b).

ب - تحقق من التقدير النقطي $\hat{\mu}_{14}$ الذي حصلت عليه في (أ) مستخدماً (21.7) و (21.7a) اعرض المصنفين C و A المستعملين.

ج - أوجد التباين المقدر لـ $\hat{\mu}_{14}$ إرشاد : استخدم (6.47) ولاحظ أن:

$$A(MSE) \mid A' = (MSE) A$$

د - ضع 99% فترة ثقة لـ $\hat{\mu}_{14}$. فسّر تقديرك بفترة. هل يقى تقديرك بفترة قابلاً للتطبيق إذا كان العاملان متفاعلين؟

(٧-٢١) بالإشارة إلى مسألة الأفكار المفاجئة (٥-٢١). نفذ اختبار توكي للتحميمية

مستخدماً $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. إذا لم يكن نموذج التحميمية مناسباً، فماذا يمكنك عمله؟

(٨-٢١) سحق فول الصويا. يريد خبير بتقنية الطعام أن يختبر القابليات التخزينية

لنوع مطور حديثاً من تقليد للسحق مصنوع من فول الصويا. وقد قام بتجربة لاختبار تأثيرات مستوى درجة الحرارة (عامل A) ومستوى الرطوبة (عامل B) في حيوية التحميد على تغير اللون في السحق. وقد تضمنت الدراسة ثلاثة مستويات رطوبة وأربعة مستويات درجة حرارة. وقد حُزنت

حسمائة قطعة سحق في كل من مركبات الدرجة - الرطوبة الإثنى عشرة ولمدة 90 يوما. وفي نهاية فترة التعزير حدد الباحث نسبة السحقات التي أظهرت تغيرات في اللون وذلك لكل من المركبات الإثنى عشرة. وقام الباحث بتحويل البيانات وفقا لتحويل قوس الجيب (16.19) كي يجعل البيانات مستقرة. وفيما يلي البيانات المحولة $Y' = 2 \arcsin \sqrt{Y}$:

العامل B (مستوى درجة الحرارة)				العامل A
j = 4	j = 3	j = 2	j = 1	(مستوى الرطوبة)
24.8	20.5	14.2	13.9	i = 1
23.6	21.7	16.3	15.7	i = 2
26.1	19.9	15.4	15.1	i = 3

افترض أن نموذج التحاين بدون تفاعل هو النموذج المناسب.

- ارسم البيان في هيئة الشكل (٥-١٨). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة؟ ناقش.
- قم باختبارين منفصلين للتأثيرات الرئيسة للرطوبة وللدرجة الحرارة. واستخدم في كل اختبار مستوى معنوية 0.025. $\alpha =$ ، واعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P لكل اختبار؟
- ضع فترات ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$, $D_1 = \mu_2 - \mu_3$, $D_2 = \mu_3 - \mu_4$, $D_3 = \mu_4 - \mu_1$ واستخدم طريقة بونفروني. معاميل ثقة عائلي يساوي 95%. اعرض نتائجك.
- هل طريقة بونفروني المستخدمة في الجزء ج الطريقة الأكثر كفاءة هنا؟ اشرح.

(٩-٢١) بالإشارة إلى مسألة سحق فول الصويا (٨-٢١). نرغب في تقدير μ_{22}

أ - أوجد تقديرا نقطيا لـ μ_{22} مستخدما (21.7B)

ب - تحقق من التقدير التقطي $\hat{\mu}_{22}$ الذي حصلت عليه في الجزء أ مستخدما (21.7) و (21.7a). أعرض المصفوفتين C و A المستخدمتين.

ج - أوجد التباين المقدر لـ $\hat{\mu}_{22}$. إرشاد: استخدم (6.47) ولاحظ أن

$$[A(MSE)I]A' = (MSE)A$$

د - ضع 98% فوة ثقة ل μ وحولها عائدا إلى وحدات القياس الأصلية. فسّر

تقديرك بفترة. وهل يبقى تقديرك بفترة قابلا للتطبيق إذا تفاعل العاملان؟

(٢١-١٠) بالإشارة إلى مسألة مسجق فول الصويا (٢١-٨). نفذ اختبار توكي

للتجمعية مستخدما $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. ماذا

يمكنك عمله إذا لم يكن النموذج التجميعي مناسباً؟.

(٢١-١١) بالإشارة إلى مسألة العروض النقدية (١٨-١٠). من المعروف أنه في كل

من مجتمعي المالكين الذكور والمالكين الإناث، 30% قتيان، 60% متوسطو

العمر، و10% متقدمون في السن. اختر باستخدام إحصائية الاختبار *

بلوحة واحدة من الحرية ما إذا كان متوسطا العروض النقدية للذكور

وللإناث متساويين أم لا؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار،

والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

(٢١-١٢) بالإشارة إلى مسألة معالجة القصور الكلوي في مستشفى (١٨-١٨)، ومع

الاستمرار في التعامل مع البيانات المحولة $Y' = \log_{10}(Y + 1)$ من المعروف أن

75% من المرضى في كل فئة من فئات زيادة الوزن يتلقى للعلاج قصيرة الأمد.

أ - استخدم نموذج متوسطات الخلايا (18.15) للتعبير عن البديلين في

اختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا.

ب - عرف المصفوفة X والمتجه β للتعبير عن النموذج الكامل (18.15) في

هذه الحالة بشكل مصفوفي.

جـ - عر عن البديلين في الجزء أ بالشكل المصفوفي (8.66).

د - استخدم (8.70) لحساب $SSE(R) - SSE(F)$.

هـ - اختر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا؛ استخدم

$\alpha = 0.05$. اعرض قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار ؟

و - قارن متوسط عدد أيام الاستشفاء (بالوحدات المحولة) لمرضى من فئتي

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة للدراسات تتناول علمين ومواضيع أخرى في تحليل التباين (تحتوي) ٤٠٩

زيادة الوزن الحادة والمعتدلة؛ استخدم 95% فترة ثقة.

(١٣-٢١) بالإشارة إلى مسألة الأساتذة للمحققين (٦-٢٠). من المعروف أن 10% من الأساتذة في كل اختصاص يحملون درجة البكالوريوس، 20% يحملون شهادة للمحاسب، و 70% يحملون شهادة الدكتوراه.

أ - استخدم نموذج متوسطات الخلأيا (18.15) للتعبير عن البديلين في اختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة أم لا.
ب - عرف المصفوفة X والمتجه β للتعبير عن النموذج (18.15) في هذه الحالة بشكل مصفوفي.

ج - عر عن البديلين في الجزء (أ) بالشكل المصفوفي (18.15).

د - استخدم (8.10) لحساب $SSE(F)$ - $SSE(R)$.

هـ - اختر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة؛ استخدم $\alpha = 0.01$.

اعرض قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟
و - قارن متوسطي المدفوعات التي يتلقاها أعضاء هيئة تدريس يعلمون مقررات إنسانية وأعضاء هيئة تدريس يعلمون مقررات هندسية. استخدم 99% فترة ثقة، فسر تقديرك بفترة.

(١٤-٢١) بالإشارة إلى مسألة متطلبات المبرمج (٢٠-١٨). افترض أن المشاهدات

التالية غير موجودة : $Y_{133}, Y_{134}, Y_{234}$ ، فضلاً عن ذلك، افترض أن أحجوم العينات تعكس أهمية متوسطات للمعالجات، اختر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة لنوع الحجرة موجودة أم لا متخذاً $\alpha = 0.01$. اعرض البديلين، وقاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P للاختبار؟

(١٥-٢١) بالإشارة إلى مسألة الأساتذة للمحققين (٦-٢٠). افترض أن أحجوم العينات

تعكس أهمية متوسطات المعالجات. اختر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة لموضوع الاختصاص موجودة أم لا، متخذاً مستوى اللعنوية $\alpha = 0.05$. اعرض البديلين، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار ؟

(١٦-٢١) في نموذج التأثيرات المختلطة (21.26)، لماذا يكون $\sum_j (\alpha\beta)_j = 0$ ، بينما يكون عادة $\sum_j (\alpha\beta)_j \neq 0$.

(١٧-٢١) يصمم مستشار تسويق عدة تجارب تتناول أداة لتصنيع الطعام مطبوعة حديثاً ومنخفضة الكلفة. وأهداف التجربة الأولية (١) تأثير ثلاثة أسعار ممكنة للوحدة، فقوحها قسم للبيعات، على رواج البيع وهي (\$25.95, \$25.49, \$23.99). و(٢) تحديد ما إذا كانت الخطة المستعملة لتلوين الأداة تؤثر في رواج البيع. وهناك العديد جداً من خطط الألوان الممكنة؛ وقد اختير منها ثلاثة ألوان (أبيض، أخضر، زهرى) للتجربة الأولية كي تمثل مدى الألوان الممكنة. إذا كانت التجربة تقترح أن لخطة الألوان تأثيرها، فسيجري تجرّي هذه الناحية من تصميم الأداة بالتفصيل في دراسة مقبلة. أي نموذج نحائن يمكن أن تستعمله لتحليل التجربة الأولية ؟ ناقش.

(١٨-٢١) في دراسة نحائن لعاملين حيث $n=5, b=2, c=3$ ، كان تأثيرا العاملين كليهما عشوائيا وكان $\sigma^2 = 5.0, \sigma^2_e = 8.0, \sigma^2_\mu = 10.0$ و $\sigma^2_{\mu\mu} = 6.0$. افترض أن نموذج التحاين (21.25) قابل للتطبيق.

أ - أوجد $E(MSA), E(MSB), E(MSAB)$
 ب - ماذا يمكن أن يكون توقع متوسط المربعات إذا كان $\sigma^2_{\mu\mu} = 0$ ، مع بقاء جميع المعالم الأخرى بدون تغيير ؟

(١٩-٢١) علّق إحصائي مسح بما يلي "إنني شديد الارتياح باستخدام نموذجي نحائن التأثيرات العشوائية والتأثيرات المختلطة، فقلّما يجري اختيار مستويات وفق آلية عشوائية من مجتمع معروف". ناقش.

(٢٠-٢١) الأسيال للجمالون الواحد. رغب صانع سيارات في دراسة تأثيرات الخلاقات بين السائقين (عامل A)، والخلاقات بين السيارات (عامل B) على استهلاك الوقود. اختير أربعة سائقين عشوائيا؛ كما اختيرت عشوائيا خمس سيارات من الطراز نفسه مع مقيّر سرعات يلوي من خط التجميع.

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين ومواقع أخرى في تحليل التباين (التحانين) ٤١١

وقاد كل سائق كل سيارة مرتين في طريق معد للاختبار بمقد أربعين ميلا،
وسُجل عدد الأميال المقطوعة في الجالون الواحد. وفيما يلي البيان
الإحصائي للتحربة:

العامل A (سائق)	العامل B (سيارة)				
	$j = 5$	$j = 4$	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$
$i = 1$	27.1	28.4	24.8	28.9	25.3
	26.6	27.9	25.1	30.0	25.2
$i = 2$	33.7	35.6	31.7	36.7	33.6
	33.9	35.0	31.9	36.5	32.9
$i = 3$	29.2	29.7	26.9	30.7	27.7
	28.9	30.2	26.3	30.4	28.5
$i = 4$	30.3	31.8	27.7	32.4	29.2
	29.9	30.7	28.9	32.4	29.3

افترض أن نموذج التحانين (21.25) قابل للتطبيق.

أ - اختر ما إذا كان العاملان يتضاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض

البدايل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

ب - اختر بصورة منفصلة ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B

موجودة أم لا. استخدم $\alpha = 0.05$ ، في كل من الاختبارين واعرض

البدايل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

ج - أوجد تقديرات نقطة لـ σ_e^2 و σ_B^2 ، أي عامل يبدو أكثر تأثيرا على

استهلاك الوقود؟.

(٢١-٢١) بالإشارة إلى مسألة خدمة مساق القرص (Disk Drive) رقم

(١٦-١٨) افترض أن مركز الخدمة يستخدم عددا كبيرا من الفنيين وقد

اختر منهم للدراسة ثلاثة اختيارات عشوائية. افترض أن شروط نموذج

التحانين المعتدل (21.26) قابلة للتطبيق، باستثناء أن تأثيرات العامل A هي

هنا عشوائية وتأثيرات العامل B مثبتة. وتحت الشروط السالدة، يخدم جميع

الفنيين كلا من الأنواع الثلاثة بتواترات متساوية تقريبا.

أ - اختر ما إذا كان العاملان متضاعلين أم لا؛ استخدم $\alpha = 0.01$ ،

اعرض البدايل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

ب - أوجد التقدير النقطي لـ σ^2 . هل يبدو σ^2 أكبر نسبياً من σ^2 ؟
اشرح.

ج - اختر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسية للعامل A موجودة أم لا؛
استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، لماذا نعتبر
اختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A ذا مغزى هنا؟

د - اختر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسية للعامل B موجودة أم لا؛
استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. لماذا نعتبر
اختبار التأثيرات الرئيسية للعامل B ذا مغزى هنا؟

هـ - نرغب في إيجاد جميع المقارنات الثنائية بين المتوسطات للأنواع الثلاثة
من مساقات الأقراص. استخدم طريقة توكي و 95% معامل ثقة
للقيام بهذه المقارنات. اعرض نتائجك.

و - أوجد تقديراً نقطياً لـ σ^2 . هل يبدو التغير بين الفنيين كبيراً؟
اشرح.

(٢١-٢٢) اللؤلؤ المزيّف. قاد بحث ابتدائي في إنتاج اللؤلؤ المزيّف إلى دراسة تأثير
عدد طبقات طلاء ورنيش اللؤلؤ (عامل A) المطبقة على محرزة بلاستيك
براقه مستخدمة كأساس اللؤلؤ على القيمة التسويقية للؤلؤ، وقد
استُخدمت في الدراسة أربع دفعات في كل منها 12 محرزة (عامل B)،
ونرغب، أيضاً، في دراسة تأثيرها على القيمة التسويقية. والمستويات
الثلاث للعامل A (6، 8، 10 طلاءات) كانت مثبتة سلفاً، بينما اعتُبرت
الدفعات الأربع عينة عشوائية من الدفعات من عملية إنتاج الخرز. وقد
حُدثت القيمة التسويقية لكل لؤلؤ بواسطة جماعة من الخبراء. وفيما يلي
البيان الإحصائي (بعد ترميزه).

العامل B (دفعة)				العامل A (عدد الطلاب)
$j = 4$	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
70.4	75.2	72.1	72.0	$i = 1$
68.1	73.8	76.9	74.6	
72.4	75.7	74.8	67.4	
72.4	77.8	73.3	72.8	
74.3	80.2	80.3	76.9	$i = 2$
77.6	76.6	79.3	78.1	
74.4	77.3	76.6	72.9	
72.9	79.9	77.2	74.2	
71.6	79.2	80.9	76.3	$i = 3$
77.7	78.0	73.7	74.1	
75.2	77.6	78.6	77.1	
74.4	81.2	80.2	75.0	

افترض أن نموذج التباين المختلط (21.26) قابل للتطبيق.

أ - اختبر تأثيرات التفاعل مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة

القرار، والنتيجة ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B واستخدم لكل اختبار،

$\alpha = 0.05$ واعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P -

لكل اختبار؟

ج - قُلِّر $\mu_1 - \mu_2$ و $D_1 = \mu_2 - \mu_1$ و $D_2 = \mu_2 - \mu_1$ مستخدماً طريقة بونفرونو

بمعامل ثقة عائلي 90% اعرض نتائجك.

د - اوجد تقديرنا نقطياً لـ μ_1 . هل يبدو σ^2 كبيراً بالمقارنة مع μ ؟

نقش.

(٢١-٢٣) بالإشارة إلى مسألة الطرفيات التي تُدار بالعملة (٢١-٢). لنفرض أن

الأسابيع (عامل B) قد اختبرت بالمعد. ولكن المواقع (عامل A) اختبرت

عشوائياً من عدد كبير من المواقع الممكنة. وفترض أن شروط نموذج

التباين المختلط (21.26) مناسبة، باستثناء أن تأثيرات العامل A عشوائية

هنا، بينما تأثيرات العامل B مثبتة.

- أ - اختبر وجود التأثيرات الرئيسية للعامل B ؛ استخدم $\alpha = 0.05$.
 اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار ؟
 ب - لماذا لا نستطيع اختبار وجود التأثيرات الرئيسة للعامل A هنا ؟

تمارين

(٢١-٢٤) عدّل الصيغ (18.39a) و (18.39b) بحيث تنطبق على نموذج التحاين (21.1) حيث $n = 1$.

(٢١-٢٥) اعتبر دراسة بعاملين حيث $\alpha = 2$ ، $b = 2$ و $n = 1$. اكتب المصفوفة C الخاصة بالقيّد $\mu_{21} - \mu_{22} + \mu_{11} = \mu_{12}$ لاستخدامها في (21.7a). بين أن المقدرات التقطعية في (21.7b) هي عناصر b_{ij} في (21.7).

(٢١-٢٦) بين أن (21.8) هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية الوحيدة في α و β بحيث يكون $\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$.

(٢١-٢٧) استنبط في نموذج التحاين العشوائي (21.25). [إرشاد: استخدم (21.27)].

مشاريع

(٢١-٢٨) بالإشارة إلى بيانات SENIC وإلى المشروعين (٢٠-١٨) و (٢٠-١٩). افترض أن أحجام العينة تعكس أهمية متوسطات المعالجات.

- أ - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للمنطقة (عامل A)، استخدم $\alpha = 0.01$.
 اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار ؟
 ب - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة لمتوسط أعمار المرضى (عامل B)، استخدم $\alpha = 0.01$.
 اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار ؟.

(٢١-٢٩) بالإشارة إلى بيانات SMSA وإلى المشروعين (٢٠-٢٠) و (٢١-٢١). افترض أن أحجام العينة تعكس أهمية متوسطات المعالجات.

- أ - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للمنطقة (عامل A) استخدم $\alpha = 0.005$.
 اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار ؟.

نماذج تأثيرات عشوائية ومخططة لدراسات تتناول عاملين وموضوع آخرى في تحليل التباين (الصفحة ٤١٥)

ب - اختبر وجود التأثيرات الرئيسية للنسبة المئوية من المجتمع في المدن المركزية (عامل B) استخدم $\alpha = 0.005$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

(٣٠-٣١) لنعتبر دراسة بعاملين حيث $a=3$, $b=2$ و $m=5$ ، وحيث ينطبق نموذج التحان العشوائي (21.25) مع $\mu = 92$, $\sigma_a^2 = 24$, $\sigma_b^2 = 11$, $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.1$ و $\sigma^2 = 8$.

أ - مستخدما مولدا للأعداد العشوائية الطبيعية، أوجد قيمة كل من التأثيرات الرئيسية α_i ($i = 1, 2, 3$) و β_j ($j = 1, 2$) وقيمة كل تفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$.

ب - ولد خمسة حلول خطأ لكل معادلة.

ج - ركب قيم المعالم التي حصلت عليها في (أ) وحلود الخطأ التي حصلت عليها في (ب) لتوليد خمس مشاهدات Y_{ijk} لكل معادلة.

د - معتمدا على المشاهدات التي حصلت عليها في (ج) احسب إحصاءة الاختبار F^* لاختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسية للعامل A موجودة أم لا، ماهي نتيجتك مستخدما $\alpha = 0.05$ ؟

هـ - أعد الخطوات من (أ) الى (د) مائة مرة. احسب متوسط المائة متوسط مربعات في البسط، ومتوسط المائة متوسط مربعات في المقام. هل هذان المتوسطان قريبان من التوقعات النظرية؟

و - في أي نسبة من التكرارات المائة يقود الاختبار إلى نتيجة وجود تأثيرات رئيسة للعامل A ؟ هل قوة الاختبار جيدة للحالة المدروسة هنا؟

دراسات متعددة العوامل

عند دراسة ثلاثة عوامل في آن واحد يكون التحليل والنموذج المستخدمان تعميماً مباشراً لحالة عاملين. وستوضح طبيعة التعميمات هذه بالاستناد إلى دراسات تتضمن ثلاثة عوامل. وفي العادة، تُستخدم حُزم الحاسب لإنجاز الحسابات المطلوبة للدراسات متعددة العوامل تتضمن ثلاثة عوامل أو أكثر. ولكمال المناقشة، على أي حال، سنقدم الصيغ الحسابية الضرورية للدراسات تتضمن ثلاثة عوامل.

(٢٢-١) نموذج I (مستويات العامل مثبتة) لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل

سنطور هنا نموذج تحاين بمستويات عامل مثبتة لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل، وذلك عندما تكون أحجام العينات لكل معالجة متساوية ولجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها. وسيكون نموذج التحاين قابلاً للتطبيق على دراسات مشاهدة وعلى دراسات تجريبية مبنية على التصميم تام العشوائية.

رموز

ثلاثة عوامل A, B, C قيد الدراسة بـ a, b, c من المستويات، على الترتيب. ونرمز لمتوسط استجابة معالجة يكون فيها العامل A عند المستوى i ($i=1, \dots, a$) والعامل B عند المستوى j ($j=1, \dots, b$) والعامل C عند المستوى k ($k=1, \dots, c$) بـ μ_{ijk} . ونفترض أن عدد المشاهدات لكل معالجة ثابت، ونرمز له بـ n . نفترض $n \geq 2$. ونرمز لمتوسط الاستجابة عندما يكون A عند المستوى i و B عند المستوى j بـ μ_{ij} . نخدم رموزاً مشابهة لأزواج أخرى من مستويات العوامل. وبما أننا افترضنا أهمية

متساوية لجميع متوسطات المعالجات، فنعرف:

$$\mu_{g.} = \frac{\sum_i \mu_{gi}}{c} \quad (22.1a)$$

$$\mu_{i.b} = \frac{\sum_j \mu_{ij}}{c} \quad (22.1b)$$

$$\mu_{.j} = \frac{\sum_i \mu_{ij}}{a} \quad (22.1c)$$

ونرمز لمتوسطات الاستجابة عندما يكون A عند المستوى i بـ $\mu_{i.}$ مع استخدام

رموز مشابهة لمتوسطات مستويات عوامل أخرى. ونعرف:

$$\mu_{i.} = \frac{\sum_j \sum_k \mu_{ijk}}{c} \quad (22.2a)$$

$$\mu_{.j} = \frac{\sum_i \sum_k \mu_{ijk}}{c} \quad (22.2b)$$

$$\mu_{.j} = \frac{\sum_i \sum_k \sum_l \mu_{ijkl}}{abc} \quad (22.2c)$$

وأخيراً نرمز لمتوسط الاستجابة الإجمالي بـ $\mu_{...}$ ونعرفه على الشكل:

$$\mu_{...} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \mu_{ijk}}{abc} \quad (22.2c)$$

توضيح

ولتوضيح معاني حدود النموذج في نموذج تحليل تباين ذي ثلاثة عوامل، سنأخذ في الاعتبار دراسة تأثيرات الجنس، والعمر، ومستوى الذكاء الحرجي كلية على تعلّم مهمة معقدة. الجنس، وهو العامل A ، له مستويان $a = 2$ (ذكر، أنثى). والعمر، وهو العامل B ، مقفّر بدلالة ثلاثة مستويات، $b=3$ (فتى، متوسط السن، كبير السن). وأخيراً، الذكاء، وهو العامل C ، ومقفّر بدلالة مستويين، $c = 2$ (IQ مرتفع، IQ عادي). ويبيّن الجدول (١-٢٢) متوسطات المعالجات μ_{ijk} لجميع تراكيب مستويات العوامل الثلاثة، بالإضافة إلى تمثيلها الرمزي. ويبيّن الجدول (١-٢٢)، أيضاً، المتوسطات المختلفة للمقادير وستشير بصورة متكررة لهذا المثال التعليمي ونحن نشرح حدود النموذج للدراسة ذات ثلاثة عوامل.

تأثيرات رئيسية

ونعرف التأثيرات الرئيسية في دراسة ذات ثلاثة عوامل بصورة مشابهة لتلك المتعلقة بدراسة ذات عاملين. وهكذا، فإن التأثير الرئيس للمستوى i للعامل A معرف على الشكل:

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..} \quad (22.4a)$$

وفي المثال التعليمي في الجدول (٢٢-٧١) لدينا مثلاً:

$$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 16.5 - 16$$

جدول (٢٢-٧١) متوسط زمن التعلم وفقاً للجنس، والعمر والذكاء (بالنقاط) - مثال تعليمي.

الذكاء (العامل C) والعمر (العامل B)											
لترتفع IQ $k=1$				IQ عادي $k=2$				لترتفع IQ $k=3$			
$j=3 \quad j=2 \quad j=1$				$j=3 \quad j=2 \quad j=1$				$j=3 \quad j=2 \quad j=1$			
شاب	كهل	مسن	متوسط	شاب	كهل	مسن	متوسط	شاب	كهل	مسن	متوسط
$i=1$											
9	12	18	13	19	20	21	20	14	16	19.5	16.5
μ_{111}	μ_{121}	μ_{131}	$\mu_{1.1}$	μ_{112}	μ_{122}	μ_{132}	$\mu_{1.2}$	μ_{113}	μ_{123}	μ_{133}	$\mu_{1.3}$
$i=2$											
9	10	14	11	19	20	21	20	14	15	17.5	15.5
μ_{211}	μ_{221}	μ_{231}	$\mu_{2.1}$	μ_{212}	μ_{222}	μ_{232}	$\mu_{2.2}$	μ_{213}	μ_{223}	μ_{233}	$\mu_{2.3}$
للتوسط											
9	11	16	12	19	20	21	20	14	15.5	18.5	16
$\mu_{.11}$	$\mu_{.21}$	$\mu_{.31}$	$\mu_{.1}$	$\mu_{.12}$	$\mu_{.22}$	$\mu_{.32}$	$\mu_{.2}$	$\mu_{.13}$	$\mu_{.23}$	$\mu_{.33}$	$\mu_{.3}$

وبصورة مماثلة، نعرف التأثير الرئيس للمستوى j للعامل B :

$$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu_{..} \quad (22.4b)$$

والتأثير الرئيس للمستوى k للعامل C :

$$\gamma_k = \mu_{..k} - \mu_{..} \quad (22.4c)$$

ونستنتج من هذه التعاريف أن مجاميع التأثيرات الرئيسية صفر:

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0 \quad (22.5)$$

تفاعلات عاملين

نُعرف تأثيرات تفاعل عاملين في دراسة ذات ثلاثة عوامل بالطريقة نفسها التي عرفناها في دراسة ذات عاملين، باستثناء أن جميع المتوسطات يُحسب متوسطها فرق

العامل الثالث. وهكذا، وكما رأينا في (18.8a)، نعرف التفاعل ثنائي العامل بين العامل A في مستواه i والعامل B في مستواه z ، ونرمز له كما سبق بـ $(\alpha\beta)_{iz}$ ، كما يلي:

$$(\alpha\beta)_{iz} = \mu_{iz} - \mu_{i.} - \mu_{.z} + \mu_{..} \quad (22.6a)$$

وفي المثال التعليمي في الجدول (١-٢٢) نجد مثلاً:

$$(\alpha\beta)_{11} = 14 - 16.5 - 14 + 16 = -.5$$

وعلى المنوال نفسه، نعرف التفاعلات ثنائية العامل AC و BC كما يلي:

$$(\alpha\gamma)_{ik} = \mu_{ik.} - \mu_{i.} - \mu_{.k} + \mu_{..} \quad (22.6a)$$

$$(\beta\gamma)_{jk} = \mu_{.jk} - \mu_{.j} - \mu_{.k} + \mu_{..} \quad (22.6b)$$

وفي الغالب $(\alpha\beta)_{iz}$ ، $(\alpha\gamma)_{ik}$ ، تدعى التفاعلات ثنائية العامل تفاعلات من المرتبة الأولى. ويمكن الرهان بسهولة على أن مجاميع التفاعلات من المرتبة الأولى فوق كل دليل هو الصفر:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{iz} = 0 \quad \text{لجميع } z, \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \text{لجميع } i \quad (22.7a)$$

$$\sum_i (\alpha\gamma)_{ik} = 0 \quad \text{لجميع } k, \quad \sum_k (\alpha\gamma)_{ik} = 0 \quad \text{لجميع } i \quad (22.7b)$$

$$\sum_j (\beta\gamma)_{jk} = 0 \quad \text{لجميع } k, \quad \sum_k (\beta\gamma)_{jk} = 0 \quad \text{لجميع } j \quad (22.7c)$$

تفاعلات ثلاثة عوامل

وكما في دراسة تتضمن عاملين، حيث عرفنا التفاعل بين المستوى i للعامل A والمستوى z للعامل B بأنه الفرق بين متوسط للمعالجة وبين القيمة التي تتوقعها لهذا المتوسط لو كانت تأثيرات العامل تجميعية، فكذلك نعرف التفاعل ثلاثي العوامل μ_{izk} في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل بأنه الفرق بين متوسط المعالجة وبين القيمة التي تتوقعها له لو كانت التأثيرات الرئيسة والتفاعلات من المرتبة الأولى كافية للتعبير عن جميع تأثيرات العوامل. والقيمة التي تتوقعها مستخدمين التأثيرات الرئيسة والتفاعلات من المرتبة الأولى عندما يكون العامل A في مستواه i والعامل B في مستواه z ، والعامل C في مستواه k هو:

$$\mu_{..} + \alpha_i + \beta_z + \gamma_k + (\alpha\beta)_{iz} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} \quad (22.8)$$

وبالتالي نعرف التفاعل ثلاثي العامل μ_{izk} ، ويدعى، أيضاً، التفاعل من المرتبة

الثانية، كما يلي:

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \mu_{izk} - [\mu_{..} + \alpha_i + \beta_z + \gamma_k + (\alpha\beta)_{iz} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk}] \quad (22.9a)$$

أو بصورة مكافئة:

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \mu_{ijk} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} - \mu_{..k} + \mu_{i.} + \mu_{.j} + \mu_{.k} - \mu_{...} \quad (22.9b)$$

ومن تعريف التفاعلات ثلاثية العامل نستنتج أنها عندما تجمع فوق أي دليل

فإن المجموع الناتج هو الصفر:

$$\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \quad \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \quad (22.10)$$

لجميع k, j, i لجميع k, j لجميع i, j

وإذا كانت جميع التفاعلات ثلاثية العامل صفراً، نقول إنه لا توجد تفاعلات ثلاثية العامل بين العوامل A, B, C . وإذا كانت بعض التفاعلات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ ، على الأقل، غير الصفر، فنقول إن التفاعلات ثلاثية العامل موجودة.

دعنا نجد التفاعل ثلاثي العامل $(\alpha\beta\gamma)_{111}$ للمثال التعليمي في الجدول (٢٢-١)،

فذلك يتطلب قيم الحدود التالية:

$$\begin{aligned} \mu_{...} &= 16 & (\alpha\beta)_{11} &= 14 - 16.5 - 14 + = -5 \\ \alpha_1 &= 16.5 - 16 = .5 & (\alpha\gamma)_{11} &= 13 - 16.5 - 12 + 16 = .5 \\ \beta_1 &= 14 - 16 = -2 & (\beta\gamma)_{11} &= 9 - 14 - 12 + 16 = -1 \\ \gamma_1 &= 12 - 16 = -4 & \mu_{111} &= 9 \end{aligned}$$

وبالتالي نجد:

$$(\alpha\beta\gamma)_{111} = 9 - (16 + .5 - 2 - 4 - .5 + .5 - 1) = -.5$$

وبما أن $(\alpha\beta\gamma)_{111}$ غير الصفر، فنعلم فوراً أن التفاعلات ثلاثية العامل موجودة في هذا المثال.

تفسير التفاعلات في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل

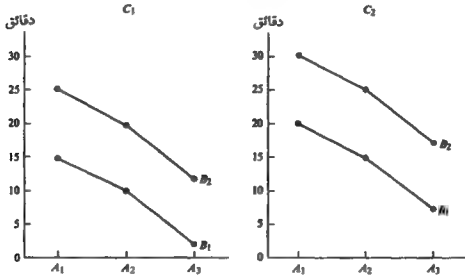
ولإلقاء الضوء على طبيعة التفاعلات في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل، سندرس بعض الأمثلة باستخدام جداول وعطوط بيانية، مبتدئين بتأثيرات عامل، وهو جد بسيط، ومتدرجين إلى المعقد وهو تأثيرات تفاعل ثلاثي العوامل. ونقدم في كل مثال المتوسطات الحقيقية للمعالجة μ_{ijk} .

مثال ١- تأثيرات رئيسة، فقط. يوضح الشكل (٢٢-١) حالة توجد فيها تأثيرات رئيسة لـ A, B, C دون وجود تفاعلات من أي نوع. ومنحنيات الاستجابة AB في الشكل (٢٢-١) هي رسوم بيانية لمتوسطات المعالجات في مقابل C . وتعكس ميول المنحنيات AB غير المساوية للصفر التأثيرات الرئيسية لـ A . وتعكس الفروق في ارتفاعات المنحنيات AB ضمن كل لوحة من لوحات الشكل (٢٢-١) التأثيرات

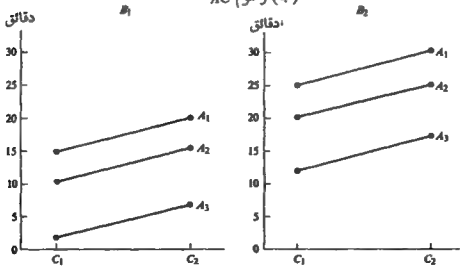
الرئيسة لـ B ، أما التأثيرات الرئيسة لـ C فتعكسها المنحنيات المتقابلة في اللوحين من حيث اختلاف ارتفاعاتها.

شكل (١-٢٢) التأثيرات الرئيسة لـ A ، B و C بدون تفاعلات.

(أ) رسوم AB



(ب) رسوم AC



وغياب التفاعلات AB مبين من خلال توازي منحنيات الاستجابة في كل لوحة. ونعلم من دراستنا لعاملين أن توازي منحنيات الاستجابة يتضمن غياب التفاعلات. وهنا يتضمن توازي منحنيات الاستجابة ضمن كل لوحة:

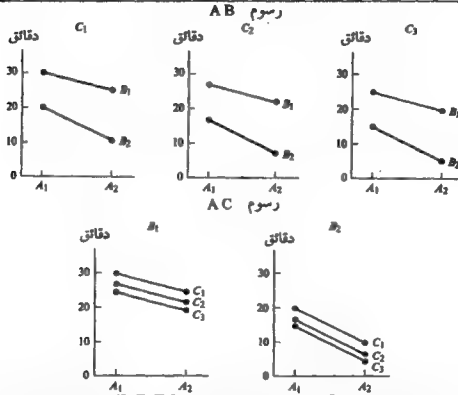
١- التفاعلات $(\alpha\beta)_y$ بين العاملين A, B تساوي الصفر.

٢- التفاعلات $(\alpha\beta\gamma)_{xyz}$ بين العوامل A, B, C تساوي الصفر.

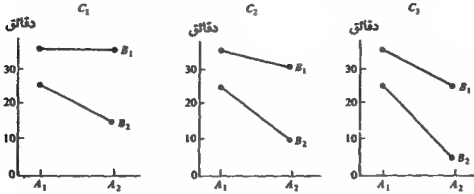
ويصبح غياب التفاعلين BC و AC في هذا المثال واضحا عند رسم منحنى استجابة BC ومنحنى استجابة AC مقابل A و B ، على الترتيب. وهكذا يبين الشكل (٢٢-١) ب) متوسطات المعالجات نفسها \bar{y}_{ij} حيث رُسمت منحنيات استجابة AC في مقابل B ، لاحظ أن هذه المنحنيات متوازية في كل لوحة مما يعني أن التفاعلات AC صفر.

مثال ٢- التأثيرات الرئيسة والتفاعلات AB . يوضح الشكل (٢٢-٢) حالة توجد فيها التأثيرات الرئيسة لكل من A و B و C والتفاعلات AB دون غيرها من التفاعلات. لاحظ أن منحنى استجابة AB في كل لوحة من الشكل (٢٢-٢) \bar{A} لم يعودا متوازيين، مما يعكس وجود التفاعلات AB . وعلى أي حال، فإن المنحنيات الأعلى في اللوحات الثلاث متوازية، وكذلك الأمر بالنسبة للمنحنيات الدنيا وهذا يتضمن أنه عندما تُرسم المنحنيات AC في مقابل B فستكون منحنيات استجابة AC ضمن كل لوحة متوازية. وهذا مبين في الشكل (٢٢-٢) ب)، الذي يشمل متوسطات المعالجة نفسها التي يشملها الشكل (٢٢-٢) \bar{A} . وتوازي منحنيات استجابة AC ضمن كل لوحة في الشكل (٢٢-٢) ب)، يعني بدوره عدم وجود التفاعلات AC ، بالإضافة إلى عدم وجود التفاعلات ABC ، أي أن $(\alpha\beta\gamma)_{xyz}$ جميعها تساوي الصفر، و $(\alpha\beta\gamma)_{xyz}$ جميعها تساوي الصفر.

وهكذا، إذا كانت منحنيات استجابة $AB(AC, BC)$ المقابلة لأي مستوى معطى للعامل $(A, B)C$ متوازية من أجل جميع مستويات $(A, B)C$ كما في الشكل (٢٢-٢) \bar{A} ، مع أن منحنيات الاستجابة ضمن لوحة مفردة غير متوازية، فهذا يعني عدم وجود تفاعلات ثلاثية العامل.

شكل (٢-٢٢) التأثيرات الرئيسة لـ A, B و C والتفاعلات AB .

مثال ٣- التأثيرات الرئيسة والتفاعلات AB و AC . وعلى أي حال، فإن هذا لا يعني أن غياب التوازي سواء ضمن لوحة أو بين لوحتين يتضمن وجود تفاعلات ثلاثية العامل. ويعرض الشكل (٢-٢٢) حالة تكون فيها التأثيرات الرئيسة AB ، و C والتفاعلات ثنائية العامل AB و AC موجودة ولكن لا يوجد أي تفاعلات ثلاثية العامل، مع أن منحنيات الاستجابة غير متوازية لاضمن اللوحة الواحدة ولا بين اللوحات. وتعكس واقعة أن منحنيات الاستجابة AB في حضور المستوى للعامل B غير متوازية من أجل المستويات الثلاثة للعامل C وجود التفاعلات AC . وغياب التوازي بين منحنيات استجابة AB ضمن كل لوحة يعكس وجود التفاعلات AB . ولاحظ، على أي حال، أن الفروق $\mu_{114} - \mu_{124}$ تبقى نفسها من أجل جميع مستويات العامل C ، وكذلك الأمر بالنسبة للفروق $\mu_{214} - \mu_{224}$ وبالتالي لا توجد تفاعلات ثلاثية العامل.

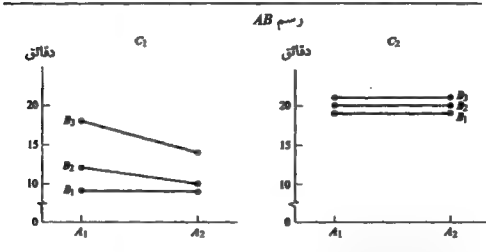
شكل (٢٢-٣) التأثيرات الرئيسية A ، B و C والتفاعلات AB و AC - رسوم استجابة AB 

مثال ٤- التأثيرات الرئيسية والتفاعلات AB ، AC ، BC و ABC يبين الشكل (٢٢-٤) رسوم استجابة AB من أجل المستويات المختلفة للعامل C ، وذلك في حالة المثال التعليمي في الجدول (٢٢-١) لتأثيرات الجنس والعمر والذكاء على زمن التعلم. وتعكس رسوم متوسطات المعالجات في الشكل (٢٢-٤)، كما رأينا سابقاً، وجود تأثيرات رئيسة وتفاعلات من المرتبة الأولى ومن المرتبة الثانية. وبصورة خاصة، يبين الشكل (٢٢-٤) أنه في حالة أشخاص بمستوى IQ عادي، لا يكون للجنس تأثير على متوسط زمن التعلم، ويكون للعمر تأثير بسيط، فقط، مما يؤدي إلى أزمة تعلم أطول قليلاً لكبار السن. وعلى الوجه الآخر، نجد في حالة أشخاص بمستوى IQ مرتفع، أن الإناث يميلون إلى التعلم بسرعة أكثر من الذكور بالنسبة لكبار السن، فقط، وليس بالنسبة للفتية، وأن كبار السن يتطلبون أزمة تعلم أطول بكثير مما يتطلبه الفتية.

ملاحظة

إذا كان من الصعب فهم التفاعلات ثلاثية العوامل، فإن التفاعلات من مرتبة أعلى مثل التفاعلات رباعية العوامل هي، أيضاً، أكثر إبهاماً، ومن حسن الحظ أننا غالباً ما نجد في الواقع العملي أن هذه التفاعلات من مرتبة أعلى صغيرة تماماً أو غير موجودة. وعندما تكون الحالة كذلك، فيمكن إغفالها عند تحليل تأثيرات العوامل.

شكل (٢٧-٤) الماتrices الرئيسة، A ، B و C والمفاعلات AB ، AC ، BC و ABC الجدول (٢٧-١) مثال المعلم



نموذج متوسطات الخلايا

لتكن Y_{ijk} الملاحظة ijm ($m=1, \dots, n$) للمعالجة المولفة من المستوى i للعامل A ($i=1, \dots, a$)، والمستوى j للعامل B ($j=1, \dots, b$)، والمستوى k للعامل C ($k=1, \dots, c$).

وهكذا يكون العدد الكلي للملاحظات في الدراسة:

$$n_T = nabc \quad (22.11)$$

ونموذج التحاين للدراسة تتضمن ثلاثة عوامل بدلالة متوسطات الخلايا

(المعالجات) μ_{ijk} ، مع مستويات مثبتة لكل عامل هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \quad (22.12)$$

حيث:

μ_{ijk} هي معالم.

ε_{ijk} مستقلة وكل منها $N(0, \sigma^2)$

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, c; m = 1, \dots, n$$

نموذج تأثيرات عامل

ويمكن تطوير نموذج مكافئ لتأثيرات عامل، ويستوعب البنية العامية، من

خلال التعبير عن متوسطات المعالجات μ_{ijk} بدلالة التأثيرات المختلفة للعوامل. ومن

تعريف التفاعل ثلاثي العامل (22.9)، نجد المطابقة:

$$\mu_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \quad (22.13)$$

حيث:

$$\mu = \frac{\sum \sum \sum \mu_{ijk}}{abc}$$

$$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu_{...}$$

$$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu_{...}$$

$$\gamma_k = \mu_{...k} - \mu_{...}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...}$$

$$(\alpha\gamma)_{ik} = \mu_{i.k.} - \mu_{i..} - \mu_{...k} + \mu_{...}$$

$$(\beta\gamma)_{jk} = \mu_{.jk.} - \mu_{.j.} - \mu_{...k} + \mu_{...}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \mu_{ijk.} - \mu_{ij.} - \mu_{i.k.} - \mu_{.jk.} + \mu_{i..} + \mu_{.j.} + \mu_{...k} + \mu_{...}$$

وبالتالي يكون نموذج تخمين تأثيرات عامل المكافئ في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل:

$$Y_{ijklm} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijklm} \quad (22.14)$$

حيث:

$$\varepsilon_{ijklm} \text{ مستقلة و } N(0, \sigma^2)$$

ثوابت خاضعة للقيود: $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}, (\beta\gamma)_{jk}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\alpha\beta)_{ij}, \gamma_k, \beta_j, \alpha_i$

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$$

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = \sum_i (\alpha\gamma)_{ik} = 0$$

$$\sum_k (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_j (\beta\gamma)_{jk} = \sum_k (\beta\gamma)_{jk} = 0$$

$$\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

ونموذج متوسطات الخلايا (22.12) ونموذج تأثيرات عامل المكافئ هما نموذجان

خطيان، تماماً كما في حالة عاملين. وستوضح ذلك لاحقاً في هذا الفصل من خلال

مثال.

(٢٢-٧) تحليل التباين

رموز

رموز مجاميع ومتوسطات عينة هي تعميم مباشر لتلك في حالة دراسات تتضمن

عاملين. وكالمعتاد، تشير النقطة الملحقة كدليل إلى عملية جمع أو عملية أخذ متوسط

فوق الدليل الذي حلت محله النقطة. ولدينا:

$$Y_{j\cdot} = \sum_m Y_{jkm} \quad \bar{Y}_{j\cdot} = \frac{Y_{j\cdot}}{n} \quad (22.15a)$$

$$Y_{i\cdot} = \sum_k \sum_m Y_{ikm} \quad \bar{Y}_{i\cdot} = \frac{Y_{i\cdot}}{cn} \quad (22.15b)$$

$$Y_{i.k} = \sum_j \sum_m Y_{ijkm} \quad \bar{Y}_{i.k} = \frac{Y_{i.k}}{bn} \quad (22.15c)$$

$$Y_{\cdot j} = \sum_i \sum_m Y_{ijm} \quad \bar{Y}_{\cdot j} = \frac{Y_{\cdot j}}{m} \quad (22.15d)$$

$$Y_{i..} = \sum_j \sum_k \sum_m Y_{ijkm} \quad \bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{bcn} \quad (22.15e)$$

$$Y_{\cdot j.} = \sum_i \sum_k \sum_m Y_{ijkm} \quad \bar{Y}_{\cdot j.} = \frac{Y_{\cdot j.}}{acn} \quad (22.15f)$$

$$Y_{i.k.} = \sum_j \sum_m Y_{ijkm} \quad \bar{Y}_{i.k.} = \frac{Y_{i.k.}}{abn} \quad (22.15g)$$

$$Y_{\cdot\cdot\cdot} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m Y_{ijkm} \quad \bar{Y}_{\cdot\cdot\cdot} = \frac{Y_{\cdot\cdot\cdot}}{abcn} \quad (22.15h)$$

مثال. يوضح الجدول (٢-٢٢) هذه الرموز لدراسة تأثيرات الجنس، وشحوم الجسم، وتاريخ التدخين على مدى الأهلية لإجراء تمارين في اختبار شدة لأشخاص تتراوح أعمارهم بين 25 إلى 35 سنة. ولكل من العوامل الثلاثة مستويان، وتوجد ثلاثة تكرارات لكل معالجة. الجدول (٢-٢٢)، ب، و ج، تبين على الترتيب، البيانات، والمجموع، والمتوسطات، بالإضافة إلى الرموز المقابلة لها. وسنحلل هذا البيان بالكامل فيما بعد.

توفيق نموذج تحالين

عند توفيق نموذج متوسطات الخلايا (22.12) بطريقة المربعات الدنيا، نجد كالمعتاد أن المقدرات هي متوسطات المعالجات المقترنة:

$$\hat{\mu}_{j\cdot} = \bar{Y}_{j\cdot}. \quad (22.16)$$

جدول (٧-٢٧) مشاهدات العينة، الجميع، والمتوسطات لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل مثال اختبار الشدة

(أ) البيانات							
تاريخ التدخين							
$k = 2$		$k = 1$					
				معدل شحوم مرتفع $j = 1$			
				$i = 1$ ذكر			
18(Y_{1121})		24(Y_{1111})					
19(Y_{1122})		29(Y_{1112})					
23(Y_{1123})		25(Y_{1113})					
				$i = 2$ أنثى			
15(Y_{2121})		20(Y_{2111})					
10(Y_{2122})		22(Y_{2112})					
11(Y_{2123})		18(Y_{2113})					
				معدل شحوم منخفض $j = 2$			
				$i = 1$ ذكر			
15(Y_{1221})		15(Y_{1211})					
20(Y_{1222})		15(Y_{1212})					
13(Y_{1223})		12(Y_{1213})					
				$i = 2$ أنثى			
10(Y_{2221})		16(Y_{2211})					
14(Y_{2222})		9(Y_{2212})					
6(Y_{2223})		11(Y_{2213})					
(ج) متوسطات			(ب) الجميع				
جميع k	$k = 2$	$k = 1$	$j = 1$	جميع k	$k = 2$	$k = 1$	
			$j = 1$				
			$i = 1$	$j = 1$			
23($\bar{Y}_{11.}$)	20(\bar{Y}_{112})	26(\bar{Y}_{111})	$i = 1$	138($Y_{11.}$)	60(Y_{112})	78(Y_{111})	$i = 1$
16($\bar{Y}_{21.}$)	12(\bar{Y}_{212})	20(\bar{Y}_{211})	$i = 2$	96($Y_{21.}$)	36(Y_{212})	60(Y_{211})	$i = 2$
19.5($\bar{Y}_{.1}$)	16($\bar{Y}_{.12}$)	23($\bar{Y}_{.11}$)	جميع i	234($Y_{.11}$)	96($Y_{.12}$)	138($Y_{.11}$)	جميع i
			$j = 2$				$j = 2$
15($\bar{Y}_{12.}$)	16(\bar{Y}_{122})	14(\bar{Y}_{121})	$i = 1$	90($Y_{12.}$)	48(Y_{122})	42(Y_{121})	$i = 1$
11($\bar{Y}_{22.}$)	10(\bar{Y}_{222})	12(\bar{Y}_{221})	$i = 2$	66($Y_{22.}$)	30(Y_{222})	36(Y_{221})	$i = 2$
13($\bar{Y}_{.2}$)	16($\bar{Y}_{.22}$)	13($\bar{Y}_{.21}$)	جميع i	156($Y_{.2}$)	78($Y_{.22}$)	78($Y_{.21}$)	جميع i
			جميع j				جميع j
19($\bar{Y}_{1.}$)	18(\bar{Y}_{12})	20(\bar{Y}_{11})	$i = 1$	228($Y_{1.}$)	108(Y_{12})	120(Y_{11})	$i = 1$
13.5($\bar{Y}_{2.}$)	11(\bar{Y}_{22})	16(\bar{Y}_{21})	$i = 2$	162($Y_{2.}$)	66(Y_{22})	96(Y_{21})	$i = 2$
16.25($\bar{Y}_{..}$)	14.5($\bar{Y}_{.2}$)	18($\bar{Y}_{.1}$)	جميع i	390($Y_{..}$)	174($Y_{.2}$)	216($Y_{.1}$)	جميع i

وهكذا تكون القيم التوفيقية للمشاهدات هي متوسطات المعالجات المقدرة:

$$\hat{Y}_{i..} = \hat{\mu}_{i..} = \bar{Y}_{i..} \quad (22.17)$$

والرواسب هي انحرافات القيم المشاهدة عن متوسطات المعالجات المقدرة:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ijk} \quad (22.18)$$

أما مقدرات المربعات الدنيا للمعالم في نموذج تأثيرات العامل المكافئ (22.14)

فهي كما يلي:

المقدر	للعلمة	
$\hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$	$\mu_{..}$	(22.19a)
$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..}$	α_i	(22.19b)
$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..}$	β_j	(22.19c)
$\hat{\gamma}_k = \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{..}$	γ_k	(22.19d)
$(\hat{\alpha}\beta)_{ij} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..}$	$(\alpha\beta)_{ij}$	(22.19e)
$(\hat{\alpha}\gamma)_{ik} = \bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{..}$	$(\alpha\gamma)_{ik}$	(22.19f)
$(\hat{\beta}\gamma)_{jk} = \bar{Y}_{.jk.} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{..}$	$(\beta\gamma)_{jk}$	(22.19g)
$(\hat{\alpha}\beta\gamma)_{ijk} = \bar{Y}_{ijk.} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{.jk.} + \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{..}$	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	(22.19h)

والقيم التوفيقية والرواسب لنموذج تأثيرات العامل (22.14) تبقى نفسها تماماً

كما في نموذج متوسطات الخلايا (22.12)، الحالة التي وجدناها، أيضاً، في دراسات تتضمن عاملين.

تجزئة مجموع المربعات الكلي

مع تجاهل البنية العاملية للدراسة واعتبارها ببساطة متضمنة لـ abc من المعالجات،

نحصل على التجزئة المعتاد لمجموع المربعات الكلي:

$$SSTO = SSST + SSE \quad (22.20)$$

حيث:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (Y_{ijkm} - \bar{Y}_-)^2 \quad (22.20a)$$

$$SSTR = n \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_-)^2 \quad (22.20b)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (Y_{ijkm} - \bar{Y}_{ijk})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m e_{ijkm}^2 \quad (22.20c)$$

نعتبر الآن انحراف متوسط المعالجة المقدّر $(\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_-)$ الذي يظهر في $SSTR$ ، فيمكن التعبير عنه بدلالة مقدرات المربعات الدنيا (22.19) للتأثيرات الرئيسة وللتفاعلات ثنائية وثلاثية العامل:

$$\begin{aligned} Y_{ijk} - Y_- &= \underbrace{Y_{i.} - Y_-}_{\text{تأثير انحراف متوسط المعالجة للتأثير الرئيسي}} + \underbrace{Y_{.j.} - Y_-}_{\text{تأثير رئيسي}} + \underbrace{Y_{..k} - Y_-}_{\text{تأثير رئيسي}} + \underbrace{Y_{ijk} - Y_{i.} - Y_{.j.} - Y_{..k} + Y_-}_{\text{تفاعل}} \\ &+ \underbrace{\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_- - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_-}_{\text{تأثير تفاعل}} + \underbrace{\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_- - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_-}_{\text{تأثير تفاعل}} \\ &+ \underbrace{\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_-}_{\text{تأثير تفاعل}} + \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_- \end{aligned}$$

تأثير تفاعل

وعند تربيع الطرفين والجمع فوق i, j, k و m ، تسقط جميع الحدود الجذائية

ونحصل على:

$$SSTR = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC \quad (22.21)$$

حيث:

$$SSA = nbc \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21a)$$

$$SSB = nac \sum_j (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21b)$$

$$SSC = nab \sum_k (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21c)$$

$$SSAB = nc \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21d)$$

$$SSAC = nb \sum_i \sum_k (\bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21e)$$

$$SSBC = na \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21f)$$

$$SSABC = n \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{.jk} + \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_-)^2 \quad (22.21g)$$

ومن (22.20) و(22.21) نكون قد أثبتنا هكذا التحليل المتعامد:

$$SSTO = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC + SSE \quad (22.22)$$

حيث، SSA ، SSB ، و SSC هي مجاميع المربعات المعتادة للتأثيرات الرئيسية. وعلى سبيل المثال، كلما كانت تأثيرات B الرئيسة للفترة $(\bar{Y}_j - \bar{Y}_-)$ كبيرة (بالقيمة المطلقة)، كلما كان SSB كبيرا.

و $SSAB$ ، $SSAC$ ، و $SSBC$ هي مجاميع مربعات التفاعلات ثنائية العامل المعتادة.

وعلى سبيل المثال، كلما كانت التفاعلات AB المقدرّة $(\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_j + \bar{Y}_-)$ كبيرة (بالقيمة المطلقة)، كلما كان $SSAB$ كبيرا.

وأخيرا، $SSABC$ هو مجموع مربعات التفاعل ثلاثي العامل. وكلما كانت هذه التفاعلات ثلاثية العامل المقدرّة كبيرة (بالقيمة المطلقة)، كلما كان $SSABC$ كبيرا. صيغ حسابية. وفي الظروف الخاصة التي تجري فيها الحسابات يدويا، يكون استخدام الصيغ التعريفية المعطاة سابقا معقدا، وتتبع الصيغ الحسابية لحالة ثلاثة عوامل نفس نموذج صيغ العاملين:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m Y_{ijkm}^2 - \frac{Y_{...}^2}{n} \quad (22.23a)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m Y_{ijkm}^2 - \sum_i \sum_j \sum_k \frac{Y_{ijk}^2}{n} \quad (22.23b)$$

$$SSA = \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{nbc} - \frac{Y^2}{nabc} \quad (22.23c)$$

$$SSB = \frac{\sum_j Y_{.j.}^2}{nac} - \frac{Y^2}{nabc} \quad (22.23d)$$

$$SSC = \frac{\sum_k Y_{...k}^2}{nab} - \frac{Y^2}{nabc} \quad (22.23e)$$

ويمكن الحصول على مجموع مربعات التفاعل ثنائي العامل $SSAB$ من خلال التعامل مع المتوسطات \bar{Y}_{ij} واعتبار هذه المتوسطات وعددها ab متوسطا أساسيا للدراسة تتضمن عاملين و "مجموع مربعات المعالجات" لهذه الدراسة بعاملين، وسنرمز لها بـ $SSTR(A,B)$ هو كالمعاد:

$$SS_{TR}(A, B) = nc \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{.})^2 = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{nc} - \frac{Y^2}{nabc} \quad (22.24)$$

ويمكن تبين أن:

$$SS_{TR}(A, B) = SSA + SSB + SSAB \quad (22.25)$$

وبالتالي يمكن إيجاد $SSAB$ بالطرح:

$$SSAB = SS_{TR}(A, B) - SSA - SSB \quad (22.26a)$$

وبصورة مماثلة نجد $SSAC$ و $SSBC$ كما يلي:

$$SSAC = SS_{TR}(A, C) - SSA - SSC \quad (22.26b)$$

$$SSBC = SS_{TR}(B, C) - SSB - SSC \quad (22.26c)$$

حيث:

$$SS_{TR}(A, C) = \frac{\sum_i \sum_h Y_{ih.}^2}{nb} - \frac{Y^2}{nabc} \quad (22.26d)$$

$$SS_{TR}(B, C) = \frac{\sum_j \sum_h Y_{jh.}^2}{na} - \frac{Y^2}{nabc} \quad (22.26e)$$

ونحصل على مجموع مربعات التفاعل ثلاثي العامل بالطرح:

$$SSABC = SS_{TO} - SSE - SSA - SSB - SSC - SSAB - SSAC - SSBC \quad (22.27)$$

ملاحظة

يمكن تعميم الصيغ الحسابية السابقة بسهولة في حال دراسة أكثر من ثلاثة عوامل في آن واحد، إلا أن حزم الحاسب ستستخدم عادة في ظروف كهذه.

درجات الحرية ومتوسط المربعات

يتضمن الجدول (٢٢-٣) جدول التحاين العام لنموذج الثلاثة عوامل (22.14). ودرجات الحرية للتأثير الرئيس ومجاميع مربعات تفاعل ثنائي العامل تتفق مع تلك الخاصة بدراسات تتضمن عاملين. ونحصل على عدد درجات الحرية المقابل لـ $SSABC$ بالطرح وهو يمثل عدد العلاقات الخطية المستقلة بين جميع حدود التفاعل $\alpha\beta\gamma$.

وتوقع متوسط المربعات معطى، أيضاً، في الجدول (٢٢-٣). لاحظ أن توقعات كل من MSA , MSB , MSC , $MSAB$, $MSAC$, $MSBC$ و $MSABC$ يساوي σ^2 إذا لم يكن هناك تأثير للعامل من النوع الذي يعكسه متوسط المربعات. وإذا كانت مثل هذه

التأثيرات موجودة، فكل متوسط مربعات توقع يتجاوز σ^2 . وكالمعاد، فإن $E(MSE) = \sigma^2$ دوماً، وبالتالي، فإن اختبار تأثيرات عامل يتألف من مقارنة متوسط المربعات المناسب مع MSE باستخدام إحصاءة الاختبار F^* وتشير القيم الكبيرة لـ F^* إلى وجود تأثير عامل.

وفي الجدول (٢٢-٥) نجد جدول التحاين لمثال اختبار الشدة الذي يتضمن ثلاثة عوامل (التفاصيل الحسابية غير معطاة).

اختبارات تأثيرات عامل

تتبع جميع الاختبارات المختلفة لتأثيرات عامل النمط نفسه؛ ونوضحها من خلال اختبار تفاعلات ثلاثية العامل. البدائل هي:

$$H_0: \text{جميع } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \text{ مساوية للصفر} \quad (22.28a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \text{ تساوي الصفر}$$

وإحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MS_{ABC}}{MSE} \quad (22.28b)$$

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* يتبع التوزيع F بـ $(a-1)(b-1)(c-1)$ درجة من الحرية في البسط و $abc(n-1)$ درجة من الحرية في المقام، وهكذا تكون قاعدة القرار مع ضبط الخطأ من النوع الأول عند المستوى α :

$$\text{إذا كان } F^* \leq F[1 - \alpha, (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc], \text{ استتج } H_0$$

$$\text{إذا كان } F^* > F[1 - \alpha, (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc], \text{ استتج } H_a$$

ويحتوي الجدول (٢٢-٤) على إحصاءات الاختبار المناسبة ومعينات التوزيع F لمختلف الاختبارات الممكنة في دراسة ثلاثية العوامل.

جدول (٢٦-٣) جدول تحليل عام للدراسة تتضمن للاثلا عوامل مع مستويات عامل متبة.

مصدر التغير	SS	df	MS	E(MS)
ما بين المعاملات	SSTR	abc - 1	MSTR	$\frac{n \sum \sum \sum (\mu_{ijk} - \mu_{...})^2}{abc - 1}$
عامل A	SSA	a - 1	MSA	$\sigma^2 + \frac{bcn}{a-1} \sum \alpha_i^2$
عامل B	SSB	b - 1	MSB	$\sigma^2 + \frac{acn}{b-1} \sum \beta_j^2$
عامل C	SSC	c - 1	MSC	$\sigma^2 + \frac{abn}{c-1} \sum \gamma_k^2$
التفاعلات AB	SSAB	(a - 1)(b - 1)	MSAB	$\sigma^2 + \frac{cn}{(a-1)(b-1)} \sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2$
التفاعلات AC	SSAC	(a - 1)(c - 1)	MSAC	$\sigma^2 + \frac{bn}{(a-1)(c-1)} \sum \sum (\alpha\gamma)_{ik}^2$
التفاعلات BC	SSBC	(b - 1)(c - 1)	MSBC	$\sigma^2 + \frac{an}{(b-1)(c-1)} \sum \sum (\beta\gamma)_{jk}^2$
التفاعلات ABC	SSABC	(a - 1)(b - 1)(c - 1)	MSABC	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)(c-1)} \sum \sum \sum (\alpha\beta\gamma)_{ijk}^2$
المبا	SSE	abc(n - 1)	MSE	σ^2
المجموع	SSTO	abcn - 1		

ملاحظة: انظر (22.13) حيث نعرف العالم الواردة في العمود الأخير.

تعليقات

١ - عندما تتضمن عائلة الاختبارات مجموعة مركبة من سبعة اختبارات فيها ثلاثة اختبارات حول التأثيرات الرئيسية وثلاثة حول التفاعلات ثنائية العامل واختبار واحد للتفاعل ثلاثي العوامل، تكون متباينة كيمبل في حالة مستوى معنوية عالي α :

$$(22.29) \quad \alpha < 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_7)$$

حيث α_i مستوى المعنوية للاختبار i .

٢ - إذا كانت التفاعلات ثلاثية العامل (و ربما، أيضا، بضعا من التفاعلات ثنائية العامل) مساوية للصفر، فيبرز أحيانا التساؤل عما إذا كان ينبغي دمج مجاميع المربعات مع مجموع مربعات الخطأ. ومناقشتنا السابقة حول تحسين نموذج التحاين (فقرة ٩-١٨) قابلة للتطبيق هنا، أيضا.

٣ - إذا كانت هناك مشاهدة واحدة، فقط، لكل معالجة في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مثبتة، فيمكن القيام باختبارات تحليل التباين، فقط، إذا أمكن الافتراض بأن بعض التفاعلات تساوي الصفر. ومن الأرجح عادة أن تكون التفاعلات المساوية للصفر، هي التفاعلات ثلاثية العامل. وإذا أمكن الافتراض بأن جميع التفاعلات ثلاثية العامل مساوية للصفر، فإن توقع $MSAB$ يكون تم وهو يلعب دور متوسط مربعات الخطأ MSE . ونحسب جميع متوسطات المربعات بالطريقة المعتادة، باستثناء أن $n = 1$.

٤ - يمكن الحصول على إحصاءات الاختبارات F^* في الجدول (٢٢-٤) باستخدام طريقة الاختبار الخطي العام الموضحة في الفصل الثالث. وعلى سبيل المثال، لاختبار ما إذا كانت التفاعلات ثلاثية العامل صفرا، فالبديل هي تلك المذكورة في (22.28a) والنموذج التام هو ذلك المذكور في (22.14)، والنموذج المحفّض تحت H_0 :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \quad (20.30)$$

هو: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

جدول (٤-٢٢) إحصاءات الاختبارات لفرضية تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مفردة.

المقارن	إحصاءة الاختبار	البديل
$F[1-\alpha, a-1, (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSA}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $\alpha_i = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $\alpha_i = 0$
$F[1-\alpha, b-1, (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSB}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $\beta_j = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $\beta_j = 0$
$F[1-\alpha, c-1, (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSC}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $\gamma_k = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $\gamma_k = 0$
$F[1-\alpha, (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSAB}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $(\alpha\beta)_{ij} = 0$
$F[1-\alpha, (a-1)(c-1), (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSAC}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$
$F[1-\alpha, (b-1)(c-1), (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSBC}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $(\beta\gamma)_{jk} = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $(\beta\gamma)_{jk} = 0$
$F[1-\alpha, (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc]$	$F^* = \frac{MSABC}{MSE}$	H_0 : جميع التأثيرات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$ H_a : ليس جميع التأثيرات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$

(٢-٢٢) تقويم مصداقية نموذج التحاين

لا تبرز مشاكل جديدة في اختبار مصداقية نموذج تحليل التباين بثلاثة عوامل. فيمكن اختبار طبيعة الرواسب.

$$e_{\text{مقياس}} = Y_{\text{مقياس}} - \bar{Y}_{\text{مقياس}} \quad (22.31)$$

واختبار تباين الخطأ، واستقلال حدود الخطأ بالطريقة نفسها التي رأيناها في حالة دراسات تتضمن عاملاً واحداً أو عاملين.

ويمكن استخدام التحويلات لجعل تباينات الخطأ مستقرة، ولجعل توزيعات الخطأ أكثر طبيعية، و / أو لجعل التفاعلات المهمة غير ذات أهمية. وتنطبق مناقشتنا السابقة حول هذا الموضوع على حالة ثلاث عوامل انطباقاً تاماً.

وأخيراً، تنطبق مناقشتنا السابقة حول تأثيرات الحيدود عن نموذج التحاين انطباقاً تاماً على حالة العوامل الثلاثة. وعلى وجه الخصوص، فإن استخدام حجوم عينات متساوية لكل معالجة يجعل تأثير التباينات غير المتساوية أصغر ما يمكن.

(٤-٢٢) تحليل تأثيرات العوامل

لا تواجهنا مشاكل جديدة عند تحليل تأثيرات العوامل في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مثبته، وكما في الدراسات ذات العاملين يركز التحليل كالعادة على متوسطات مستويات عامل عندما تكون التفاعلات المهمة غير موجودة، وعلى متوسطات المعالجات عند وجود تفاعلات مهمة. وسنقدم الآن بعض النتائج المختارة المتعلقة بتقدير تأثيرات عامل، وتبع التحليلات الأخرى النمط نفسه.

تحليل تأثيرات عامل عندما لا تتفاعل العوامل

تقدير متوسط مستوى عامل. يُقدر $\mu_{i..}$ متوسط مستوى العامل A بـ

$$\hat{\mu}_{i..} = \bar{y}_{i..} \quad (22.32)$$

وتقدير تباين هذا المقدّر هو:

$$s^2\{\bar{y}_{i..}\} = \frac{MSE}{nbc} \quad (22.33)$$

ونحصل على حدّي الثقة لـ $\mu_{i..}$ باستخدام التوزيع t مع $(n-1)abc$ درجة من الحرية:

$$\bar{y}_{i..} \pm t[1-\alpha/2; (n-1)abc]s\{\bar{y}_{i..}\} \quad (22.34)$$

وبصورة مماثلة نقوم بتقدير متوسطات مستوى عامل بالنسبة للعامل B أو للعامل C . تقدير مقارنة بين متوسطات مستويات عامل. عندما نريد تقدير مقارنة تنطوي على متوسطات مستويات العامل A و $\mu_{i..}$.

$$L = \sum c_i \mu_{i..} \quad (22.35)$$

فسنستخدم المقدّر غير المنحاز لـ L :

$$\hat{L} = \sum c_i \bar{y}_{i..} \quad (22.36)$$

وتقدير تباين \hat{L} هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{nbc} \sum c_i^2 \quad (22.37)$$

و $(1-\alpha)$ حدّي ثقة لـ L هما:

$$\hat{L} \pm t[1-\alpha/2; (n-1)abc]s\{\hat{L}\} \quad (22.38)$$

وبصورة مماثلة نُقدّر مقارنات تنطوي على متوسطات مستويات العامل B أو العامل C .

مقارنات متعددة لمتوسطات مستويات عامل. إذا أردنا تقدير عدد من المقارنات بين μ_i . أي متوسطات مستويات العامل A مستخدمين معامل ثقة عالٍ، فإن أحد المقدّرات T أو S أو B المرفّعة فيما يلي يحل محل المقدار t في (22.38):

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; a, (n-1)abc] \quad \text{طريقة توكي (لمقارنات ثنائية)} \quad (22.39a)$$

$$S^2 = (a-1)F[1-\alpha; a, (n-1)abc] \quad \text{طريقة شيفه} \quad (22.39b)$$

$$B = t[1-\alpha/2g; (n-1)abc] \quad \text{طريقة بونفيروني} \quad (22.39c)$$

وبصورة مماثلة نُقدّر مقارنات متعددة بين متوسطات مستويات العامل μ_{ij} أو متوسطات مستويات العامل μ_{ijk} .

تحليل تأثيرات عامل عندما تكون التفاعلات مهمة

وكما شرحنا سابقاً في دراسات ذات عاملين، يحاول المرء عادة جعل التفاعلات غير مهمة باستخدام تحويل بسيط للبيانات. وإذا لم تُفلح تلك الجهود نحلل عندئذٍ التفاعلات المهمة بالطريقة التقليدية بدلالة متوسطات المعالجات μ_{ijk} .

تقدير متوسط معالجة. يُقدّر متوسط المعالجة μ_{ijk} بـ:

$$\hat{\mu}_{ijk} = \bar{Y}_{ijk} \quad (22.40)$$

وتقدير تباين \bar{Y}_{ijk} هو:

$$s^2(\bar{Y}_{ijk}) = \frac{MSE}{n} \quad (22.41)$$

وتقدير تباين \bar{Y}_{ijk} هما:

$$\bar{Y}_{ijk} \pm t[1-\alpha/2; (n-1)abc]s(\bar{Y}_{ijk}) \quad (22.42)$$

تقدير مقارنة بين متوسطات معالجة. عندما تكون التفاعلات موجودة، فنرغب عادة بالمقارنة بين متوسطات المعالجات \bar{Y}_{ijk} . ل نرمز، كالمعاد، بـ L لمقارنة كهذه:

$$L = \sum \sum \sum c_{ijk} \mu_{ijk} \quad (22.43)$$

حيث : $\sum \sum \sum c_{ijk} = 0$
والمقدر غير المنحاز لـ L هو:

$$\hat{L} = \sum \sum \sum c_{ijk} \bar{Y}_{ijk} \quad (22.44)$$

وتقدير تباينه هو:

$$s^2(\hat{L}) = \frac{MSE}{n} \sum \sum \sum c_{ijk}^2 \quad (22.45)$$

وكالمعتاد، فإن حدّي الثقة لـ L هما:

$$\hat{L} \pm t[1-\alpha/2; (n-1)abc] s(\hat{L}) \quad (22.46)$$

وأحيانا لا نكون جميع أنواع تأثيرات التفاعل موجودة. وفي حالة كهذه، يمكن أن تتضمن المقارنات المرغوبة متوسطات الـ μ_{ijk} مأخوذة فوق أحد العوامل. وعلى سبيل المثال، عندما تكون التفاعلات BC ، فقط، موجودة، فقد نهتم بمقارنات المتوسطات μ_{ij} :

$$L = \sum \sum c_{ij} \mu_{ij} \quad (22.47)$$

حيث $\sum \sum c_{ij} = 0$.

ومثل هذه المقارنات هي، بالطبع، حالات خاصة من مقارنات متوسطات المعالجات μ_{ijk} في (22.43). ومن (22.44) يمكن أن نحصل بسهولة على مقدر المقارنة (22.47) كما نحصل على تقدير التباين من (22.45)؛ وهي كما يلي:

$$\hat{L} = \sum \sum c_{ij} \bar{Y}_{ij} \quad (22.48)$$

$$s^2(\hat{L}) = \frac{MSE}{na} \sum \sum c_{ij}^2 \quad (22.49)$$

مقارنات متعددة بين متوسطات المعالجات. في المقارنات المتعددة نضع أحد المقادير T أو S أو B بدلا من L في (22.46) حيث:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} t[1-\alpha; abc, (n-1)abc] \quad (22.50a)$$

$$S^2 = (abc-1) F[1-\alpha; abc-1, (n-1)abc] \quad (22.50b)$$

$$B = t[1-\alpha/2g; (n-1)abc] \quad (22.50c)$$

طريقة بوتغروني

اختبارات بلرجه واحدة من الحرية. عندما تكون التفاعلات موجودة، نستخدم أحيانا، كبديل عن تقدير المقارنات، اختبارا واحدا أو عدة اختبارات حول متوسطات المعالجات μ_{ijk} ، كل منها بدرجة واحدة من الحرية. والبدائل ذات الجانبين لاختبار بدرجة واحدة من الحرية هي:

$$\begin{aligned} H_0: \sum \sum \sum c_{ijk} \mu_{ijk} &= c \\ H_a: \sum \sum \sum c_{ijk} \mu_{ijk} &\neq c \end{aligned} \quad (22.51)$$

حيث c_{ijk} و c ثوابت مناسبة.

ولاختبار البدائل ذات الجانبين (22.51)، يمكن استخدام إحصاء الاختبار:

$$t^* = \frac{\sum \sum \sum c_{ijk} \bar{Y}_{ijk} - c}{\sqrt{\frac{MSE}{n} \sum \sum \sum c_{ijk}^2}} \quad (22.52)$$

التي تتبع، عندما تكون H_0 صحيحة، التوزيع t بـ $(n-1)abc$ درجة من الحرية. وبصورة بدلية يمكن استخدام $(t^*)^2 = F^*$ كإحصاء للاختبار. وعندما تكون H_0 صحيحة، تتبع F^* التوزيع F بدرجة واحدة من الحرية في البسط و $(n-1)abc$ درجة من الحرية في المقام.

(٥-٢٢) مثال عن دراسة تتضمن ثلاثة عوامل

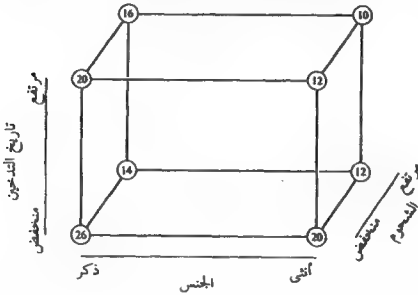
سنحلل الآن البيان الإحصائي المعطى في الجدول (٢-٢٢) (فقرة ٢-٢٢) والمتعلق بدراسة مدى الأهلية لإجراء تمارين في اختبار شدة. ويقاس مدى الأهلية لإجراء التمارين باللفاق المصرفة حتى وقوع التعب لشخص يستخدم دراجة، ولذا نذكر أن العوامل الثلاثة هي جنس الشخص (A)، شحوم الجسم مقياس كنسبة مئوية (B)، وتاريخ التدخين لدى الشخص (C)، ولكل من العوامل مستويان. ويقدم الشكل (٥-٢٢) متوسطات المعالجات المقترنة \bar{Y}_{ijk} كما يعطيها الجدول (٢-٢٢) جـ في صورة مبسطة. ومتوسطات المعالجات المقترنة نفسها مبينة في الشكل (٦-٢٢) كرسوم بيانية. ويبدو من الشكلين (٥-٢٢) و (٦-٢٢) أن بعض العوامل يمكن أن تتفاعل في تأثيراتها على مدى الأهلية لإجراء التمارين، وأن الجنس، بصورة خاصة، يمكن أن يؤثر في

مدى التحمل عند القيام باختبار شدة، ويرغب الباحث الآن بتحليل طبيعة تأثيرات العامل بالتفصيل.

تحليل الرواسب

قام المحلل أولاً بتهيئة رسوم نقطية للرواسب من أجل المعالجات الثماني. ولم تقو هذه الرسوم، (وهي غير معطاة هنا)، مع أنها مبنية على ثلاث مشاهدات، فقط، لكل معالجة، أية فروق جسيمة في تباينات الخطأ للمعالجات الثماني.

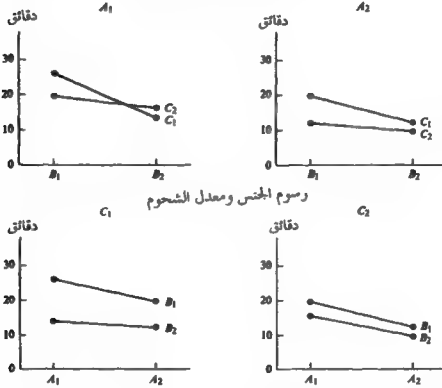
شكل (٥-٢٢) رسم تخطيطي لمجموعات المعالجات المقترنة - مثال اختيار الشدة.



وقد حصل الباحث، أيضاً، على رسم احتمال طبيعي للرواسب، وهو مبين في الشكل (٧-٢٢). وتتخذ النقاط في هذا الرسم نمطاً خطياً تقريباً، مع أن هناك عدداً كبيراً من القيم المكررة بين الرواسب بسبب تدوير الأرقام العشرية في البيانات. وانطباع الخطية هذا تدعمه القيمة المرتفعة لمعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية، ونعني 0.969. ولذلك كان الباحث مقتنعاً بأن نموذج التحسين (22.14) بثلاثة عوامل قابل للتطبيق هنا.

شكل (٦-٢٢) رسومات متوسطات المعالجات المقفلة - مثال اختبار الشدة.

(أ) رسوم معدل الشحوم وتاريخ التدهين



اختبارات خاصة بتأثيرات العوامل

رغب الباحث أن يختبر أولاً تأثيرات العوامل المختلفة. كما رغب في اعتماد مستوى معنوية عاظمي $\alpha = 0.10$ ، للاختبارات الأساسية السبعة، وسيؤكد هذا أنه إذا لم تكن توجد في الحقيقة أية تأثيرات عوامل، فسيكون هناك فرصة من عشرة، فقط، في أن يقود واحد أو أكثر من الاختبارات السبعة إلى النتيجة الخاطئة بوجود تأثيرات عوامل. ومستخدماً متباينة كيمبل (22.29)، قام بحل المعادلة:

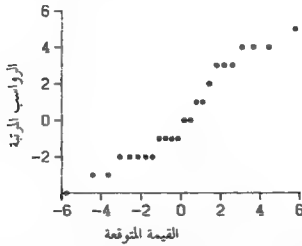
$$10 = 1 - (1 - \alpha)^7, \alpha =$$

فوجد $\alpha = 0.015$ ، وهكذا، فإن استخدام مستوى معنوية $\alpha = 0.015$ لكل اختبار يؤكد أن مستوى المعنوية العاظمي سوف لا يتجاوز 0.10.

ويتضمن الجدول (٥-٢٢) نتائج تشغيلية لحزمة حاسب خاصة بتحسين متعدد العوامل. و جدول التحاين معطى بالإضافة إلى إحصائيات الاختبارات السبع والقيمة P.

لكل منها. وفي بسط كل إحصاءة اختبار متوسط مربعات تأثير العامل المناسب، وفي مقام كل إحصاءة اختبار MSE .
اختبار التفاعلات ثلاثية العوامل. نَفِّذ الاختبار الأول لتفاعلات ثلاثية العوامل. والبدائل هي:

شكل (٧-٢٢) رسم احتمال طبعي للرواسب - مثال اختبار الشدة.



جدول (٥-٢٢) جدول تحليل للدراسة تتضمن ثلاثة عوامل - مثال اختبار الشدة

مصدر التغير	SS	df	MS	F*	القيمة P
ما بين المعالجات	610.5	7	87.21		
العامل A (الجنس)	181.50	1	181.50	20.74	0+
العامل B (معدل الشحوم)	253.50	1	253.50	28.97	0+
العامل C (التدخين)	73.50	1	73.50	8.40	.01
التفاعلات AB	13.50	1	13.50	1.54	.23
التفاعلات AC	13.50	1	13.50	1.54	.23
التفاعلات BC	73.50	1	73.50	8.40	.01
التفاعلات ABC	1.50	1	1.50	.17	.69
الخطأ	140.00	16	8.75		
المجموع	750.5	23			
$F(985; 1, 16) = 7.42$					

$H_0: (ab\gamma)_{ijk}$ جميعها مساوية للصفر

ليست جميع $(ab\gamma)_{ijk}$ مساوية للصفر H_a

وقاعدة القرار هي:

إذا كان: $F^* \leq F(985; 1, 16) = 7.42$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > F(985; 1, 16) = 7.42$ استنتج H_a

وإحصاء الاختبار F^* مأخوذة من الجدول (٥-٢٢) وهي:

$$F^* = \frac{MS_{ABC}}{MSE} = \frac{150}{8.75} = 17$$

وبما أن $F^* = 17 \leq 7.42$ ، فقد استنتج الباحث عدم وجود تفاعلات ABC . والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.69.

اختبارات التفاعلات ثنائية العامل. اختبر الباحث بعد ذلك التفاعلات ثنائية العامل. وفي الاختبار الخاص بالتفاعلات AB ، نجد قاعدة القرار (البدايل معطاة في الجدول ٤-٢٢):

إذا كان: $F^* \leq F(985; 1, 16) = 7.42$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > F(985; 1, 16) = 7.42$ استنتج H_a

وإحصاء الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MS_{AB}}{MSE} = \frac{1350}{8.75} = 154$$

وبما أن $F^* = 154 \leq 7.42$ ، فقد استنتج الباحث عدم وجود تفاعلات AB . والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.23.

ونمضي الاختبارات الخاصة بالتفاعلات AC و BC بصورة مماثلة. وفيها نجد:

$$F^* = \frac{MS_{AC}}{MSE} = \frac{1350}{8.75} = 154 \leq F(985; 1, 16) = 7.42 \quad P\text{-القيمة} = 0.23$$

النتيجة: لا توجد تفاعلات AC .

$$F^* = \frac{MS_{BC}}{MSE} = \frac{7350}{8.75} = 840 > F(985; 1, 16) = 7.42 \quad P\text{-القيمة} = 0.01$$

النتيجة: بعض التفاعلات AC موجودة.

وعند هذه النقطة، درس الباحث عدة تحويلات بسيطة للبيان الإحصائي ليرى ما إذا كان يمكن إزاحة التفاعلات BC ، إلا أنه لم يفلح في مسماءه. اختبارات التأثيرات الرئيسية. بما أن العامل A (الجنس) لا يتفاعل مع العاملين الآخرين، فقد استدار الاهتمام إلى اختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A ، ولهذا الغرض نجد أن قاعدة القرار (البدايل معطاة في الجدول ٢٢ - ٤) هي:

$$\text{إذا كان: } F^* \leq F(985; 1, 16) = 7.42 \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كان: } F^* > F(985; 1, 16) = 7.42 \text{ استنتج } H_a$$

وإحصاء الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{18150}{8.75} = 20.74$$

وبما أن $20.74 \leq F^* = 20.74$ ، فقد استنتج الباحث أن التأثيرات الرئيسية للعامل A موجودة. والقيمة p لهذا الاختبار هي 0^+

ولم تُعتبر التأثيرات الرئيسية للعاملين B و C عند هذه النقطة بسبب ما وُجد من حضور للتفاعلات AC . وقد رغب الباحث في أن يدرس أولاً طبيعة تأثيرات التفاعلات BC قبل أن يحدد ما إذا كان للتأثيرات الرئيسية للعاملين B و C أية جدوى عملية في الظروف المحيطة.

عائلة النتائج. قادت اختبارات F المتفصلة الخمسة إلى أن يستنتج الباحث (بمستوى معنوية عائلي لا يتجاوز 0.10):

١ - لا يوجد تفاعلات ثلاثية العامل.

٢ - لا يوجد تفاعلات ثنائية العامل بين الجنس (العامل A) وأي من العاملين الآخرين

- شحوم الجسم (العامل B) وتاريخ التدخين (العامل C)، إلا أن التفاعلات بين

شحوم الجسم وتاريخ التدخين موجودة.

٣ - التأثيرات الرئيسية للجنس (العامل A) موجودة.

وكانت هذه المجموعة من نتائج الاختبارات مفيدة جدا للباحث. وكانت الخطوة التالية في تحليله هو أن يختبر طبيعة تأثيرات التفاعلات BC والتأثيرات الرئيسة للعامل A .

تقدير تأثيرات العوامل

ولدراسة طبيعة تأثيرات التفاعلات BC ، رغب الباحث في أن يقدر بصورة منفصلة، لأشخاصٍ شحومُ الجسم عندهم عالية ومنخفضة، الفرق في متوسط زمن التعب بين المسرفين في التدخين وغير المسرفين والمقارنات المرغوبة هي :

$$L_1 = \mu_{11} - \mu_{12}$$

$$L_2 = \mu_{21} - \mu_{22}$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن مقارنة بمفردها بين متوسطي مستويي العامل A كافية لتحليل التأثيرات الرئيسة للعامل A باعتبار أن للعامل A مستويين، فقط، والمقارنة المفيدة (هنا مقارنة ثنائية بين متوسطي مستويي العامل) هي :

$$L_3 = \mu_{1.} - \mu_{2.}$$

وهذه المقارنات الثلاث مقترنة كما يلي :

$$\hat{L}_1 = \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12}$$

$$\hat{L}_2 = \bar{Y}_{21} - \bar{Y}_{22}$$

$$\hat{L}_3 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{2.}$$

ومن الجدول (٢٢-٢) ج، نحصل على :

$$\hat{L}_1 = 23 - 16 = 7$$

$$\hat{L}_2 = 13 - 13 = 0$$

$$\hat{L}_3 = 19 - 13.5 = 5.5$$

وقد استخدم الباحث التباينات المقترنة (22.49) و (22.37) وحدي الثقة (22.46) بمعامل ثقة عائلي 95% مؤسس على طريقة بوتفرونوي. وبالتالي فقد احتاج، من أجل المقارنات الثلاث، للنتائج التالية :

$$B = t(1-.05 / 6; 16) = 2.673$$

$$s^2\{\hat{L}_1\} = s^2\{\hat{L}_2\} = \frac{MSE}{na} \left[(1)^2 + (-1)^2 \right] = \frac{8.75}{6}(2) = 2.917$$

$$s^2\{\hat{L}_3\} = \frac{MSE}{na} \left[(1)^2 + (-1)^2 \right] = \frac{8.75}{12}(2) = 1.458$$

$$s\{\hat{L}_1\} = s\{\hat{L}_2\} = 1.708 \quad s\{\hat{L}_3\} = 1.207$$

وهكذا تكون فترات الثقة المرغوبة كما يلي:

$$\begin{aligned} 2.4 = 7.0 - 2.673(1.708) &\leq \mu_{11} - \mu_{12} \leq 7.0 + 2.673(1.708) = 11.6 \\ -4.6 = 0 - 2.673(1.708) &\leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq 0 + 2.673(1.708) = 4.6 \\ 2.3 = 5.5 - 2.673(1.207) &\leq \mu_{1.} - \mu_{2.} \leq 5.5 + 2.673(1.207) = 8.7 \end{aligned}$$

وقد استنتج الباحث بالتالي وبمعامل ثقة عاظمي 0.95: (١) بين الناس ذوي الشحوم الجسمية المنخفضة يزيد متوسط زمن تحمل اختبارات الشدة لغير المسرفين في تدخينهم بمقدار 2.4 إلى 11.6 دقيقة عن متوسط زمن التحمل للمسرفين في تدخينهم. (٢) وفي الناس ذوي الشحوم الجسمية المرتفعة، لا يختلف متوسط زمن التحمل سواء أكانوا من المسرفين أم من غير المسرفين في التدخين. (٣) يزيد متوسط زمن تحمل اختبار الشدة عند الرجال بمقدار 2.3 إلى 7.8 دقيقة عن متوسط زمن التحمل عند النساء.

وفي ضوء تأثيرات التفاعلات المهمة التي لوحظت بين شحوم الجسم وتاريخ التدخين على زمن تحمل اختبار الشدة، فقد استنتج الباحث أن التأثيرات الرئيسية للعاملين B و C غير ذات أهمية، ولذلك فقد أنهى تحليله عند هذه النقطة. وقُدِّمت النتائج الرئيسة ببيان في الشكل (٨-٢٢). وبين الشكل (٨-٢٢) مقدار تأثير الجنس على زمن تحمل اختبار الشدة، وبين الشكل (٨-٢٢) ب طبيعة تأثيرات التفاعل بين شحوم الجسم وتاريخ التدخين.

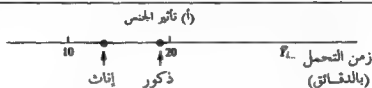
(٨-٢٢) تخطيط حجوم العينات

تعالج مسألة تخطيط حجوم العينات أساساً في الدراسات التي تتضمن ثلاثة عوامل بالطريقة نفسها التي رأيناها في دراسات ذات عامل واحد أو عاملين. وبالتالي نكتفي بذكر ملاحظات قليلة مختصرة. وسنستعرض أولاً قوة الاختبارات F دراسات تتضمن ثلاثة عوامل.

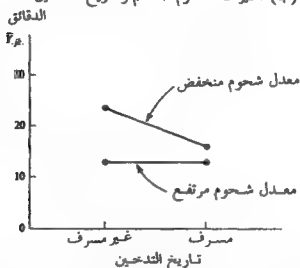
قوة الاختبارات F

يمكن الحصول على قوة اختبار تأثيرات عامل في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل من الجدول ٨.٨ بالطريقة التي وصفناها في دراسات تتضمن عاملا واحدا أو عاملين. وتُعرف معلمة اللامركزية ϕ لاختبار معطى كما يلي:

شكل (٨-٢٢) النتائج الرئيسة من دراسة زمن تحمل اختبار الشدة



(ب) تأثيرات شحوم الجسم وتاريخ التدخين



$$\phi = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\text{بسط الحد الثاني في } E(MS) \text{ في الجدول ٣-٢٢}}{\text{مقام الحد الثاني في } E(MS) \text{ زائدا الواحد}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22.53)$$

وهكذا يكون لدينا، في حالة اختبار وجود تفاعلات ثلاثية العامل:

$$\phi = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{n \sum \sum \sum (a\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)+1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

أساليب التخطيط

في معظم الحالات سيكون تساوي التكرارات لكل معالجة مرغوبا . وعند تخطيط حجم العينات بأسلوب القوة يهتم المرء عادة بقوة الكشف عن وجود تأثيرات رئيسة للعامل A ، وقوة الكشف عن وجود تأثيرات رئيسة للعامل B ، وقوة الكشف عن وجود تأثيرات رئيسة للعامل C . ويمكن أن نحدد أولا المدى الأصغري لتوسطات مستوى العامل A الذي يكون من المهم معه الكشف عن تأثيرات رئيسة للعامل A ، ثم نحصل على حجم العينات التي نحتاجها من الجدول (١٠-١) حيث $r = a$. ويكون استخدام الجدول العينة الناتج هو bcn ، ومنه يمكن الحصول بسهولة على n . ويكون استخدام الجدول (١٠-١) لهذا الغرض مناسباً شريطة أن تكون أحجام العينات الناتجة غير صغيرة، وعلى وجه التحديد شريطة أن يكون $20 \leq (bcn - 1)$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط، فينبغي استخدام جداول القوة لبروسون وهارتلي في الجدول (٨-١) متبعين أسلوب التكرار والإعادة (أو أسلوب التجربة والخطأ).

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد قيم للمدى الأصغري لتوسطات مستويات كل من العاملين B و C التي يكون من المهم معها الكشف عن التأثيرات الرئيسة للعامل، ثم إيجاد أحجام العينات المطلوبة. وإذا اختلفت أحجام العينات التي نحصل عليها من العامل A والعامل B والعامل C اختلافاً كبيراً، فسنحتاج إلى اتخاذ قرار تسوية بالنسبة للأحجام النهائية للعينات.

وبصورة بدئية، أو مقترناً مع أسلوب القوة، يمكن تحديد المقارنات المهمة التي نريد تقديرها، ثم إيجاد أحجام العينات التي يُتوقع أن تُفضي إلى الدقة المرجوة للعامل الفقرة العائلي المرغوب. وكثيراً ما يكون هذا الأسلوب أكثر فائدة من أسلوب القوة، مع أنه يمكن استخدام الأسلوبين كليهما للوصول إلى تحديد أحجام العينات المطلوبة. وإذا كان الغرض من الدراسة العملية هو تحديد التركيبة الأفضل بين الـ abc من التركيبات العملية الممكنة، فيمكن استخدام الجدول (١١-١) لإيجاد أحجام العينات المطلوبة، وذلك كما وصفنا في الفقرة (١٧-٣). ولهذا الغاية يكون $r = abc$.

(٧-٢٢) حجوم عينات غير متساوية في دراسات متعددة العوامل

عندما تكون حجوم عينات المعالجات في دراسة متعددة العوامل غير متساوية، ينبغي اتباع الطرق المشروحة في الفصل العشرين والخاصة بدراسات تتضمن عاملين بعد إجراء تعديلات روتينية. ونستمر في افتراض أن لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها وأنه لا توجد خلافا فارغة.

اختبارات تأثيرات العوامل

يمكن اختبار تأثيرات العوامل في دراسات متعددة العوامل مع حجوم عينات غير متساوية باستخدام أسلوب الانحدار. ويُصمم لكل عامل متغيرات مؤشرية تتخذ القيم 1، -1، 0، وعدد هذه المتغيرات يساوي عدد مستويات العامل مطروحا منه الواحد، وتُمثل تأثيرات التفاعل، كالاعتقاد، بحدود جدائية، وبما أن مجاميع المربعات لا تعود متعامدة عندما تكون حجوم عينات المعالجات غير متساوية، فلا بد من توفيق نماذج مخفضة مختلفة من أجل الاختبارات المعينة.

مثال. لنفرض في مثال اختبار الشدة في الجدول (٢-٢٢)، أن المشاهدين Y_{1113} و Y_{2212} مفقودتان. فلتطوير نموذج انحدار لهذا المثال، نلاحظ أن لكل من العوامل الثلاثة مستويين. وبالتالي نحتاج إلى متغير مؤشر واحد لكل عامل، وبذلك يكون نموذج الانحدار التام كما يلي (نموذج تام):

$$Y_{ijklm} = \mu + \alpha_1 X_{ijklm1} + \beta_1 X_{ijklm2} + \gamma_1 X_{ijklm3} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijklm1} X_{ijklm2} + (\alpha\gamma)_{11} X_{ijklm1} X_{ijklm3} + (\beta\gamma)_{11} X_{ijklm2} X_{ijklm3} + (\alpha\beta\gamma)_{111} X_{ijklm1} X_{ijklm2} X_{ijklm3} + \epsilon_{ijklm} \quad (22.54)$$

حيث:

$$X_{ijklm1} = 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل 1}$$

$$X_{ijklm1} = 0 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل 1}$$

$$X_{ijklm2} = 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل 2}$$

$$X_{ijklm2} = 0 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل 2}$$

$$X_{ijklm3} = 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل 3}$$

$$X_{ijklm3} = 0 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل 3}$$

ومعالم الانحدار في النموذج (22.54) هي معالم نموذج التحاين كما عرفناها في (22.13).

ويتضمن الجدول (٦-٢٢) المتجه Y والمصفوفة X لنموذج الانحدار التام (22.54) لمثال اختبار الشدة مع فقدان مشاهدتين. ونحصل على النموذج المخفض لاختبار تأثيرات العوامل المختلفة بإلغاء الأعمدة المناسبة من المصفوفة X في الجدول (٦-٢٢).

جدول (٦-٢٢) بيان مصفوفات نموذج الانحدار (22.54) مثال اختبار الشدة مع فقدان Y_{1113} و Y_{2212} .

			X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
$Y =$	Y_{1111}	24	1	1	1	1	1	1	1
	Y_{1112}	29	1	1	1	1	1	1	1
	Y_{1121}	18	1	1	1	-1	1	-1	-1
	Y_{1122}	19	1	1	1	-1	1	-1	-1
	Y_{1123}	23	1	1	1	-1	1	-1	-1
	Y_{1211}	15	1	1	-1	1	-1	1	-1
	Y_{1212}	15	1	1	-1	1	-1	1	-1
	Y_{1213}	12	1	1	-1	1	-1	1	-1
	Y_{1221}	15	1	1	-1	-1	-1	1	1
	Y_{1222}	20	1	1	-1	-1	-1	1	1
	Y_{1223}	13	1	1	-1	-1	-1	1	1
	Y_{2111}	20	1	-1	1	1	-1	1	-1
	Y_{2112}	22	1	-1	1	1	-1	1	-1
	Y_{2113}	18	1	-1	1	1	-1	1	-1
	Y_{2121}	15	1	-1	1	-1	1	-1	1
	Y_{2122}	10	1	-1	1	-1	1	-1	1
	Y_{2123}	11	1	-1	1	-1	1	-1	1
	Y_{2211}	16	1	-1	-1	1	1	-1	1
	Y_{2213}	11	1	-1	-1	1	1	-1	1
	Y_{2221}	10	1	-1	-1	-1	1	1	-1
	Y_{2222}	14	1	-1	-1	-1	1	1	-1
	Y_{2223}	6	1	-1	-1	-1	1	1	-1

ملاحظة

تطبيق المناقشة الواردة في الفقرة (٢٠-٥) حول استخدام الحزم الإحصائية لتحليل التباين بحجوم عينات غير متساوية و/ أو خلايا فارغة إنطلاقاً تاماً على الدراسات متعددة العوامل.

تقدير تأثيرات العوامل

يجري تقدير تأثيرات العوامل في الدراسات متعددة العوامل مع أحجام عينات غير متساوية بطريقة مماثلة لما رأيناه في دراسات تتضمن عاملين. وببساطة نحتاج إلى تعميم الصيغ الواردة في الجدول (٢٠-٥) إلى حالة ثلاثة عوامل أو أكثر. ولتوضيح هذه التعميمات، لنعتبر المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات عامل A في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل، وتكون مقارنة كهذه مع مقدرها وتقدير تباينها كما يلي:

$$D = \mu_{i.} - \mu_{r.} \quad (22.55a)$$

$$\hat{D} = \hat{\mu}_{i.} - \hat{\mu}_{r.} \quad (22.55b)$$

$$\hat{\mu}_{i.} = \frac{\sum_j \sum_k \bar{y}_{ijk}}{bc} \quad \text{حيث:}$$

$$s^2(\hat{D}) = \frac{MSE}{b^2 c^2} \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{n_{ijk}} + \frac{1}{n_{rjk}} \right) \quad (22.55c)$$

و درجات الحرية المناسبة التي توافق MSE هي $nr - abc$.

(٢٢-٨) النموذجان II و III للدراسات تتضمن ثلاثة عوامل

تماماً كما في دراسات تتضمن عاملاً واحداً أو عاملين، تبقى مجاميع المربعات و درجات الحرية في تحليل التباين لنماذج متعددة العوامل (عشوائية ومختلطة) نفسها كما كانت في نموذج ثنائي مثبت. والمشكلة الرئيسة في النماذج متعددة العوامل العشوائية والمختلطة هي، كما رأينا في نماذج العاملين، تحديد توقعات متوسطات المربعات. وحالما تصبح هذه التوقعات معروفة، يمكن وضع إحصاءات الاختبارات وفترات الثقة في شكلها الصحيح. وسنقدم لاحقاً في الفصل السابع والعشرين قواعد

لإيجاد توقع متوسط مربعات لنماذج عشوائية ومختلطة أيا كان عدد العوامل. ونقدم الآن النموذج II (مستويات العوامل عشوائية) والنموذج III (مستويات العوامل مختلطة) للدراسات تتضمن ثلاثة عوامل ونبين كيفية القيام باعتبارات مناسبة. ونعتبر من جديد حالة تساوي أحجام عينات المعالجات.

نموذج II (مستويات العوامل عشوائية)

في دراسة لتأثيرات العمال والآلات ودفعات المواد الأولية على الناتج اليومي، يمكن اعتبار العوامل الثلاثة جميعها بمستويات عشوائية. ونموذج التحاين العشوائي للدراسة كهذه تتضمن ثلاثة عوامل هو:

$$Y_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm} \quad (22.56)$$

حيث:

μ ثابت

$$\varepsilon_{ijkm}, (\alpha\beta\gamma)_{ijk}, (\beta\gamma)_{jk}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\alpha\beta)_{ij}, \gamma_k, \beta_j, \alpha_i$$

متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة توقع كل منها الصفر وتبايناتها، على الترتيب،

$$\sigma^2, \sigma_{\alpha\beta}^2, \sigma_{\beta\gamma}^2, \sigma_{\alpha\gamma}^2, \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2, \sigma_{\gamma}^2, \sigma_{\beta}^2, \sigma_{\alpha}^2$$

$$m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, c, j = 1, \dots, b, i = 1, \dots, n$$

وكما في حالة نموذج تحاين عشوائي بعاملين (21.25)، فإن المشاهدات Y_{ijkm} في نموذج التحاين العشوائي ذي العوامل الثلاثة (22.56) تتوزع طبيعياً بتباين ثابت. والقيمة المتوقعة لمشاهدة Y_{ijkm} وتباينها هما:

$$E\{Y_{ijkm}\} = \mu \dots \quad (22.57a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijkm}\} = \sigma_{\gamma}^2 + \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\gamma}^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_{\alpha\gamma}^2 + \sigma_{\beta\gamma}^2 + \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \sigma^2 \quad (22.57b)$$

وأي مشاهدتين مستقلتان ماعدا مشاهدات تشترك في مستوى أو أكثر من مستويات العوامل، فهذه تكون مرتبطة نظراً لاحتوائها حدوداً عشوائية مشتركة.

ويتضمن الجدول (٢٢-٧) توقعات متوسطات المربعات لجميع مركبات جدول التحاين لنموذج التحاين العشوائي (22.56).

جدول (٧-٢٢) توقعات متوسطات المربعات في دراسة عشوائية تتضمن ثلاثة عوامل

متوسط مربعات	df	توقع متوسط المربعات
MSA	a - 1	$\sigma^2 + nb\sigma_{\alpha}^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSB	b - 1	$\sigma^2 + na\sigma_{\beta}^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSC	c - 1	$\sigma^2 + nab\sigma_{\gamma}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSAB	(a - 1)(b - 1)	$\sigma^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSAC	(a - 1)(c - 1)	$\sigma^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSBC	(b - 1)(c - 1)	$\sigma^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSABC	(a - 1)(b - 1)(c - 1)	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSE	(n - 1)abc	σ^2

نموذج III (مستويات العوامل مختلطة)

لنفرض في دراسة ثلاثية العوامل أن للعاملين B و C مستويات عامل عشوائية، بينما مستويات العامل A مثبتة. فيكون نموذج التحاين المختلط للدراسة ثلاثية العوامل كهذه على الشكل التالي:

$$Y_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm} \quad (22.58)$$

حيث:

μ ثابت

α_i ثابت

$\beta_j, \gamma_k, (\alpha\beta)_{ij}, (\beta\gamma)_{jk}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة مثني مثني بتوقعات مساوية للصفر وتباينات ثابتة. ε_{ijkm} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$ وهي مستقلة عن المركبات العشوائية الأخرى.

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = \sum_k (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_{ijk} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, c; m = 1, \dots, n$$

ونلاحظ أن جميع حدود التفاعلات في هذا النموذج عشوائية، باعتبار أن واحدا على الأقل من العوامل في كل حد له مستويات عامل عشوائية. ونلاحظ، أيضا، أن كافة بمجاميع التأثيرات التي تنطوي على عامل مثبت تساوي الصفر عندما تجمع فوق

مستويات ذلك العامل المثبت، وتوجد ارتباطات مختلفة بين حدود التأثيرات العشوائية، مما سوف لا تفصل فيه.

والملاحظات Y_{ijk} في نموذج التحاين المختلط ثلاثي العوامل (22.58) تتوزع طبيعياً بمتباين ثابت. والقيمة المتوقعة للملاحظة Y_{ijk} هي:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \alpha_i \quad (22.59)$$

وقبل إجراء التجارب العشوائية تكون أي مشاهدين مستقلتين فيما عدا المشاهدات التي تحوي حدود تأثيرات عشوائية مشتركة و/ أو مرتبطة؛ فمثل هذه المشاهدات تكون مرتبطة.

ويتضمن الجدول (٨-٢٢) جميع توقعات متوسطات المربعات لنموذج التحاين المختلط (22.58).

جدول (٨-٢٢) توقعات متوسطات المربعات في دراسة مخططة ثلاثية العوامل (A) مثبت، B و C عشوائيان

متوسط مربعات	df	توقع متوسط المربعات
MSA	a - 1	$\sigma^2 + nb \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + nc \sigma_{\alpha\beta}^2 + nb \sigma_{\alpha\gamma}^2 + n \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSB	b - 1	$\sigma^2 + nac \sigma_{\beta}^2 + na \sigma_{\beta\gamma}^2$
MSC	c - 1	$\sigma^2 + nab \sigma_{\gamma}^2 + nb \sigma_{\beta\gamma}^2$
MSAB	(a - 1)(b - 1)	$\sigma^2 + nc \sigma_{\alpha\beta}^2 + n \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSAC	(a - 1)(c - 1)	$\sigma^2 + nb \sigma_{\alpha\gamma}^2 + n \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSBC	(b - 1)(c - 1)	$\sigma^2 + na \sigma_{\beta\gamma}^2$
MSABC	(a - 1)(b - 1)(c - 1)	$\sigma^2 + n \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSE	(n - 1)abc	σ^2

ويمكن تطوير نماذج تحاين مختلطة أخرى بطريقة مماثلة. ويمكن إيجاد توقعات متوسطات المربعات لهذه النماذج المختلطة باستخدام القواعد التي سنقدمها في الفصل السابع والعشرين.

إحصاءات اختبارات مناسبة

ومن توقعات متوسطات المربعات، نبقى تحديد الإحصاءة المناسبة F لاختبار معطى. وفي الغالب يمكن إيجاد إحصاءة اختبار مضبوطة لنماذج متعددة العوامل مختلطة وعشوائية، ولكن هذا ليس ممكنا على الدوام. اختبار F مضبوط. لنفرض أننا نرغب في تحديد ما إذا كانت التفاعلات BC موجودة أم لا في نموذج التحاين العشوائي في الجدول (٧-٢٢). فنرى بسهولة من عمود توقعات متوسطات المربعات أن إحصاءة الاختبار المناسبة هي $MSBC/MSABC$ وإذا رغبتنا في دراسة السؤال نفسه في حالة نموذج التحاين المختلط في الجدول (٨-٢٢)، فإننا نستطيع، أيضا، إيجاد إحصاءة اختبار مناسبة ولكنها هذه المرة $MSBC/MSE$. وهكذا، نرى أن إحصاءة الاختبار ليستا متطابقتين، مع أننا ندرس تأثيرات العوامل نفسها، وذلك بسبب الفروق بين النموذجين.

وإيجاد اختبار F مضبوط في نماذج تحاين متعددة العوامل مختلطة أو عشوائية ليس ممكنا على الدوام. وعلى سبيل المثال لا يمكننا اختبار وجود التأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي في الجدول (٧-٢٢). ونلاحظ من الجدول عدم وجود توقع متوسط مربعات مؤلف من مركبات $E(MSA)$ مستثنى منها الحد $nbc\sigma_e^2$. ومن الممكن أن نفترض أحيانا أن تفاعلات معينة تساوي الصفر، ونغضى عندها في تحديد اختبار F مضبوط بالطريقة المعتادة. وعلى سبيل المثال، لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي في الجدول (٧-٢٢)، قد يكون من الممكن افتراض أن $\sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$ (في الحقيقة، يمكن اختبار هذا الفرض باستخدام $MSAC/MSABC$). وإذا كان هذا الافتراض مناسباً، فيمكن استخدام إحصاءة الاختبار $MSA/MSAB$ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A .

اختبار F تقريبي يعود لساتروثويت (*Satterthwaite*) وفي الغالب، قد لانعلم ما إذا كانت تفاعلات معينة مساوية للصفر. وفي تلك الحالة، يمكن استخدام اختبار F مستفيداً من شبه إحصاءة اختبار F . وينطوي هذا الاختبار التقريبي، ويدعى اختبار ساتروثويت، على تطوير تركيب خطي في متوسط المربعات توقعه، عندما تكون H_0

صحيحة، هو نفس توقع متوسط مربعات التأثير المراد اختباره لنعبر عن هذا التركيب الخطي كما يلي:

$$a_1MS_1 + a_2MS_2 + \dots + a_hMS_h \quad (22.60)$$

حيث المقادير a_i ثابتة، ويمكن الرهان على أن عدد درجات الحرية التقريبي الموافق للتركيب الخطي (22.60) هو:

$$df \equiv \frac{(a_1MS_1 + a_2MS_2 + \dots + a_hMS_h)^2}{\frac{(a_1MS_1)^2}{df_1} + \frac{(a_2MS_2)^2}{df_2} + \dots + \frac{(a_hMS_h)^2}{df_h}} \quad (22.61)$$

حيث يرمز df_i لعدد درجات الحرية الموافق لـ MS_i . وتشكل إحصاء الاختبار عندئذ بالطريقة المعتادة، وتتبع هذه الإحصاء بصورة تقريبية التوزيع F وذلك عندما تكون H_0 صحيحة.

ونوضح هذه الطريقة باختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي الخاص بالجدول (٧-٢٢):

$$\begin{aligned} H_0: \sigma_a^2 &= 0 \\ H_a: \sigma_a^2 &> 0 \end{aligned} \quad (22.62)$$

ونلاحظ من الجدول (٧-٢٢) أن:

$$E\{MSAB\} + E\{MSAC\} - E\{MSABC\} = \sigma^2 + nc\sigma_{ab}^2 + nb\sigma_{ac}^2 + n\sigma_{abc}^2 \quad (22.63)$$

وهذا يساوي بالضبط $E\{MSA\}$ عندما يكون $\sigma_a^2 = 0$. وبالتالي، فإن إحصاء الاختبار المقترحة هي:

$$F^{**} = \frac{MSA}{MSAB + MSAC - MSABC} \quad (22.64)$$

حيث نرمز لإحصاء الاختبار بـ F^{**} لتذكّرنا بأننا استعملنا شبه اختبار F .

مثال. يتضمن الجدول (٩-٢٢) تحليل التباين لدراسة تأثيرات العمال والآلات ودفعات المواد الأولية على الإنتاج اليومي لطريقة إنتاج مؤتمتة بصورة متقدمة، ويُفترض أن مستويات كل عامل عشوائية. ولاختبار ما إذا كان للعمال (العامل A) تأثير رئيس على الإنتاج، نستخدم إحصاء الاختبار (22.64):

$$F^{**} = \frac{8.5}{2.5 + 4.0 + 1.5} = \frac{8.5}{5.0} = 1.7$$

والعدد التقريبي لدرجات الحرية للمقام هو:

$$df = \frac{(5.0)^2}{\frac{(2.5)^2}{2} + \frac{(4.0)^2}{8} + \frac{(-1.5)^2}{8}} = 4.6$$

ولا تتمخض العلاقة، عادة، عن عدد صحيح للدرجات الحرية. وعندئذ إما أن نقوم بعملية استيفاء في جدول التوزيع F ، أو ندور إلى أقرب عدد صحيح. وفي هذا المثال سندور. والمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، نحتاج إلى $F(0.95; 2, 5) = 5.79$ ، وبما أن $1.7 \leq F^{**} \leq 5.79$ ، فنأخذ بالنتيجة H_0 ، أي أنه لا تأثير للعامل على الإنتاج اليومي، وينبغي أن نتذكر أن هذا الاختبار تقريبي ولكنه يمكن أن يكون مفيداً تماماً إذا استخدم بحذر.

جدول (٩-٢٢) جدول التحاليل للدراسة تتضمن ثلاثة عوامل عشوائية ($a=3, b=2, c=5, n=3$)

مصدر المتغير	SS	df	MS
عامل A (العمال)	17	2	8.5
عامل B (الآلات)	4	1	4.0
عامل C (الدفعات)	25	4	6.2
التفاعلات AB	5	2	2.5
التفاعلات AC	32	8	4.0
التفاعلات BC	12	4	3.0
التفاعلات ABC	12	8	1.5
الخطأ	138	60	2.3
المجموع	245	89	

تقدير التأثيرات

لا توجد مشاكل جديدة عند تطوير مقدرات غير منحازة لمركبات تبين عوامل عشوائية أو في تقدير مقارنات بين عوامل مثبتة في نماذج مختلطة، وذلك عند دراسة ثلاثة عوامل أو أكثر في الوقت نفسه. ونحصل على حدي الثقة لمقارنة بين متوسطات مستويات عامل مثبت باستخدام متوسط المربعات المذكور في مقام إحصاء الاختبار المستخدمة لاختبار وجود التأثيرات الرئيسة لذلك العامل. ودرجات الحرية هي تلك الموافقة لمتوسط المربعات المستخدم.

مسائل

(١-٢٢) بالإشارة إلى الجدول (١-٢٢) الذي يتضمن متوسطات الاستجابة لدراسة μ_{ijk} ذات ثلاثة عوامل.

أ - أوجد التأثيرات الرئيسة للعمر.

ب - أوجد تأثير التفاعل الرئيس للفتيان وذوي المستوى IQ العادي.

ج - أوجد تأثير التفاعل : فتى - مستوى IQ عادي - أثنى.

(٢-٢٢) جهّز رسوم AC لمتوسطات الاستجابة μ_{ijk} في الجدول (١-٢٢)، وذلك في

هيئة الشكل (٢-٢٢) ب. هل تقدم رسومك للمعلومات نفسها التي يقدمها

الشكل (٢-٢٢) ؟ ناقش.

(٣-٢٢) جهّز رسوم BC لمتوسطات الاستجابة μ_{ijk} في الشكل (٢-٢٢)، هل تؤدي

رسومك إلى أية معلومات عن التأثيرات الرئيسة والتفاعلات لم تكن متوفرة

لحينها من الشكل (٢-٢٢) ؟ ناقش.

(٤-٢٢) في دراسة ذات ثلاثة عوامل كانت متوسطات الاستجابة μ_{ijk} كما يلي:

$k = 2$		$k = 1$		
$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	
144	140	138	130	$i = 1$
136	134	130	126	$i = 2$
131	122	125	122	$i = 3$

أ - أوجد α_1 و α_2 و α_3 .

ب - أوجد β_1 و β_2 .

جـ - أوجد $(\alpha\beta)_{12}$ ، $(\alpha\gamma)_{21}$ و $(\alpha\gamma)_{12}$.

د - أوجد $(\alpha\beta\gamma)_{111}$ و $(\alpha\beta\gamma)_{122}$.

(٥-٢٢) بالإشارة إلى المسألة (٤-٢٢)، جهز رسوم AB لتوسطات الاستجابة μ_{ijk}

في هيئة الشكل (٣-٢٢). ماذا تبين هذه الرسومات حول التأثيرات الرئيسة

للعوامل وحول التفاعلات؟

(٦-٢٢) مسألة تقسية: نفذت تجربة تتضمن تقسية أعمدة إدارة خفيفة ممكنة من

قضبان صفيحة للدراسة تأثيرات مقدار وسيط كيميائي يضاف إلى الصفيحة

وهي في حالة الانصهار (العامل A) ودرجة حرارة عملية التقسية (العامل B)

والزمن المنصرم خلال عملية التقسية (العامل C)، وذلك على القساوة

الخارجية لعمود الإدارة. ولكل من العوامل الثلاثة مستويان (١ منخفض، 2

مرتفع) وعدد الأعمدة المختبرة لكل معالجة كانت $n = 3$. وفيما يلي البيان

الإحصائي للقساوة (مقاسة بوحدات برينل):

$k = 2$		$k = 1$		
$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	
70.9	56.0	53.5	39.9	$i = 1$
73.3	56.9	50.7	32.2	
71.6	56.6	52.8	36.3	
82.9	69.4	63.3	45.2	$i = 2$
85.2	66.6	65.5	48.0	
82.3	68.8	63.6	47.5	

أ - أوجد الرواسب وفق نموذج التحاين (22.14) و جهّز رسوماً نقطية

للواسب من أجل كل مستوى من مستويات العامل A . قم بالعمل

نفسه من أجل كل من العاملين الآخرين. ماذا تقترح رسومك حول

مصادقية نموذج التحاين (22.14)؟

ب - نفذ رسم احتمال طبيعي للرواسب، وأوجد، أيضاً، معامل الارتباط

بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو

افتراض التوزيع الطبيعي معقولاً هنا؟

(٧-٢٢) بالإشارة إلى مسألة التقسية (٦-٢٢). افترض أن نموذج التحاين المثبت (22.14) هو النموذج المناسب.

أ - جهّز رسوم AB لموسطات المعالجات المقترنة \bar{Y}_{AB} في هيئة الشكل (٦-٢٢) ب. هل يبدو أن هناك أية تفاعلات؟ أية تأثيرات رئيسية؟
ب - اكتب جدول تحليل التباين.

ج - اختبر التفاعلات ثلاثية العوامل : استخدم $\alpha = 0.025$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

د - اختبر التفاعلات AC ، AB و BC . ولكل اختبار، استخدم $\alpha = 0.025$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - لكل اختبار؟

هـ - اختبر التأثيرات الرئيسة لكل من A ، B و C ولكل اختبار، استخدم $\alpha = 0.025$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ما هي القيمة P - لكل اختبار؟

و - اعرض مجموعة النتائج التي يمكن الوصول إليها من الاختبارات في (ج)، (د)، و(هـ). أوجد حلًا أعلى لمستوى المعنوية العائلي لمجموعة الاختبارات ; استخدم متباينة كيميل.

ز - هل تؤيد نتائج الجزء (ز) تحليلك البياني في الجزء (آ)؟

(٨-٢٢) بالإشارة إلى مسألتي التقسية (٦-٢٢) و(٧-٢٢).

أ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة لعامل، قُدِّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_2 - \mu_1, \quad D_2 = \mu_2 - \mu_1, \quad D_3 = \mu_2 - \mu_1$$

استخدم طريقة بوتغروني بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. اعرض نتائجك.

ب - قُدِّر بـ 95% قوة ثقة.

(٩-٢٢) مقالو أبحاث التسويق. قام مستشار في أبحاث التسويق بتقسيم تأثيرات

برنامج دفع الرسوم (العامل A)، أفق العمل (العامل B)، ونوع الإشراف الإداري (العامل C) على نوعية العمل المنجز بموجب عقد من قِبَل وكالات

مستقلة لأبحاث التسويق. وكانت مستويات العوامل في الدراسة كما يلي:

العامل	مستويات العامل
A مستوى الرسم	$i=1$ مرتفع
	$i=2$ متوسط
	$i=3$ منخفض
B أفق العمل	$j=1$ أُنجزت جميع العقود في الشركة
	$j=2$ بعض العقود أُنجزها مقاولون فرعيون
C الإشراف	$k=1$ مشرفون مقيمون
	$k=2$ مشرفون متنقلون

وقبست نوعية العمل المنجز وفق دليل يأخذ في الاعتبار عدة خصائص للنوعية. وقد اختيرت أربع وكالات لكل تركيبة من مستويات العوامل وقوّمت نوعية أعمالها. وفيما يلي قياسات النوعية:

$k=2$		$k=1$		
$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$	
88.2	112.7	115.1	124.3	$i=1$
96.0	110.2	119.9	120.6	
96.4	113.5	115.4	120.7	
90.1	108.6	117.3	122.6	
92.7	113.6	117.2	119.3	$i=2$
91.1	109.1	114.4	118.9	
90.7	108.9	113.4	125.3	
87.9	112.3	120.0	121.4	
58.6	78.6	89.9	90.9	$i=3$
63.5	80.6	83.0	95.3	
59.8	83.5	86.5	88.8	
62.3	77.1	82.7	92.0	

أ - أوجد الرواسب لنموذج التحاين (22.14) وارسمها في مقابل القيم

التوفيقية. ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14)؟

ب - قم برسم احتمال طيعي للرواسب، وأوجد معامل الارتباط بين

الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو افتراض

التوزيع الطبيعي معقولاً هنا؟

(٢٢-١٠) بالإشارة إلى مسألة مقاولي أبحاث التسويق (٢٢-٩) افترض أن نموذج

التحسين المثبت (22.14) مناسب.

أ - جهّز رسوم AB لتوسطات المعالجات المقترنة \bar{Y}_{AB} في هيئة الشكل

(٢٢-٦) ب. هل يبدو أن هناك أي تفاعلات؟ أي تأثيرات رئيسة؟

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي لتوسطات مستويات المعامل A المقترنة.

ماذا يقترح هذا الرسم حول طبيعة التأثيرات الرئيسة للمعامل A ؟

ج - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختر التفاعلات ثلاثية المعامل؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل،

قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P لهذا الاختبار؟

هـ - اختر وجود التفاعلات AB, AC و BC . استخدم $\alpha = 0.01$ ما هي

القيمة P - لكل اختبار؟

و - اختر وجود التأثيرات الرئيسة للمعامل A ؛ استخدم $\alpha = 0.01$ ، اعرض

البدائل، قاعدة القرار، والنتائج، ما هي القيمة P لهذا الاختبار؟

ز - اعرض مجموعة النتائج التي يمكن الوصول إليها من الاختبارات في

الأجزاء (د)، (هـ)، (و). أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي

لمجموعة الاختبارات. استخدم متباينة كيمبل.

ح - هل تؤيد نتائجك في الجزء (ز) تحليل التباين في الجزئين (أ) و(ب)؟

(٢٢-١١) بالإشارة إلى مسألتي مقاولي أبحاث التسويق (٢٢-٩) و(٢٢-١٠).

أ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للمعامل A والتفاعلات BC ، نرغب في

تقدير المقارنات التالية:

$$\begin{array}{ll} D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.} & D_4 = \mu_{11} - \mu_{12} \\ D_2 = \mu_{2.} - \mu_{3.} & D_5 = \mu_{21} - \mu_{22} \\ D_3 = \mu_{1.} - \mu_{3.} & L_1 = D_4 - D_5 \end{array}$$

استخدم طريقة بونفيرونو. معامل ثقة عائلي 90% للقيام بالمقارنات

المرغوبة. اعرض نتائجك.

ب - أوجد 95% فترة ثقة لـ $D = \mu_{121} - \mu_{221}$.

ج - يرغب المستشار في تحديد نوع (أنواع) وكالات أبحاث التسويق المستقلة التي تقدم أعمالاً بأعلى المواصفات. استخدم طريقة توكسي بمعامل ثقة عائلي 90% للقيام بالتحديدات المرغوبة.

(٢٢-١٢) تجميع الكرونيات. يقوم عمال التجميع في شركة الكرونيات بإلحاق 12 قطعة بلوحة مطوّرة حديثاً لاستخدامها في جهاز للتحكم الآلي في شركات صناعية. وقد قام محلل عمليات بتنفيذ تجربة لدراسة تأثيرات ثلاثة عوامل على متوسط زمن تجميع اللوحة. وكان العامل A هو جنس عامل التجميع ($i = 1$: ذكر ؛ $i = 2$: أنثى)، وكان العامل B هو تتابع القطع المجمعة ($j = 1, 2, 3$) وكان العامل C مقدار خورة عامل التجميع ($k = 1$: تحت 18 شهراً ؛ $k = 2$: 18 شهراً أو أكثر). وقد استخلعت التعشية لتخصيص 15 عامل تجميع من كل جنس بمقدار معطى من الخورة لكل من متابعات التجميع الثلاث، حيث خصّصت كل متتابعة لخمسة عمال تجميع. وبعد فترة التعلم، قيس الزمن الكلي (بالدقائق) لتجميع 50 لوحة. وفيما يلي البيان الإحصائي:

$k = 2$			$k = 1$			
$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
1,033	1,119	1,021	1,217	1,319	1,250	$i = 1$
1,067	1,110	1,099	1,190	1,251	1,175	
1,057	1,123	1,069	1,201	1,241	1,236	
1,077	1,097	996	1,232	1,295	1,239	
1,022	1,163	1,070	1,251	1,265	1,193	
841	927	864	1,021	1,105	1,066	$i = 2$
863	944	848	1,020	1,043	1,076	
817	957	881	1,035	1,051	1,004	
911	897	892	1,000	1,128	1,002	
868	933	868	1,026	1,060	1,034	

أ - أوجد رواسب نموذج التحاين (22.14) وارسمها في مقابل القيم الترفيقية. ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14).
 ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضاً، معامل

الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي، هل يبدو افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟

(١٣-٢٢) بالإشارة إلى مسألة تجميع الإلكتروليتات (١٢-٢٢). افترض أن نموذج التحاين (22.14) مناسب.

أ - جهّز رسوم AB لمتوسطات المعالجات المقدّرة \bar{Y}_{ij} في هيئة الشكل (١٢-٢٢) ب. هل يبدو أن هناك أي تفاعلات؟ أي تأثرات رئيسة؟
ب - لكل عامل جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدّرة. ماذا تقترح هذه الرسوم حول طبيعة تأثيرات العوامل؟
ج - اكتب جدول تحليل التباين

د - اختر التفاعلات ثلاثية العامل، استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

هـ - اختر التضاعلات AB ، AC ، و BC . ولكل اختبار استخدم $\alpha = 0.05$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - لكل اختبار؟
و - اختر التأثيرات الرئيسة لكل من A ، B ، و C ولكل اختبار استخدم $\alpha = 0.05$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P لكل اختبار؟

ز - اعرض مجموعة النتائج التي يمكن الوصول إليها من الاختبارات (الأجزاء (د)، (هـ)، (و). أوجد حداً أعلى لمستوى المعنوية العائلي لمجموعة الاختبارات، استخدم متباينة كيمبل.

ح - هل تؤيد النتائج في الجزء (ز) تحليلك البياني في الجزئين (أ) و (ب)؟
(١٤-٢٢) بالإشارة إلى مسألتَي تجميع الإلكتروليتات (١٢-٢٢) و (١٣-٢٢).

أ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعوامل قدر المقارنات الثنائية التالية:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_{1.} - \mu_{2.} & D_4 &= \mu_{2.} - \mu_{3.} \\ D_2 &= \mu_{1.1} - \mu_{2.1} & D_5 &= \mu_{1.1} - \mu_{2.2} \\ D_3 &= \mu_{1.1} - \mu_{3.1} \end{aligned}$$

استخدم طريقة بونفرونو، معامل ثقة عائلي 90% اعرض نتائجك.

ب - أوجد 95% فترة ثقة لـ μ_{21} .

(١٥-٢٢) من أجل نموذج التحاين الثابت (22.14) المتضمن لثلاثة عوامل، ما هي معملية اللامركزية لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A ؟ لاختبار التفاعلات AB .

(١٦-٢٢) بالإشارة إلى مسألتي مقابولي أبحاث التسويق (٩-٢٢) و (١٠-٢٢)، افترض أن $\sigma = 3.0$. ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A في المسألة (١٠-٢٢) إذا كان $\mu_1 = 97$, $\mu_2 = 95$, $\mu_3 = 90$ ؟

(١٧-٢٢) بالإشارة إلى مسألتي تجميع الإلكترونيات (١٢-٢٢) و (١٣-٢٢)، افترض أن $\sigma = 29$ ، ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B في المسألة (١٣-٢٢) إذا كان $\mu_1 = 1050$, $\mu_2 = 1100$, $\mu_3 = 1060$ ؟

(١٨-٢٢) بالإشارة إلى مسألة التقسية (٦-٢٢) لنفرض أن أحجام العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر استخدام أحجام عينات متساوية لجميع المعالجات. والمهدف الرئيس هو معرفة للمعالجة التي تؤدي إلى أعلى متوسط تقسية. واحتمال التعرف على المعالجة الأفضل فعلاً عندما يختلف متوسط التقسية للمعالجة التي تليها في الأفضلية بمقدار 2.0 وحدة برينل أو أكثر، ينبغي أن يصل إلى 0.99 على الأقل. افترض أن قيمة تخطيطية معقولة للانحراف المعياري للمعطى هي $\sigma = 1.8$. ما هي الأحجام التي نحتاجها للعينات؟

(١٩-٢٢) بالإشارة إلى مسألة تجميع الإلكترونيات (١٢-٢٢). لنفرض أن أحجام العينات لم تُحدد بعد، ولكن تقرر استخدام أحجام متساوية للعينات في جميع المعالجات. وكان المهدف الرئيس هو تقدير المقارنات الثنائية التالية:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_{1.} - \mu_{2.} & D_4 &= \mu_{2.} - \mu_{3.} \\ D_2 &= \mu_{1.} - \mu_{2.} & D_5 &= \mu_{1.} - \mu_{2.} \\ D_3 &= \mu_{1.} - \mu_{3.} \end{aligned}$$

ما هي أحجام العينات التي نحتاجها إذا كان ينبغي لدقة كل من التقديرات ألا تتجاوز ± 20 ، مستخدماً طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90% لمجموعة المقارنات مجتمعة؟ و $\sigma = 29$ هي قيمة تخطيطية معقولة للانحراف

المعياري للخطأ.

(٢٠-٢٢) بالإشارة إلى مسألة التقسية (٢٢-٦). نفترض أن المشاهدين $Y_{1211} = 53.5$ و $Y_{1212} = 50.7$ مفقودتان.

أ - اعرض نموذج الانحدار التام المكافئ لنموذج التحاين (22.14)؛ استخدم 1, -1, 0 كمتغيرات مؤشرة.

ب - ما هو النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A؟

ج - اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض؛ استخدم $\sigma = 0.025$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

د - أوجد 95% فترة ثقة لـ $\mu_2 - \mu_1$. $D = \mu_2 - \mu_1$.

(٢١-٢٢) بالإشارة إلى مسألة تجميع الإلكتروليتات (٢٢-١٢). نفترض أن المشاهدات $Y_{1224} = 1097$, $Y_{1223} = 1051$, و $Y_{2125} = 868$ مفقودة.

أ - اكسب نموذج الانحدار التام المكافئ لنموذج التحاين (22.14)؛ استخدم 1, -1, 0 كمتغيرات مؤشرة.

ب - ما هو النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل C؟

ج - اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل C موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض؛ استخدم $\alpha = 0.05$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

د - أوجد 90% فترة ثقة لـ $\mu_2 - \mu_1$. $D = \mu_2 - \mu_1$.

(٢٢-٢٢) بالإشارة إلى الجدول (٢٢-٩). جميع العوامل الثلاثة في تلك الدراسة لها تأثيرات عشوائية.

أ - اختبر ما إذا كانت التفاعلات AB موجودة أم لا، استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

ب - اختبر ما إذا كان لـ A (العامل B) تأثيرات رئيسة. استخدم

مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٢-٢٣) بالإشارة إلى مسألة تجميع الإلكترونيات (٢٢-١٢). نفرض أن عدد المتابعات التي يمكن إلحاق القطع باللوحه وفقا لها هو عدد كبير جدا ، وأن المتابعات الثلاث المدروسة قد اختبرت عشوائيا من مجموعة المتابعات الممكنة للتطبيق عمليا . افترض أن نموذج تخمين مع خطأ طبيعي قابل للتطبيق، وأن تأثيرات العاملين A و C مثبتة، بينما تأثيرات العامل D عشوائية. وفيما يلي بعض من توقعات متوسطات المربعات المناسبة لهذا النموذج:

$$\begin{aligned} E\{MSA\} &= \sigma^2 + bc n \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + cn \sigma_{\alpha}^2 \\ E\{MSB\} &= \sigma^2 + ac n \sigma_{\beta}^2 \\ E\{MSAC\} &= \sigma^2 + bn \frac{\sum \sum (\alpha\gamma)_b^2}{(a-1)(c-1)} + n \sigma_{\alpha\gamma}^2 \\ E\{MSABC\} &= \sigma^2 + n \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 \\ E\{MSE\} &= \sigma^2 \end{aligned}$$

أ- ما هي إحصاءة الاختبار المناسبة لاختبار التفاعلات AC ؟ لاختبار

التأثيرات الرئيسة للعامل B ؟

ب- اختبر ما إذا كانت التفاعلات AC موجودة أم لا؛ استخدم $\alpha = 0.05$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

ج- اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا؛ استخدم

$\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

د- أوجد تقديرا نقطيا لـ σ_{β}^2 .

(٢٢-٢٤) اعتبر نموذج التخمين المختلط (22.58) حيث أن تأثيرات العامل A مثبتة

وتأثيرات كل من العاملين الآخرين عشوائية، أوجد F^{**} شبه إحصاءة

اختبار F لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A . ما هو العدد التقريبي

لدرجات الحرية الموافقة لمقام إحصاءة الاختبار هذه؟

نماذج

(٢٢-٢٥) بين، في نموذج التحاين المثبت (22.14) أن $\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$.

(٢٢-٢٦) استبط (22.23c) من (22.21a).

(٢٢-٢٧) استبط تجريء مجموع المربعات في (22.25).

(٢٢-٢٨) اعرض نموذج التحاين المثبت للدراسة تتضمن ثلاثة عوامل مع $n = 1$ وذلك عندما تكون جميع التفاعلات ثلاثية العامل صفراً. اكتب جدول التحاين لهذه الحالة.

(٢٢-٢٩) استبط، في نموذج التحاين المثبت (22.14) تبان المقارنة المقدرة
$$\hat{L} = \sum \sum c_{ij} \bar{y}_{ij}$$
.

(٢٢-٣٠) أوجد، في نموذج التحاين العشوائي (22.56)، تبان المتوسط المقدر $\bar{y}_{i..}$.

مشاريع

(٢٢-٣١) بالإشارة الى مجموعة البيانات *SENIC* سنعتبر مجموعة المستشفيات التالية

في دراسة لتأثيرات متوسط عمر المرضى (عامل A : المتغير 3) والتسهيلات

والخدمات المتوفرة (عامل B : متغيرة 12)، والمنطقة (عامل C : متغير 9) على

متوسط فترة بقاء المرضى في المستشفى (متغير 2):

1-14	16-28	31	32	34	35	37-39	41	44	46	50
52	53	57	58	63	66	76	77	83	111	

ولأغراض دراسة التحاين هذه، نصف متوسط العمر إلى صنفين (أقل من

53.0 سنة، 53.0 سنة أو أكثر) ونصنف التسهيلات والخدمات المتوفرة إلى

صنفين (أقل من 40.2 بالمائة، 40.2 بالمائة أو أكثر).

أ - جتمع البيانات المطلوبة وأوجد الرواسب لنموذج التحاين (22.14).

ب - أرسم الرواسب في مقابل القيم التوقعية. ماذا يقترح رسمك حول

مصادقية نموذج التحاين (22.14)؟

ج - جهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. ولوجد، أيضاً، معامل الارتباط

بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو

افترض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟

(٢٢-٣٢) بالإشارة إلى مجموعة البيانات الإحصائية *SENIC* والمشروع (٢٢-٣١).

افترض أن نموذج التحاين المثلث (22.14) مناسب.

أ - أرسم متوسطات المعالجات المقترنة \bar{Y}_{ijk} في هيئة الشكل (٢٢-٦).
هل يبدو أن هناك أي تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي منفصل لمتوسطات مستويات العامل المقترنة، وذلك لكل عامل. ماذا تقترح هذه الرسومات حول طبيعة التأثيرات الرئيسة للعوامل؟

ج - أوجد جدول تحليل التباين. هل يمكن اعتبار أي مصدر بمفرده من مصادر التغير مفسرا لمعظم التغير الكلي في الدراسة؟ اشرح.

د - اختبر التفاعلات ثلاثية العامل؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P لهذا الاختبار؟

هـ - اختبر التفاعلات AC ، AB ، BC ، استخدم لكل اختبار $\alpha = 0.01$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P لكل اختبار؟

و - اختبر التأثيرات الرئيسة لـ A ، B و C استخدم لكل اختبار، $\alpha = 0.01$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P لكل اختبار؟

ز - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للتسهيلات المتوفرة والمنطقة، قم بكل المقارنات الثنائية الممكنة لكل من هذين العاملين، استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عالي. 90% اعرض نتائجك.

(٢٢-٣٣) بالإشارة إلى مجموعة البيانات الإحصائية *SMSA* نريد دراسة تأثيرات

المنطقة (عامل A : متغير 12)، النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية

(عامل B : متغير 4)، والنسبة المئوية لمن تبلغ أعمارهم 65 عاما أو أكثر

(عامل C : متغير 5)، على معدل الجريمة (متغير 11 + متغير 3). ولأغراض

دراسة التحاين هذه نصنّف النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية إلى

صنفين 40% أو أقل، 40.1% أو أكثر) ونصنف النسبة المئوية لمن تبلغ

- أعمارهم 65% أو أكثر إلى صنفين (9.9% أو أقل، 10.0% أو أكثر).
- أ - جَمْع البيانات المطلوبة وأوجد الرواسب لنموذج التحاين (22.14).
- ب - أرسم الرواسب في مقابل القيس التوفيقية ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14).
- ج - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضاً، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟
- (٢٢-٣٤) بالإشارة إلى مجموعة البيانات الإحصائية *SMSA* والمشروع (٢٢-٣٣).
- افترض أن نموذج التحاين ذا التأثيرات المثبتة (22.14) حيث $m = 1, \dots, n_{ij}$ هو نموذج مناسب.
- أ - ارسم متوسطات المعالجات المقدرة \bar{y}_{ij} في هيئة الشكل (٢٢-٦) ب.
- هل يبدو أن هناك أي تأثيرات للعوامل؟
- ب - اعرض نموذج الانحدار المكافئ في هذه الحالة؛ استخدم 1، -1، 0.
- كمتغيرات مؤشرة، وقم بتوفيق هذا النموذج التام.
- ج - اختر التفاعلات ثلاثية العوامل، والتفاعلات *AB*، *AC*، و *BC*. استخدم لكل اختبار $\alpha = 0.025$ ، واعرض البدائل، قاعدة القرار، و النتيجة، ما هي القيمة *P*- لكل اختبار؟
- د - اختر التأثيرات الرئيسة لـ *A*، *B*، و *C*. استخدم لكل اختبار $\alpha = 0.025$ ، واعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة *P*- لكل اختبار؟
- هـ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للمنطقة، قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المناطق. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. اعرض نتائجك.

تخليط التباين

تحليل التباين هو تقانة تجمع خصائص تحليل التباين والانحدار. ويمكن استخدامها في دراسات مشاهدة وفي تجارب مصممة. والفكرة الأساسية هي زيادة نموذج تحليل التباين الذي يتضمن تأثيرات العوامل بمختبر إضافي أو أكثر من المتغيرات الكمية التي تتصل بالمختبر التابع. والمقصود من هذه الزيادة هو تخفيض تباين حدود الخطأ في النموذج، أي جعل التحليل أكثر دقة. وقد تعرضنا لنماذج التباين باختصار في الفصل العاشر، وذكرنا هناك أنها نماذج خطية تتضمن متغيرات مستقلة نوعية ومتغيرات مستقلة كمية. وهكذا تكون نماذج التباين مجرد حالة خاصة من نموذج الانحدار.

وفي هذا الفصل سندرس كيف يمكن أن يكون نموذج التباين أكثر فعالية من نموذج التحاين العادي. ومن ثمّ سنناقش كيفية استخدام نموذج تباين بعامل واحد للقيام باستقراءات مستفيدين من أسلوب الانحدار. ويتبع ذلك تبيان إمكانية النظر إلى تحليل التباين وكأنه، أيضاً، تعديل لتحليل التباين، ونختم الفصل بالشروع في استخدام نماذج تحليل التباين في دراسات متعددة العوامل بالإضافة إلى بعض الاعتبارات الإضافية في استخدام تحليل التباين.

(١-٢٣) أفكار أساسية

كيف يُخفّض تحليل التباين تشتت الخطأ

يمكن أن يشكل تحليل التباين عوناً في تخفيض تباينات كبيرة لحد الخطأ تتواجد أحياناً في نماذج تحليل التباين. لنأخذ في الاعتبار دراسة تتطرق إلى تأثيرات ثلاثة أرقام

مختلفة تشجع السفر في ولاية، ويتلقى الشخص استبياناً أولياً للحصول على معلومات حول موافقه من الولاية. ويُعرض على الشخص عندئذ فيلم مدته خمس دقائق، ثم يُسأل مباشرة بعد ذلك عن الفيلم، عن رغبته في السفر ضمن الولاية، وللمعجراً.

وفي حالة من هذا النوع يمكن الانتفاع بتحليل التباير. ولكي نرى لماذا يمكن أن يكون تحليل التباير شديد الفعالية، لنسأل في الشكل (٢٣-١). فقد رُسمت هنا درجات الرغبة في السفر التي سُجلت بعد عرض كل فيلم من ثلاثة أفلام تشجيعية على مجموعة من خمسة أشخاص مختلفين. وقد استُعملت ثلاثة رموز مختلفة للتمييز بين المعالجات المختلفة، ويتضح من الشكل (٢٣-١) أن حدود الخطأ، كما بينها التبثر حول متوسطات المعالجات، هي حدود كبيرة إلى حد ما، مما يشير إلى تباير كبير لحد الخطأ.

لنفرض الآن أننا استفدنا، أيضاً، من درجات الموقف الأولي للشخص. وقد رُسمت في الشكل (٢٣-١) ب درجة الرغبة في السفر (المسجلة بعد عرض الفيلم) مقابل درجة الموقف الأولي لكل من خمسة عشر شخصاً. ونلاحظ أنه اتفق أن كانت علاقات الانحدار للمعالجات الثلاث خطية (ليس من الضروري أن يكون الأمر كذلك دائماً). ونلاحظ، أيضاً، أن التبثر حول خطوط انحدار المعالجات الثلاث أقل بكثير من التبثر حول متوسطات المعالجات، في الشكل (٢٣-١) أ، وذلك كنتيجة لكون درجات الرغبة في السفر مرتبطة ارتباطاً خطياً عالياً بـ درجات الموقف الأولي. ويعكس التبثر الكبير نسبياً في الشكل (٢٣-١) أ تشتتاً كبيراً في حدود الخطأ يمكن أن تواجها في نموذج تحليل التباين لهذه الدراسة وحيدة العامل. ويعكس التبثر الصغير في الشكل (٢٣-١) ب تشتتاً أصغر لحد الخطأ الذي يمكن أن ينطوي عليه نموذج تحليل التباير.

وهكذا نرى أن تحليل التباير يستفيد من العلاقة بين المتغير التابع (درجة الرغبة في السفر في مثالا) وواحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة الكمية، التي تتوفر لها

قياسات، (درجة الموقف قبل إجراء الدراسة في مثالنا) كي نخفض تشتت حد الخطأ ونجعل الدراسة أكثر فعالية في مقارنة تأثيرات المعالجات.

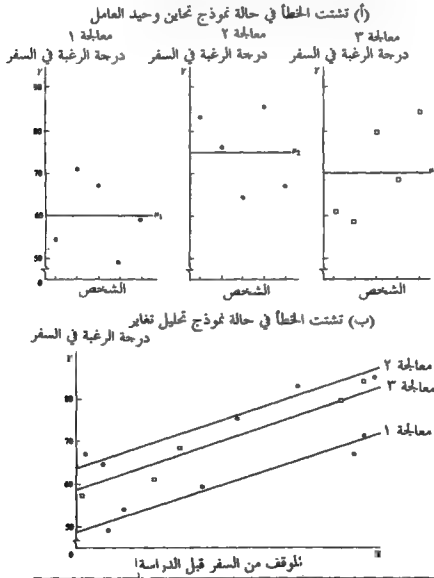
المتغيرات المصاحبة. في مصطلحات تحليل التغير يدعى كل متغير كمي مستقل يُضاف إلى الدراسة متغيراً مصاحباً. ومن الواضح أن اختيار المتغيرات المصاحبة هو أمر مهم. وإذا لم يكن للمتغيرات كهذه علاقة بالمتغير التابع فلا شيء يُرجى من تحليل التغير، ويمكن، وبالقدر نفسه من الجودة، استخدام نموذج تحليل تباين أبسط. و تتضمن المتغيرات المصاحبة، وهي متغيرات كثيرة، ما نستخدم عندما يكون الخاضعون للتحربة بشراً، مواقف سابقة للدراسة، عمراً، حاصل الذكاء (IQ) والقابلية، وعند استخدام المحلات التجارية كوحدة للدراسة، يمكن أن تكون المتغيرات المصاحبة مبيعات الفترة الأخيرة، وعدد المستخدمين.

اختيار المتغيرات المصاحبة. هناك مشكلة في اختيار المتغيرات المصاحبة يتميز بها تحليل التغير. فمن أجل تفسيرات واضحة للنتائج ينبغي أن يُشاهد المتغير المصاحب قبل الدراسة؛ أو ينبغي، في حال مشاهدته خلال الدراسة أن لا يتأثر بالمعالجات بأي طريقة من الطرق. وتحقق الدرجة التي نمر عن الموقف قبل الدراسة مثل هذا المتطلب. وأيضاً، إذا كان من الممكن خلال الدراسة التحقق من عمر الخاضع للدراسة، فقد يكون من المنطقي أن نتوقع عدم تأثر الاستجابة حول العمر بالمعالجة. ومن المثال التالي يمكن أن نرى بسهولة سبب مثل هذا المتطلب: أقامت شركة مدرسة تدريب للمهندسين لتعليمهم مبادئ المحاسبة والميزانية. وقد استعملت طريقتين.

وخصّص مهندسون عشوائياً لإحدهما. وفي نهاية البرنامج تمّ الحصول على درجة لكل مهندس تعكس مقدار تعلّمه. وقد قرر المحلل أن يستخدم كمقياس مصاحب، في تحليل تغير، مقدار الزمن المكرّس للدراسة (الأمر الذي كان مطلوباً من كل مهندس أن يسجله). وبعد القيام بتحليل التغير وجد المحلل أنه لم يكن لطريقة التدريب أي تأثير فعلي. وكان هذا محيراً له حتى نُفِت نظره إلى أنه من المحتمل أن يتأثر بالمعالجات، أيضاً، مقدار الزمن المخصص للدراسة. وفي الحقيقة فقد أكد

التحليل ذلك. إذ انطلوت إحدى طريقي التدريب على تعلّم بمساعدة الحاسب مما كان له جاذبيته بالنسبة للمهندسين، فقضوا زمنا أكثر في الدراسة وتعلموا أيضا أكثر. وبعبارة أخرى، كان كل من درجة التعلم والزمّن المكرّس للدراسة معتمدا على المعالجة في هذه الحالة.

شكل (٢٣-١) توضيح لتخفيض تشتت الخطأ بواسطة تحليل التباين

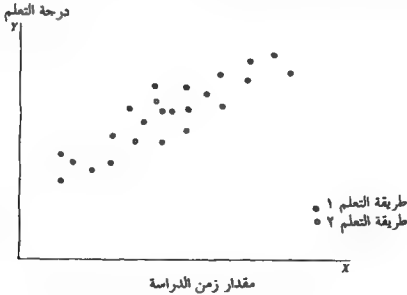


وعندما يتأثر المتغير المصاحب بالمعالجات، فإن تحليل التغيرات سيزيل بعضا (أو كثيرا) من تأثير المعالجات على المتغير التابع، مما قد يجعل التحليل غير المصحح مضللا بصورة رديئة. وينبغي اتخاذ الحرص الشديد في التحليل عند استخدام أسلوب تحليل التغيرات مع متغير مصاحب يتأثر بالمعالجات.

ويبين الشكل (٢-٢٣) رسم انتشار لدرجة التعلم ومقدار زمن الدراسة للتحربة التي تتضمن تدريب المهندسين. والمعالجة ١ هي الطريقة التي تستخدم الحاسب كمساعد في التعلم. ونلاحظ أن معظم الأشخاص تحسنت هذه المعالجة كرسوا أوقاتا كبيرة للدراسة. وعلى الوجه الآخر، يميل الأشخاص الذين تلقوا المعالجة ٢ إلى تكرس أوقات أقل للدراسة. وكتيجة، يميل مشاهدات المعالجتين إلى التجمع فوق فترتين مختلفتين من المحور X .

قارن هذه الحالة مع تلك التي شاهدها في الشكل (١-٢٣) ب في دراسة للأفلام التشجيعية. فالشكل (١-٢٣) ب يوضح كيف ينبغي أن تنتشر مشاهدات المتغير المصاحب إذا لم يكن للمعالجات تأثير على المتغير المصاحب. إذ نجد هنا أن توزيع الأشخاص على طول المحور X وفقا للدرجات الموقف السابق للدراسة، متشابه تقريبا لجميع المعالجات وخاضع، فقط، لتغيرات تصادفية.

شكل (٢-٢٣) توضح المعالجات تؤثر في المتغير المصاحب



(٢-٢٣) نموذج تغاير وحيد العامل

يمكن تطبيق نماذج التغاير التي ستقدمها في هذا الفصل على دراسات مشاهدة ودراسات تجريبية مبنية وفق التصميم تام العشوائية. وفي المثال السابق عن تعلم المهندسين، خصص المهندسون الأربعة وعشرون المشاركون في الدراسة بصورة عشوائية لطريقتي التعليم، حيث خصص 12 مهندسا لكل طريقة تعليم. وهكذا قامت هذه الدراسة التجريبية على تصميم تام العشوائية.

ونماذج التغاير التي ستقدمها في هذا الفصل قابلة للتطبيق، أيضا، على دراسات مشاهدة، مثل تقصي الزبادات في رواتب مستلمي شركة في قسم المحاسبة وفقا للجنس، مع اتخاذ العمر كمتغير مصاحب.

رموز

سنستخدم رموز تحليل التباين بعامل واحد، فترمز بـ m_i لعدد المشاهدات الخاصة بالمستوى i للعامل المدروس، وللعدد الكلي للمشاهدات بـ $\sum m_i = n_T$ ، و نرمز بـ Y_{ij} للمشاهدة j للمتغير التابع وحيث يكون العامل في مستواه i . وسنسهل بدراسة نموذج تغاير وحيد العامل مع متغير مصاحب واحد. وندرس لاحقا نماذج بأكثر من متغير مصاحب واحد. وسنرمز بـ X_{ij} لقيمة المتغير المصاحب الموافقة للمشاهدة j وحيث يكون العامل في مستواه i .

تطوير نموذج تغاير

أعطي نموذج التحاين وحيد العامل بدلالة تأثيرات مثبتة للعامل في (14.60) كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (23.1)$$

وببدأ نموذج التغاير بهذا النموذج وبضيف، ببساطة، حدا آخر (أو عدة حدود)، يعكس العلاقة بين المتغيرين المصاحب والتابع. وكتقريب أول تُستخدم عادة علاقة خطية:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma X_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (23.2)$$

و γ هنا هو معامل انحدار للعلاقة بين Y و X . والآن لم يعد الثابت μ متوسطا إحصائيا. وعلى أي حال، يمكن أن نجعل هذا الثابت متوسطا إحصائيا، مما يبسط

بالمناسبة بعض الحسابات، وذلك بالتعبير عن التغير المصاحب كإحتراف عن المتوسط الإجمالي \bar{X} . والنموذج الناتج هو نموذج التباين المعتاد للدراسة وحيدة العامل مع مستويات مثبتة للعامل:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij} \quad (23.3)$$

حيث:

μ متوسط إجمالي

τ_i تأثيرات مثبتة للمعالجات خاضعة للقيود $\sum \tau_i = 0$

γ معامل انحدار للعلاقة بين X و Y

X_{ij} ثوابت

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n_i$

وبقابل نموذج التباين (23.3) نموذج التحاين (23.1) باستثناء الحد المضاف

$\gamma(X_{ij} - \bar{X})$ يعكس العلاقة بين X و Y . وتجدر ملاحظة أن المشاهدات للمصاحبة

X_{ij} قد افترضت ثابتة. وبما أن ε_{ij} هو المتغير العشوائي الوحيد في الجانب الأيمن من

(23.3)، فنستنتج على الفور أن:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \bar{X}) \quad (23.4a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma^2 \quad (23.4b)$$

وبما أن ε_{ij} مستقلة، فإن Y_{ij} مستقلة، أيضاً. وبالتالي فإن العبارة البديلة

لنموذج التباين (23.3) هي:

$$Y_{ij} \text{ مستقلة و } N(\mu_{ij}, \sigma^2) \quad (23.5)$$

حيث:

$$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \bar{X})$$

$$\sum \tau_i = 0$$

خواص نموذج التباين

بعض خواص نموذج التباين (23.3) مطابقة لخواص نموذج التحاين (23.1).

وعلى سبيل المثال، حدود الخطأ τ_i مستقلة ولها تباين ثابت. وهناك، أيضاً، بعض الخواص الجديدة، ونناقش هذه الخواص الآن.

مقارنات تأثيرات المعالجات. في نموذج تحليل التباين يكون لجميع مشاهدات المعالجة i متوسط الاستجابة نفسه (μ_i). وليس الأمر كذلك في نموذج التباين، باعتبار أن متوسط الاستجابة لا يعتمد هنا، فقط، على المعالجة ولكن، أيضاً، على قيمة التغير المصاحب γ لوحدة الدراسة. وهكذا، فإن الاستجابة المتوقعة للمعالجة i في نموذج التباين (23.3) معطى بخط الانحدار:

$$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \bar{X}_i) \quad (23.6)$$

وهو يشير إلى متوسط الاستجابة للمعالجة i من أجل أي قيمة لـ X . ويوضح الشكل (٢٣-٣)، لدراسة بثلاث معالجات، كيف يمكن أن تبدو خطوط انحدار المعالجات هذه. ونلاحظ أن $\mu + \tau_i$ هو ترتيب (الإحداثي الصادي) خط الانحدار للمعالجة i عندما يكون $X - \bar{X} = 0$ ، أي عندما يكون $X = \bar{X}$ ، وأن γ هو ميل كل خط. وبما أن لجميع خطوط انحدار المعالجات الميل نفسه، فإن هذه الخطوط متوازية.

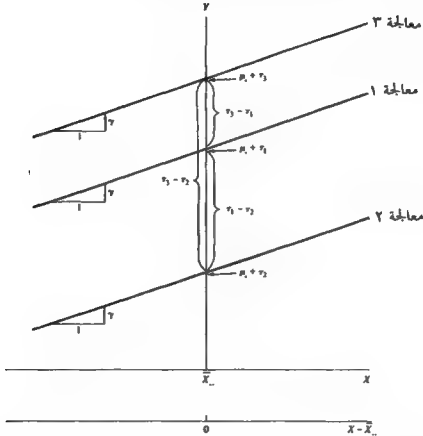
وبينما لا يمكننا أن نتحدث المزيد عن متوسط الاستجابة للمعالجة i باعتباره يتغير بتغير X ، إلا أنه يمكننا قياس تأثير أي معالجة بالمقارنة مع أي معالجة أخرى بواسطة عدد محدد. وفي الشكل (٢٣-٣)، على سبيل المثال، تؤدي المعالجة 1 إلى متوسط استجابة أعلى من المعالجة 2، بصرف النظر عن قيمة X . والفرق بين متوسطي الاستجابة هو نفسه من أجل جميع قيم X ، باعتبار أن ميل خطوط الانحدار متساوية.

وبالتالي يمكن قياس الفرق عند أي قيمة مرجحة لـ X مثلاً $X = \bar{X}_1$:

$$\mu + \tau_1 - (\mu + \tau_2) = \tau_1 - \tau_2 \quad (23.7)$$

وهكذا يقيس $\tau_1 - \tau_2$ كم يكون متوسط الاستجابة للمعالجة 1 أعلى من متوسط الاستجابة للمعالجة 2 وذلك من أجل أي قيمة لـ X . ويمكن مقارنة أي معالجتين أخريين بصورة مماثلة. ويتبع من هذه المناقشة مباشرة أنه عندما يكون لجميع المعالجات، ولكل X ، متوسط الاستجابة نفسه. (أي عندما لا توجد فروق تفاضلية بين المعالجات)، فيجب أن تكون خطوط انحدار المعالجات متطابقة؛ وبالتالي $\tau_1 - \tau_2 = 0$ ، وفي الحقيقة، جميع المعالجات τ_i تساوي الصفر في تلك الحالة.

شكل (٢٣-٣) خطوط الانحدار المعالجات لنموذج التباين (23.3)



ثبات الميول. إن الفرض بأن لجميع خطوط الانحدار، في نموذج التباين (23.3)، الميل نفسه، هو فرض حاسم. وبدونه لا يمكن تلخيص الفرق بين تأثيري معالجتين بعدد بمفرده محسوب من التأثيرات الرئيسة، مثل $\pi_2 - \pi_1$. ويوضح الشكل (٢٣-٤) حالة ميول غير متوازية لمعالجتين. وهنا تؤدي المعالجة ١ إلى متوسطات استجابة أعلى من المعالجة 2 من أجل بعض قيم X ويكون العكس صحيحاً من أجل قيم أخرى لـ X . وعندما تتفاعل خطوط انحدار المعالجات مع المتغير المصاحب X في شكل ميول غير متوازية، فإن تحليل التباين لا يكون مناسباً. وبدلاً من ذلك ينبغي تقدير خطوط انحدار معالجات منفصلة ثم مقارنتها.

تعميمات نموذج التباين

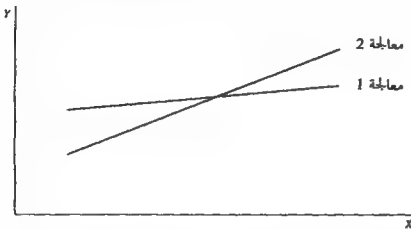
يمكن تعميم نموذج التباين (23.3) لدراسات تتضمن عاملا واحدا من نواح عدة. ونذكر بإيجاز ثلاث طرق يمكن تعميم هذا النموذج وفقا لها.

المقادير X غير ثابتة. يفرض نموذج التباين (23.3) أن المشاهدات y_i للمتغير المصاحب ثابتة. وأحيانا قد يكون من المعقول أكثر أن نعتبر المشاهدات المصاحبة كمتغيرات عشوائية. وفي هذه الحالة، إذا رغبنا في تفسير نموذج التباين (23.3) كنموذج شرطي، نطبقه من أجل أية قيم ملحوظة لـ X ، فإن تحليل التباين الذي ستقدمه يبقى تحليلًا مناسبًا.

لاخطية العلاقة. العلاقة الخطية المفترضة بين X و Y في نموذج التباين (23.3) ليست أمرا جوهريا لتحليل التباين، إذ يمكن استخدام أية علاقة أخرى. وعلى سبيل المثال، قد يكون النموذج كما يلي من أجل علاقة تربيعية:

$$Y_i = \mu + \tau_i + \gamma_1(X_i - \bar{X}) + \gamma_2(X_i - \bar{X})^2 + \varepsilon_i \quad (23.8)$$

شكل (٢٣-٤) خطوط الحدار معالجات غير متوازنة



تقود خطية العلاقة إلى تحليل أبسط، وفي الغالب تكون تقريبا جيدا بما فيه الكفاية لتقديم نتائج ذات مغزى. وإذا لم تشكل العلاقة الخطية تقريبا جيدا فينبغي استخدام

وصف للعلاقة في تحليل التباين يكون أكثر ملاءمة.

عدة مصفريات مصاحبة. يستخدم النموذج (23.3) متغيراً مصاحباً واحداً، وفي الغالب يكون هذا كافياً لتخفيض تشتت الخطأ تخفيضاً كبيراً. إلا أنه يمكن تعميم النموذج بطريقة لاصعوبة فيها بحيث يشمل متغيرين أو ثلاثة متغيرات مصاحبة. ونموذج التباين وحيد العامل، مع متغيرين مصاحبين X_1 و X_2 وإلى المرتبة الأولى، سيكون على الشكل التالي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_1(X_{ij1} - \bar{X}_{.1}) + \gamma_2(X_{ij2} - \bar{X}_{.2}) + \varepsilon_{ij} \quad (23.9)$$

صيغة الانحدارية لنموذج التباين

ونجد من خلال أسلوب الانحدار طريقة سهلة لتقدير معالم نموذج التباين (23.3) والقيام باستقراعات. (إذا لم يكن القارئ قد قرأ بعد الفقرات (١٠-١) إلى (١٠-٤) فينبغي له القيام بذلك قبل المضي في هذه الفقرة).

وفيما يتعلق بنماذج تحليل التباين، سنستخدم $r - 1$ متغيراً مؤشراً يأخذ كل منها القيم 1, -1 أو 0 لتمثيل المعالجات الـ r :

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المعالجة } 1 \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المعالجة } r \\ 0 \text{ فيما عدا ذلك} \end{array} \right\} = I_1$$

(23.10)

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المعالجة } r-1 \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المعالجة } r \\ 0 \text{ فيما عدا ذلك} \end{array} \right\} = I_{r-1}$$

لاحظ أننا نرمز الآن للمتغيرات المؤشرة بالرمز I للتمييز الواضح بين تأثيرات المعالجات والمتغير المصاحب X .

وفي التعبير عن نموذج التباين في شكل انحداري، سنرمز، كما في فصول الانحدار، للانحراف $X_y - \bar{X}$ بـ x_y . وعندئذ يمكن التعبير عن نموذج التباين (23.3) كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i I_{ij1} + \dots + \tau_{r-1} I_{ij,r-1} + \gamma x_y + \varepsilon_{ij} \quad (23.11)$$

حيث:

$$x_{yi} = X_{yi} - \bar{X}_i$$

وهنا I_{yi} هو المتغير المؤشر I_i من أجل الملاحظة i من المعالجة i ، وبصورة مماثلة من أجل المتغيرات المؤشرة الأخرى، لاحظ أن تأثيرات المعالجات $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ هي معاملات الانحدار للمتغيرات المؤشرة.

والآن وقد صغنا نموذج التباين (23.3) كنموذج انحدار، فيمكن تطبيق المناقشة السابقة لتحليل الانحدار. ولذلك سندرس، فقط، وبإيجاز كيف نختبر صلاحية نموذج التباين وكيف نقوم بالاستقراء ثم نتحول إلى مثال لتوضيح الطرق.

صلاحية نموذج التباين

نبحث بعض القضايا الرئيسة المتعلقة بصلاحية نموذج التباين (23.3) ونموذج الانحدار المكافئ (23.11) فيما يلي:

- ١- طبيعية حدود الخطأ.
 - ٢- تساوي تباينات الخطأ للمعالجات المختلفة.
 - ٣- تساوي ميول خطوط انحدار المعالجات المختلفة.
 - ٤- خطية علاقة الانحدار لمتغير مصاحب.
 - ٥- عدم ارتباط حدود الخطأ.
- والقضية الجديدة الوحيدة في تقويم صلاحية النموذج هي تساوي ميول خطوط انحدار المعالجات المختلفة. وقد ناقشنا في الفقرة ١٠-٤ كيفية مقارنة عدة خطوط انحدار، وتلك المناقشة قابلة للتطبيق لاختبار ما إذا كان شرط الميول المتساوية في نموذج التباين محققاً. وستوضح هذا الاختبار في مثال في الفقرة ٢٣-٣.
- استقرارات ذات أهمية

الاستقرارات الإحصائية الرئيسة ذات الشأن في تحليل التباين هي نفسها كما في نماذج تحليل التباين، ونقصد ما إذا كان للمعالجات أية تأثيرات، وإذا كان الأمر كذلك، فما هي هذه التأثيرات. وينطوي اختبار تأثيرات مثبتة للمعالجات على

البدائل نفسها كما في نماذج تحليل التباين:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_r = 0 \quad (23.12)$$

ليست جميع قيم τ_i مساوية للصفر H_a

وبالإشارة إلى نموذج الانحدار المكافئ (23.11)، فإن هذا الاختبار ينطوي ببساطة على اختبار ما إذا كانت عدة معاملات انحدار مساوية للصفر. وإحصاء الاختبار المناسبة إذا هي تلك المذكورة في (8.25).

وإذا اختلفت المعالجات، فإننا نرغب عادة في تقصي طبيعة هذه التأثيرات. وقد تكون المقارنات الثنائية $\tau_i - \tau_j$ بين تأثيري معالجتين ذات أهمية (المسافة الرأسية بين خطي انحدار معالجتين)، أو بصورة أعم يمكن أن تكون مقارنات بين الـ τ_i مفيدة. وفي الحالتين كليهما، نحتاج إلى تقدير تراكيب خطية في معاملات الانحدار τ_1, \dots, τ_r . ومن وقت لآخر تكون طبيعة علاقة الانحدار بين Y و X ذات أهمية، إلا أن المتغير المصاحب X يُستخدم فقط، للمساعدة في تخفيض تشتت الخطأ.

ملاحظة

في تحليل التباين لا نهتم عادة بما إذا كان معامل الانحدار γ صفراً، أي بما إذا كانت توجد، في الحقيقة، علاقة انحدار بين Y و X . وعدم وجود علاقة لا يؤدي إلى انحياز في تحليل التباين. ويكون متوسط مربعات الخطأ ببساطة هو نفسه كما في نموذج تحليل التباين (مثلاً لتغير المعاينة)، مع فقدان درجة واحدة من الحرية من درجات متوسط مربعات الخطأ.

وعندما تتساوى أهمية المتغير المصاحب وأهمية تأثيرات المعالجات، فينبغي استخدام الطرق المقدمة في الفصل العاشر لإنجاز التحليل الخاص بالمتغير المصاحب.

(٢٣-٣) مثال تحليل تباين وحيد العامل

ترغب شركة في دراسة تأثيرات ثلاثة أنواع مختلفة من الترويج على مبيعات نوع من البسكويت. وكانت أنواع الترويج الثلاثة:

معالجة ١- معاينة المنتج من قبل الزبائن في المخزن وحيز رف عادي.

معالجة ٢- حيز رف إضافي في مواقع عادية.

معالجة ٣- رفوف عرض خاصة في نهايتي عمر بالإضافة إلى حيز رف عادي. اختبر خمسة عشر مخزنا للدراسة واستخدم تصميم تجريبي تام العشوائية. وقد خصص كل مخزن عشوائيا إلى إحدى أنواع الترويج، خمسة مخازن لكل نوع. والشروط الأخرى المتصلة بموضوع الدراسة والتي تقع تحت سيطرة الشركة، مثل السعر والدعاية، بقيت نفسها من أجل جميع المخازن الداخلة في الدراسة. وقدم في الجدول (٢٣-١) بيانات عن عدد حالات بيع المنتج خلال فترة الترويج، ونرمز لها بـ Y ، وأيضا، بيانات عن مبيعات المنتج في الفترة السابقة، ونرمز لها بـ X . وستستخدم مبيعات الفترة السابقة كمتغير مصاحب.

جدول (٢٣-١) بيانات مثال الترويج لمبيعات نوع من السكوكيت (عدد عبوات السكوكيت المبيعة).

(أ) بيانات

مخزن (١)

معالجة	1	2	3	4	5
	X_{i1}	Y_{i1}	X_{i2}	Y_{i2}	X_{i3}
1	38	21	39	26	36
2	43	34	38	26	38
3	24	23	32	29	31
	28	16	21	30	28

(ب) متوسطات، مجاميع، ومجاميع مربعات ومجموع جداءات

$$\bar{Y}_1 = 38.2 \quad \bar{Y}_2 = 36.0 \quad \bar{Y}_3 = 27.2 \quad \bar{Y} = 33.8$$

$$\bar{X}_1 = 23.2 \quad \bar{X}_2 = 26.4 \quad \bar{X}_{31} = 25.4 \quad \bar{X} = 25.0$$

معالجة	$\sum_j Y_{ij}$	$\sum_j Y_{ij}^2$	$\sum_j X_{ij}$	$\sum_j X_{ij}^2$	$\sum_j X_{ij} Y_{ij}$
1	191	7,375	116	2,746	4,491
2	180	6,622	132	3,622	4,888
3	136	3,786	127	3,367	3,558
المجموع	507	17,783	375	9,735	12,937

تطوير النموذج

يقدم الشكل (٢٣-٥) بيانات الجدول (٢٣-١) في هيئة رسم انتشار ويبدو الانحدار الخطي وتوازي الميول لخطوط انحدار المعالجات معقولين. ولذلك، فقد اختبر

مبدئياً نموذج الانحدار التالي:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_1 I_{j1} + \tau_2 I_{j2} + \gamma X_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (23.13)$$

نموذج تام

حيث:

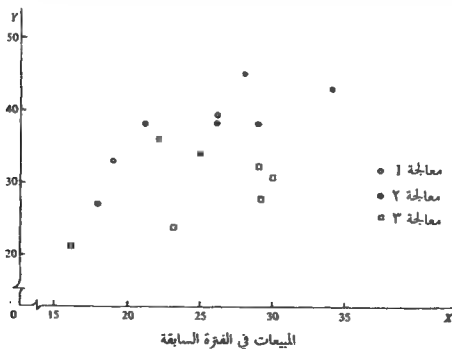
$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا تلقى المخزن المعالجة 1} \\ -1 \text{ إذا تلقى المخزن المعالجة 3} \\ 0 \text{ فيما عدا ذلك} \end{array} \right\} = I_{j1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا تلقى المخزن المعالجة 2} \\ -1 \text{ إذا تلقى المخزن المعالجة 3} \\ 0 \text{ فيما عدا ذلك} \end{array} \right\} = I_{j2}$$

$$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_{..}$$

شكل (٢٣-٥) رسم انتشار لمبيعات نوع السكوت - مثال لتوزيع نوع من السكوت.

المبيعات في فترة التوزيع



ومتحة المشاهدات Y والمصفوفة X لبيانات الجدول (٢٣-١) معطاة في الجدول (٢٣-٢). وقد أدت تشغيل حاسب لحزمة الانحدار المتعدد إلى النتائج الملخصة في الجدول (٢٣-٣).

وبعدنا تم الحصول على الرسوم المختلفة للرواسب لاختبار صلاحية نموذج الانحدار (23.13). ويتضمن الشكل (٢٣-٦) اثنين منها. إذ يتضمن الشكل (٢٣-٦) رسوماً نقطية للمعالجات الثلاث. ولتقترح هذه أية فروق رئيسية في تباينات حدود الخطأ ويتضمن الشكل (٢٣-٦) رسم احتمال طبيعي للرواسب، وهو يبين انحرافاً متواضعاً عن الخطية. إلا أن معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي هو 0.958 مما لا يقترح أي انحراف مهم عن الطبيعية. وقد قام المحلل باختبار تساوي ميول خطوط انحدار المعالجات الثلاث وستصف هذا الاختبار باختصار. وعلى أساس هذه التحليلات استنتج المحلل أن نموذج الانحدار (23.13) هو نموذج مناسب هنا.

اختبار تأثيرات المعالجات

لاختبار ما إذا كانت تروايج البسكويت الثلاثة مختلفة في فعاليتها يمكننا أن نتبع إما أسلوب اختبار الخطية العام فنوفق النموذجين الثام والمخفض، ونستخدم إحصاءة الاختبار (3.69)، أو نستخدم مجاميع مربعات إضافية وإحصاءة الاختبار (8.25). وفي الحالتين كليهما، تكون البدائل:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = 0$$

$$(23.14) \quad \text{ليس كل من } \tau_1 \text{ و } \tau_2 \text{ مساوٍ للصفر} \quad H_a:$$

لاحظ أن $\tau_3 = \tau_1 - \tau_2$ لا بد أن تساوي الصفر عندما يكون $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

وسنقوم بالاختبار مستخدمين أسلوب اختبار الخطية العام، فنطور أولاً النموذج المخفض تحت H_0 :

$$(23.15) \quad Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad \text{النموذج المخفض}$$

والنموذج (23.15) هو مجرد نموذج انحدار خطي بسيط لا يختلف فيه أي من المعامل باختلاف المعالجات. ومصفوفات البيانات لهذا النموذج مبنية في الجدول (٢٣-٤) ونتائج تحليل التباين معروضة في الجدول (٢٣-٤) ب.

جدول (٢٣-٢) مصفوفات البيانات في مثال ترويج البسكوت - نموذج الطائر (23.13)

	I_1	I_2	x	
38	1	1	0	$21-25=-4$
39	1	1	0	$26-25=1$
36	1	1	0	$22-25=-3$
45	1	1	0	$28-25=3$
33	1	1	0	$19-25=-6$
43	1	0	1	$34-25=9$
38	1	0	1	$26-25=1$
$Y =$ 38	1	0	1	$29-25=4$
27	1	0	1	$18-25=-7$
34	1	0	1	$25-25=0$
24	1	-1	-1	$23-25=-2$
32	1	-1	-1	$29-25=4$
31	1	-1	-1	$30-25=5$
21	1	-1	-1	$16-25=-9$
28	1	-1	-1	$29-25=4$

جدول (٢٣-٣) منحرجات الحساب لمثال ترويج البسكوت-نموذج الطائر (23.13)

(أ) معاملات الانحدار

$$\hat{\mu} = 33.800 \quad \hat{\tau}_2 = .942$$

$$\hat{\tau}_1 = 6.017 \quad \hat{\gamma} = .899$$

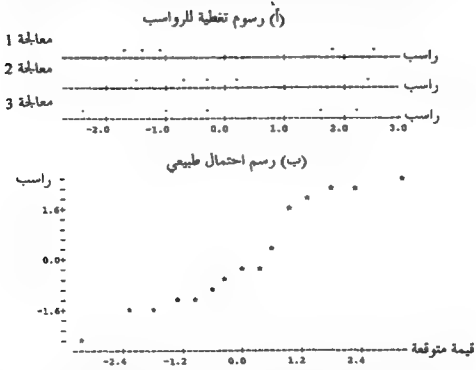
(ب) تحليل التباين

MS	df	SS	مصدر التغير
MSR = 202.610	3	SSR = 607.829	الانحدار
MSE = 3.506	11	SSE = 38.571	الخطأ
	14	SSTO = 646.400	المجموع

(ج) مصفوفة تباين تباين تفاعلات الانحدار المقدرة

$$\begin{matrix} \hat{\mu} & \hat{\tau}_1 & \hat{\tau}_2 & \hat{\gamma} \\ \hat{\mu} & \begin{bmatrix} 2338 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\tau}_1 & \begin{bmatrix} 0 & .5016 & -2603 & .0189 \end{bmatrix} \\ \hat{\tau}_2 & \begin{bmatrix} 0 & -2603 & .4882 & -.0147 \end{bmatrix} \\ \hat{\gamma} & \begin{bmatrix} 0 & .0189 & -.0147 & .0105 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

شكل (٢٣-٦) رسوم رواسب تشخيصية - مثال ترويج البسكوت (مستجاب مرجع [23.1])



ونرى من الجدول (٢٣-٤) أن $SSE(R) = 455.722$ ومن الجدول (٢٣-٣) ب

أن $SSE(F) = 38.571$. وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار (3.69) هنا:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{(n_T - 2) - [n_T - (r + 1)]} + \frac{SSE(F)}{n_T - r - 1}$$

$$= \frac{455.722 - 38.571}{13 - 11} + \frac{38.571}{11} = 59.5$$

وستحكم بمستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$ ، فنحتاج معه إلى $F(0.95, 2, 11) = 38.571$ وتكون قاعدة القرار بالتالي:

إذا كان $F^* \leq 3.98$ استنتج H_0

إذا كان $F^* > 3.98$ استنتج H_a

وعا أن $F^* = 59.5 > 3.98$ ، أي أن الفروايج الثلاثة للبسكوت تختلف في فعاليتها بالنسبة للمبيعات. القيمة P لهذا الاختبار هي 0.

جدول (٤-٢٣) بيانات على شكل مضغوطات ونتائج الانحدار لمثال ترويج مبيعات نوع من البسكويت - النموذج الخطي (23.15).

(أ) مصفوفات البيانات

$$Y = \begin{bmatrix} 38 \\ 39 \\ 36 \\ 45 \\ 33 \\ 43 \\ 38 \\ 38 \\ 27 \\ 34 \\ 24 \\ 32 \\ 31 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 3 \\ 1 & -6 \\ 1 & 9 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -7 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & -9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(ب) تحليل تباين

df	SS	مصدر التغير
1	SSR = 190.678	الانحدار
13	SSE = 455.722	الخطأ
14	SSTO = 646.400	المجموع

ملاحظة

يكون اختبار ما إذا كانت $\gamma = 0$ أم لا مفيداً من وقت لآخر. وهذا هو ببساطة اختبار ما إذا كان معامل انحدار مفردة مساوياً للصفر أم لا. ويمكن القيام بهذا الاختبار باستخدام إحصاءة الاختبار F^0 في (8.23)، أو باستخدام إحصاءة الاختبار χ^2 في (8.22).

تقدير تأثيرات المعالجات

بما أننا عثرنا على حضور لتأثيرات المعالجات في دراسة ترويج البسكويت فقد رغب المحلل في مزيد من التفصّل لهذه التأثيرات. وقد لاحظنا سابقاً أن مقارنة معالجتين تنطوي على فرق من النوع $\tau_i - \tau_j$ ، المسافة الرأسية بين خطي الانحدار معالجيتين. وباستخدام النظرية (1.27b) حول التباينات وحقيقة أن $\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2$ نجد في الحال أن مقدرات جميع المقارنات الثنائية وتبايناتها هي كما يلي:

مقارنة	مقدّر	تباين
$\tau_1 - \tau_2$	$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} - 2\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$
$\tau_1 - \tau_3 = 2\tau_1 + \tau_2$	$2\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2$	$4\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} + 4\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$
$\tau_2 - \tau_3 = \tau_1 + \tau_2$	$\hat{\tau}_1 + 2\hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + 4\sigma^2\{\hat{\tau}_2\} + 4\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$

وبمجهزنا الجدول (٢٣-٢٣) بما نحتاجه من معاملات الانحدار المقدّرة، كما يزدونا

الجدول (٢٣-٢٣) جـ بتبايناتها وتغايراتها المقدّرة. ومنه نجد:

مقارنة	مقدّر	مقارنة
$\tau_1 - \tau_2$	$6.017 - .942 = 5.075$	$.5016 + .4882 - 2(-.2603)$ $= 1.5104$
$\tau_1 - \tau_3$	$2(6.017) + .942 = 12.976$	$4(.5016) + .488 + 4(-.2603)$ $= 1.4534$
$\tau_2 - \tau_3$	$6.017 + 2(.942) = 7.901$	$.5016 + 4(.488) + 4(-.2603)$ $= 1.4132$

ونستخدم التوزيع t بـ 1 درجة من الحرية عندما نريد وضع تقدير بفترة

واحدة. (درجات الحرية هي تلك الموافقة لـ MSE في نموذج التغيرات التام) إلا أننا نرغب عادة بمائلة من التقديرات بفترة. وفي هذه الحالة يمكن استخدام طريقة

المقارنات المتعددة لشيفه (Scheffe) مع عامل ضرب S معرّف كما يلي:

$$S^2 = (r-1)F(1-\alpha; r-1, n_T-r-1) \quad (23.17)$$

أو يمكن استخدام طريقة بونفروني مع مضاعف عامل ضرب B حيث:

$$B = t(1-\alpha/2g; n_T-r-1) \quad (23.18)$$

وحيث g عدد العبارات في العائلة. أما طريقة توكي فغير مناسبة لتحليل التغير.

وفي حالتنا هنا فقد رغب المحلل في الحصول على جميع المقارنات الثنائية بمعامل ثقة عالي 95%. وقد استخدم المحلل طريقة شيفه لأنه توقع القيام ببعض التقديرات الإضافية للمقارنات. ولذلك فقد احتاج إلى:

$$S^2 = 2.82 \quad S^2 = (r-1)F(95;2,11) = 2(3.98) = 7.96$$

وباستخدام النتائج في (23.16a)، فإن فترات الثقة لجميع المقارنات الثنائية بين

المعالجات بمعامل ثقة عالي 95% كانت:

$$1.61 = 5.075 - 2.82\sqrt{1.5104} \leq \tau_1 - \tau_2 \leq 5.075 + 2.82\sqrt{1.5104} = 8.54$$

$$9.58 = 12.976 - 2.82\sqrt{1.4534} \leq \tau_1 - \tau_3 \leq 12.976 + 2.82\sqrt{1.4534} = 16.38$$

$$4.55 = 7.901 - 2.82\sqrt{1.4132} \leq \tau_2 - \tau_3 \leq 7.901 + 2.82\sqrt{1.4132} = 11.25$$

وتشير هذه النتائج بوضوح إلى أن المعالجة في المخزن (المعالجة 1) أفضل بصورة معنوية في ترويج مبيعات البسكويت من أي من ترويجي الرفين، وأن حيز الرف الإضافي (المعالجة 2) يتفوق على العروض الخاصة في نهائي تمر (المعالجة 3).

تعليقات

١- من وقت لآخر نرغب في مقارنات بين تأثيرات المعالجات أكثر عمومية من المقارنات الثنائية. ولا تبرز مشاكل جديدة سواء في استخدام التوزيع t لمقارنة بمفردها، أو في استخدام طريقي شيفه وبونفرونوني لمقارنات متعددة. وعلى سبيل المثال، إذا رغب المحلل في مثال ترويج البسكويت في مقارنة تأثير معالجة المعالجة في المخزن (معالجة 1) بالمعالجتين المتضمنتين عروض رف (المعالجتين 2 و 3) فسيهتم بالمقارنة:

$$L = \tau_1 - \frac{\tau_2 + \tau_3}{2} \quad (23.19)$$

والمقدر المناسب هو:

$$\hat{L} = \hat{\tau}_1 - \frac{\hat{\tau}_2 + (-\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2)}{2} = \frac{3}{2} \hat{\tau}_1 \quad (23.20)$$

ومن (1.16b) يكون تباين هذا المقدر:

$$\sigma^2\{\hat{L}\} = \frac{9}{4} \sigma^2\{\hat{\tau}_1\} \quad (23.21)$$

٢- قد يكون من المفيد تقديم متوسط الاستجابة للمعالجة i من أجل قيمة ما لـ

X وكثيرا ماتحتر القيمة $X = \bar{X}_{..}$ قيمة " نموذجية " لـ X ، ونعلم من الشكل (٢٣-٣) أن متوسط استجابة المعالجة i عند $X = \bar{X}_{..}$ هو مايقطعه خط انحدار المعالجة من محور الصادات وهو $\mu_i + \tau_i$ ويمكن بسهولة تطوير مقدر لـ $\mu_i + \tau_i$ وفي مثال ترويج البسكويت، نحصل على المقدرات التالية وتبايناتها:

متوسط استجابة عند $X = \bar{X}_{..}$	مقدر	تباين
$\tau_1 + \mu_i$	$\hat{\mu}_i + \hat{\tau}_1$	$\sigma^2\{\hat{\mu}_i\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + 2\sigma\{\hat{\mu}_i, \hat{\tau}_1\}$
$\tau_2 + \mu_i$	$\hat{\mu}_i + \hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\mu}_i\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} + 2\sigma\{\hat{\mu}_i, \hat{\tau}_2\}$
$\tau_3 + \mu_i$	$\hat{\mu}_i - \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\mu}_i\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} - 2\sigma\{\hat{\mu}_i, \hat{\tau}_1\} - 2\sigma\{\hat{\mu}_i, \hat{\tau}_2\} + 2\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$

(23.22)

واستخدام النتائج في (23.3) يقود إلى التقديرات التالية:

المعالجة	متوسط الاستجابة المقدر عند $\bar{X}_{..}$	التباين المقدر
1	$33.800 + 6.017 = 39.817$	$.2338 + .5016 + 2(0) = .7354$
2	$33.800 + .942 = 34.742$	$.2338 + .4882 + 2(0) = .7220$
3	$33.800 - 6.017 - .942 = 26.841$	$.2338 + .5016 + .4882 - 2(0) - 2(0) + 2(-.2603) = .7030$

اختبار الميول المتوازية

أحد الافتراضات المهمة في تحليل التباين هو أن لجميع خطوط انحدار المعالجات الميل نفسه γ . وقد قام المحلل الذي أجرى دراسة ترويج البسكويت، في الحقيقة، باختيار هذا الافتراض قبل المضي في التحليل الذي ناقشناه سابقا . ونعلم من الفصل العاشر أنه يمكن تعميم نموذج الانحدار (23.13) بحيث يسمح بميول مختلفة للمعالجات، وذلك بإدخال حدود تفاعل جدائية. وعلى وجه الخصوص، سنحتاج هنا إلى I_{1x} و I_{2x} . وسنرمز لمعاملات الانحدار المقابلة بـ β_1 و β_2 ، على الترتيب. وهكذا يكون النموذج المعمم:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_1 I_{i1} + \tau_2 I_{i2} + \gamma X_{ij} + \beta_1 I_{i1} X_{ij} + \beta_2 I_{i2} X_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (23.23)$$

ويتضمن الجدول (٢٣-٥) مصفوفات البيانات لهذا النموذج المعمم في مثال تروبيج البسكويت. ونلاحظ أن المصفوفة X للنموذج المعمم تختلف عن المصفوفة X لنموذج الانحدار (23.13) بإضافة العمودين I_{i2} و $I_{i2} X_{ij}$. وقد أنتج توفيق نموذج الانحدار (23.23)، باستخدام حزمة حاسب للانحدار المتعدد، نتائج التحاين المبينة في الجدول (٢٣-٥) ب، ومجموع مربعات الخطأ SSE الذي حصلنا عليه بتوفيق النموذج المعمم (23.23)، مكافئ لتوفيق خطوط انحدار منفصلة لكل معالجة ثم جمع مجاميع مربعات الخطأ هذه.

واختبار توازي الميول يكافئ اختبار عدم وجود تفاعلات في النموذج المعمم

(23.23):

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_a: \text{ليس كل من } \beta_1 \text{ و } \beta_2 \text{ مساويا للصفر} \quad (23.24)$$

وما نحتاجه الآن هو أن نذكر أن النموذج المعمم (23.23) هو هنا النموذج "الثام"،

وأن نموذج التباين (23.13) هو الآن النموذج "المخفض"، وبالتالي فلدينا من الجدولين (٢٣-

٣) ب و (٢٣-٥) ب:

$$SSE(F) = 31.521$$

$$SSE(R) = 38.571$$

وهكذا تصبح إحصاءة الاختبار (3.69) هنا:

$$F^* = \frac{38.571 - 31.521}{11 - 9} + \frac{31.521}{9} = 1.01$$

ولمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، نحتاج إلى $F(0.95; 2; 9)$. وبما أن $1.01 \leq 4.26 = F^*$ ، فنستنتج

H_0 ، أي أن خطوط انحدار المعالجات الثلاث الميل نفسه والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.40.

(٢٣-٤) تحليل التباين وحيد العامل كتمهليل لتحليل التباين

شرحنا في الفقرات السابقة الأفكار الأساسية التي يقوم عليها تحليل التباين من خلال

النظر إلى النموذج كنموذج انحدار. ورأينا أن المسائل الإحصائية التي تبرز في تحليل التباين

تندرج بسهولة في إطار الانحدار. وعلى أي حال لم تكن الحسابات موجودة عندما طُوِّر

تحليلات التباين للمرة الأولى، ولم يكن من الممكن عمليا القيام بحسابات تحليل التباين بأسلوب الانحدار. وبدلاً من ذلك، فقد طُوِّرت صيغ حسابية تستغل حقيقة أن المتغيرات المؤشرة تتخذ القيم 1، -1 أو 0 وفق بنية معينة. وقد تبلى هذه الصيغ الحسابية فرعية، ولكن الحسابات اليدوية وفق هذه الصيغ هي أبسط بكثير من الحسابات اليدوية وفق أسلوب

جدول (٢٣-٥) مصفوفات البيانات ونتائج الانحدار لنموذج الترويج البسكويت - النموذج المعمم (23.23).

(أ) مصفوفات البيانات

	I_1	I_2	x	I_1x	I_2x
38	1	1	0	-4	-4
39	1	1	0	1	1
36	1	1	0	-3	-3
45	1	1	0	3	3
33	1	1	0	-6	-6
43	1	0	1	9	0
38	1	0	1	1	0
Y = 38	X = 1	0	1	4	0
27	1	0	1	-7	0
34	1	0	1	0	0
24	1	-1	-1	-2	2
32	1	-1	-1	4	-4
31	1	-1	-1	5	-5
21	1	-1	-1	-9	9
28	1	-1	-1	4	-4

(ب) تحليل التباين

df	SS	مصدر التغير
5	SSR = 614.879	الانحدار
9	SSE = 31.521	الخطأ
14	SSTO = 646.400	المجموع

الاختلاف. ولشرح الأساس المنطقي لهذه الصيغ الحسابية، يُنظر عادة إلى تحليل التباين كعملية تبدأ بتحليل التباين المعتاد ثم يُعدل هذا التحليل آخذاً في الاعتبار المتغيرات المصاحبة. وستعرض الآن لأسلوب التعديل هذا في حالة تحليل تباين وحيد العامل مع متغير مصاحب واحد ثم نبين تكافؤه مع أسلوب الاختلاف.

جدول تحليل التباين

تحليل التباين لـ X و XY . الفكرة الأساسية التي ستعتمد عند النظر إلى تحليل التباين كتعديل لتحليل التباين العادي هو أنه يمكن القيام بتفكيك مجموع المربعات الكلي في (14.27):

$$SSTO_Y = SSTR_Y + SSE_Y \quad (23.25)$$

من أجل المتغير X والجداء XY . لاحظ أن الدليل Y قد أضيف في (23.25) لإيضاح أن هذا التفكيك يشير إلى المتغير Y . ونذكر أن:

$$SSTO_Y = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{Y^2}{n_T} \quad (23.26a)$$

$$SSTR_Y = \sum_i n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_i \frac{Y_i^2}{n_i} - \frac{Y^2}{n_T} \quad (23.26b)$$

$$SSE_Y = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_i^2}{n_i} \quad (23.26c)$$

وتحليل التباين نفسه للمتغير X هو:

$$SSTO_X = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X^2}{n_T} \quad (23.27a)$$

$$SSTR_X = \sum_i n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \sum_i \frac{X_i^2}{n_i} - \frac{X^2}{n_T} \quad (23.27b)$$

$$SSE_X = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \sum_i \frac{X_i^2}{n_i} \quad (23.27c)$$

حيث الرموز من أجل X تتفق تماماً مع تلك الخاصة بـ Y .

وبدأ تحليل التباين للجداءات XY بتعريف مجموع جداءات كلي ($SPTO$):

$$SPTO = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X})(Y_{ij} - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j X_{ij} Y_{ij} - \frac{X Y}{n_T} \quad (23.28a)$$

ولرؤية صلة مجموع الجداءات الكلي بمجموع المربعات الكلي لـ Y أو لـ X ، لاحظ أنك ستحصل على $SSTO_Y$ عند وضع Y_{ij} بدلا من X_{ij} في (23.28a)، وعند وضع X_{ij} بدلا من Y_{ij} ستحصل على $SSTO_X$. ومركبتنا بمجموع الجداءات الكلي هي مجموع جداءات المعالجات ($SPTR$) ومجموع جداءات الخطأ (SPE):

$$SPTR = \sum_j n_j (\bar{X}_j - \bar{X})(\bar{Y}_j - \bar{Y}) = \sum_j \frac{X_j Y_j}{n_j} - \frac{X Y}{n_T} \quad (23.28b)$$

$$SPE = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_j)(Y_{ij} - \bar{Y}_j) = \sum_i \sum_j X_{ij} Y_{ij} - \sum_j \frac{X_j Y_j}{n_j} \quad (23.28c)$$

وعلافا بمجموع المربعات، فإن بمجموع الجداءات يمكن أن تكون سالبة.

مثال. يتضمن الجدول (٦-٢٣) تحليلات تبين لـ X ، Y و XY لمثال تروبيج البسكويت الذي أعطيت بياناته في الجدول (١-٢٣)ب:

$$\begin{aligned} SPTR &= \frac{1}{5} [116(191) + 132(180) + 127(136)] - \frac{375(507)}{15} \\ &= 12,637.6 - 12,675.0 = -37.4 \\ SSE_X &= 9,735 - \frac{1}{5} [(116)^2 + (132)^2 + (127)^2] = 9,735 - 9,401.8 = 333.2 \end{aligned}$$

تحليل التباين المعدل لـ Y . ونحن جاهزون الآن لتعديل تحليل تبين Y كي نحصل على تحليل التباين.

جدول (٦-٢٣) تحليل تبين لـ Y ، X و XY في مثال تروبيج مبيعات نوع من البسكويت				
بمجموع مربعات أو جداءات				
مصدر التغير	Y	X	XY	df
معالجات	338.8	26.8	-37.4	2
الخطأ	307.6	333.2	299.4	12
المجموع	646.4	360.0	262.0	14

وأفضل رؤية للأسباب المتوقعة للتعديل تأتي من تحليل الانحدار الخطي البسيط. فقد وجدنا هناك أنه يمكن التعبير عن مجموع مربعات الخطأ (2.21):

$$SSE = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2 \quad (23.29)$$

بالشكل الجبري المكافئ (2.24b):

$$SSE = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{[\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})]^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad (23.29a)$$

والذي يمكن إعادة كتابته كما يلي:

$$SSE = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 - b_1 \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (23.29b)$$

وبدلالة رموز تحليلنا للتباين (وفيه نستخدم دليلين \bar{X} و \bar{Y} من أجل \bar{X} و \bar{Y} ، على الترتيب)، يمكن إذا التعبير عن مجموع مربعات خطأ الانحدار بأي من الطريقتين التاليتين:

$$SSE = SSTO_Y - \frac{(SPTO)^2}{SSTO_X} \quad (23.30a)$$

$$SSE = SSTO_Y - b_1(SPTO) \quad (23.30b)$$

وبالتالي يمكن، في تحليل التباين، الحصول على مجموع المربعات الكلي لـ Y معدلا من أجل العلاقة الخطية مع X كما يلي:

$$SSTO(adj.) = SSTO_Y - \frac{(SPTO)^2}{SSTO_X} \quad (23.31a)$$

حيث يرمز $SSTO(adj.)$ لمجموع المربعات الكلي للمعدل لـ Y . وقياسا على ذلك يمكن عندئذ القول إن:

$$SSE(adj.) = SSE_Y - \frac{(SPE)^2}{SSE_X} \quad (23.31b)$$

حيث يرمز $SSE(adj.)$ لمجموع المربعات المعدل للخطأ الخاص بـ Y . وأخيرا، نحصل بالطرح على:

$$SSTR(adj.) = SSTO(adj.) - SSE(adj.) \quad (23.31c)$$

حيث يرمز $SSTR(adj.)$ لمجموع مربعات المعالجات المعدل الخاص بـ Y . وتجدر ملاحظة أننا حصلنا على $SSTR(adj.)$ بالطرح وليس بتعديل مشابه للتعديلات السابقة. ويستتبع سبب ذلك فيما بعد. ويتضمن الجدول (٧-٢٣) جدول تحليل التباين العام للدراسة وحيدة العامل مع متغير مصاحب واحد. وقُلمت أولا مجاميع المربعات والجدائيات، ثم أعطيت مجاميع المربعات المعدلة. وعند قسمة هذه الأخيرة على عدد درجات الحرية نحصل على متوسطات المربعات المعدلة. ونلاحظ أن عدد درجات الحرية لكل من $SST(adj.)$ و $SSE(adj.)$

أقل بواحد مما هي عليه في نموذج تحليل التباين. وسبب ذلك هو أننا اضطررنا إلى تقدير معامل الانحدار r للمتغير المصاحب.

جدول (٧-٢٣) تحليل التباين لدراسة وحدة العامل مع متغير مصاحب واحد

df	بمجموع مربعات أو حسابات			مصدر التغير
	XY	X	Y	
$r - 1$	$SPTR$	$SSTR_X$	$SSTR_Y$	معالجات
$n_T - r$	SPE	SSE_X	SSE_Y	خطأ
$n_T - 1$	$SPTO$	$SSTO_X$	$SSTO_Y$	المجموع
				مصدر التغير
				معادلة
MS	معادلة	df	SS	معادلة
$MSTR(\text{adj.})$	$r - 1$	$SSTR(\text{adj.})$		معالجات
$MSE(\text{adj.})$	$n_T - r - 1$	$SSE(\text{adj.})$		خطأ
	$n_T - 2$	$SSTO(\text{adj.})$		المجموع

مثال. نجد، في مثال ترويج البسكويت، مستخدمين (23.31) ونتائج الجدول

(٦-٢٣):

$$SSTO(\text{adj.}) = 646.4 - \frac{(262)^2}{160} = 455.722$$

$$SSE(\text{adj.}) = 307.6 - \frac{(299.4)^2}{333.2} = 38.571$$

$$SSTR(\text{adj.}) = 455.722 - 38.571 = 417.151$$

وهذه النتائج مقدمة في جدول تحليل تباين في الجدول (٨-٢٣)، الذي يتضمن، أيضاً، درجات الحرية المعدلة ومتوسطات المربعات المعدلة. لاحظ أن عدد درجات الحرية لمجموع المربعات الكلي المعدل ومجموع مربعات الخطأ المعدل أقل بدرجة واحدة مما هو في تحليل التباين (جدول ٦-٢٣).

جدول (٢٣-٨) جدول تحليل تباين لمثال ترويج البسكويت

مصدر التغير	SS معادل	df معادلة	MS معادل
معالجات	417.151	2	208.576
خطأ	38.571	11	3.506
المجموع	455.722	13	

اختبار تأثيرات المعالجات

ويقوم اختبار تأثيرات للمعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_r = 0$$

$$H_a: \tau_i \text{ ليست جميعها مساوية للصفر} \quad (23.32a)$$

على إحصاءة الاختبار المعتادة:

$$F^* = \frac{MSTR(adj.)}{MSE(adj.)} \quad (23.32b)$$

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع التوزيع $F(r-1, n-r-1)$ وبالتالي فإن قاعدة القرار، مع ضبط مستوى المنوبة عند α ، تكون:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F(1-\alpha; r-1, n-r-1) \quad (23.32c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* > F(1-\alpha; r-1, n-r-1)$$

مثال. في مثال ترويج البسكويت لدينا من الجدول (٢٣-٨):

$$F^* = \frac{MSTR(adj.)}{MSE(adj.)} = \frac{208.576}{3.506} = 59.5$$

وهي بالطبع القيمة نفسها التي حصلنا عليها في الفقرة (٢٣-٣) بأسلوب الانحدار.

وإذا كانت $\alpha = 0.05$ فنحتاج إلى $F(0.95; 2, 11) = 3.98$. وبما أن $59.5 > 3.98$ ، $F^* = 59.5$ ، نستنتج أن للترويج الثلاثة تأثيرات مختلفة على مبيعات البسكويت.

تسوية بين أسلوبيين

يلخص الشكل (٢٣-٧) العلاقات بين أسلوبي الانحدار والتعديل في تحليل التباين.

وسنشرح الآن هذه العلاقات في ثلاث خطوات:

١- نعتبر أولاً تكافؤ $SSE(R)$ في أسلوب الانحدار مع $SSTO(adj.)$ في أسلوب

التعديل. فعند توفيق النموذج المخفض (23.15) في أسلوب الانحدار:

$$Y_{ij} = \mu + \gamma(X_{ij} - \bar{X}_{.}) + \varepsilon_{ij}$$

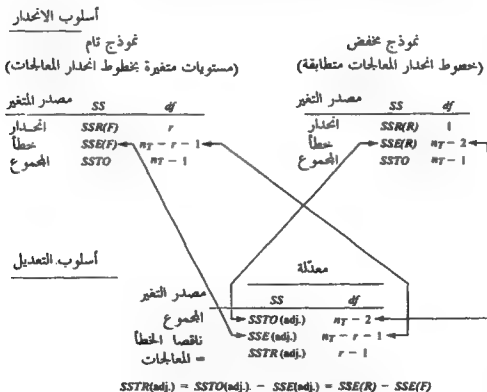
مع ملاحظة أن $x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_{.}$ نحصل على مقدر المربعات الدنيا (2.10a) للميل γ :

$$g = \frac{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{.})(Y_{ij} - \bar{Y}_{.})}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{.})^2} = \frac{SPTO}{SSTO_x} \quad (23.33)$$

وبمجموع مربعات الخطأ للمتاد (2.24b):

$$SSE(R) = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{.})^2 - \frac{\left[\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{.})(Y_{ij} - \bar{Y}_{.}) \right]^2}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{.})^2} \quad (23.34)$$

شكل (٢٣-٧) تسوية بين أسلوب الاختبار والتعديل في تحليل تفاعل



وفي الشكل (٢٣-٨) مخطط توضيحي للرواسب الداخلة في $SSE(R)$ عندما تتضمن الدراسة

معالجتين. وبالتعبير عن $SSE(R)$ بـ r رمزاً، فإنها تصبح:

$$SSE(R) = SSTO_r - \frac{(SPTO)^2}{SSTO_x} = SSTO(\text{adj.}) \quad (23.34a)$$

وذلك وفقا لتعريف $SSTO(\text{adj.})$ الوارد في الصيغة (23.31a). وهكذا، فإن $SSTO(\text{adj.})$ هي ببساطة مجموع مربعات الخطأ عند توفيق الانحدار خطي لمجموعة البيانات الإحصائية بكاملها.

٢- ونعتمد بعدها تكافؤ $SSE(F)$ في أسلوب الانحدار و $SSE(\text{adj.})$ في أسلوب التعديل.

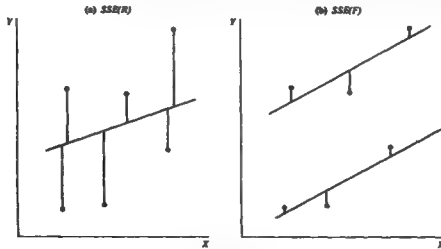
فعند توفيق نموذج التباين التام (23.3):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j(X_{ij} - \bar{X}_i) + \varepsilon_{ij}$$

للبيانات، حيث نسمح باختلاف تقاطعات خطوط الانحدار المعالجات مع محور الصادات $\mu + \tau_i$ إلا أننا نفترض ميلا مشتركا γ ، يمكن تبين أن مقدر المربعات الدنيا لهذا الميل المشترك هو:

$$g_w = \frac{\left[\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_{ij} - \bar{Y}_i) \right]^2}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} = \frac{SPE}{SSE_x} \quad (23.35)$$

شكل (٨-٢٣) تحليل تخطيطي للرواسب من أجل $SSE(R)$ و $SSE(F)$



- معالجة 1
- معالجة 2

وأن مقدر المربعات الدنيا لـ $\mu + \tau_i$ هو:

$$\bar{Y}_i - g_w(\bar{X}_i - \bar{X}_-) \quad (23.36)$$

وبالتالي يكون مجموع مربعات الخطأ للمعالجة i هو:

$$\begin{aligned} \sum_j \{Y_{ij} - [\bar{Y}_i - g_w(\bar{X}_i - \bar{X}_-)] - g_w(X_{ij} - \bar{X}_-)\}^2 \\ = \sum_j [(Y_{ij} - \bar{Y}_i) - g_w(X_{ij} - \bar{X}_i)]^2 \end{aligned} \quad (23.37)$$

وبجمع مجاميع مربعات الخطأ هذه فوق جميع المعالجات، نحصل على $SSE(F)$:

$$SSE(F) = \sum_i \sum_j [(Y_{ij} - \bar{Y}_i) - g_w(X_{ij} - \bar{X}_i)]^2 \quad (23.38)$$

وبوضع الشكل (٢٣-٨) ب الرواسب التي تدخل في حالة معالجتين.

وبنشر عبارة $SSE(F)$ في (23.38) والتبسيط، نجد:

$$SSE(F) = \sum_i \sum_j [(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 - g_w \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_{ij} - \bar{Y}_i)] \quad (23.38a)$$

ولكن هذه العبارة تصبح في رموزنا الجديدة:

$$SSE(F) = SSE_Y - \frac{SPE}{SSE_X} SPE = SSE_Y - \frac{(SPE)^2}{SSE_X} = SSE(\text{adj.}) \quad (23.38b)$$

وذلك وفقاً لتعريف $SSE(\text{adj.})$ في (23.31b) وهكذا يكون $SSE(\text{adj.})$ ببساطة مجموع

مربعات الخطأ عند توفير خطوط انحدار منفصلة للمعالجات ولكل منها الميل نفسه.

٣- ونحصل على $SSR(\text{adj.})$ على أنه الفرق $SSR(\text{adj.}) - SSE(\text{adj.})$ ، تماماً كما يشكل

الفرق $SSE(R) - SSE(F)$ البسط في إحصاء الاختبار في أسلوب الاختبار الخطي العام.

تعليقات

١- يمكن الحصول على مؤشر لفعالية تحليل التباين في تخفيض تشتت الخطأ بمقارنة

$MSE(\text{adj.})$ في تحليل التباين مع MSE في تحليل التباين العادي. ونعلم من الجدول (٢٣-٨)

في مثال ترويح البسكويت أن $MSE(\text{adj.}) = 3.51$. ويمكننا أن نرى، أيضاً، من الجدول

(٢٣-٦) أن متوسط مربعات الخطأ في تحليل التباين العادي كان سيأخذ القيمة:

$$MSE = \frac{307}{12} = 26.63$$

وبالتالي، فإن تحليل التباين قد خفّضَ التباينَ الباقي في هذه الحالة بحوالي 87 بالمائة، وهو تخفيض كبير.

٢- لا يقود تحليل التباين وتحليل التباين بالضرورة إلى النتائج نفسها حول تأثيرات المعالجات. وعلى سبيل المثال، قد لا يشير تحليل تباين إلى أية تأثيرات للمعالجات، بينما يمكن أن يُظهر تحليل تباين، تباين خطفه أقل، تأثيرات مهمة للمعالجات. وفي العادة، ينبغي أن نقرر بالطبع سلفاً أي التحليلين سنستخدم.

٣- يمكن اعتبار المقدّر g_i للميل المشترك γ كمُتوسط للميل g_i لخطوط الانحدار المعالجات المقدّرة بصورة منفصلة. فإذا قمنا بتوفيق خط انحدار منفصل لكل معالجة، فإن الميل المقدّر g_i للمعالجة i سيكون وفقاً لطريقة المربعات الدنيا معطى بالعلاقة التالية:

$$g_i = \frac{\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_{ij} - \bar{Y}_i)}{\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \quad (23.39)$$

وباستخدام $\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ كأوزان، فإن المتوسط المرجّح للمقادير g_i يعطينا بالضبط

g_w كما عرفناه في (23.35):

$$\frac{\sum_i \left[\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right] g_i}{\sum_i \left[\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right]} = \frac{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_{ij} - \bar{Y}_i)}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} = g_w$$

وهكذا يمكن التفكير في g_w كميل انحدار متوسط ضمن المعالجات.

وفي مثال ترويع البسكويت، نجد أن ميل الانحدار المتوسط ضمن المعالجات:

$$g_w = \frac{SPE}{SSE_x} = \frac{199.4}{333.2} = .8986$$

والميل عند توفيق خط انحدار بمفرده لجميع البيانات هو:

$$g = \frac{SPTO}{SSTO_x} = \frac{262}{360} = .7278$$

موسطات معدلة للمعالجات

في تحليل التباين، يكون متوسط المعالجة المقدر \bar{Y}_i تقديراً لمتوسط الاستجابة مع المعالجة i . وفي تحليل التباين يتحدث العديد من الكتاب عن الحاجة إلى تعديل المقادير \bar{Y}_i لجعلها قابلة للمقارنة بالنسبة للمتغير المصاحب X باعتبار أن قيم X سوف لا تكون نفسها، عادة، لكل المعالجات. والتعديل يأخذ الشكل:

$$\bar{Y}_i(\text{adj.}) = \bar{Y}_i - g_w(\bar{X}_i - \bar{X}_.) \quad (23.40)$$

ويمكن رؤية الأساس المنطقي للتعديل من الشكل (٢٣-٩). إذ يتضمن هذا الشكل النقاط (\bar{X}_i, \bar{Y}_i) للمعالجات الثلاث في مثال ترويج البسكويت. ومن كل من هذه النقاط رسمنا خط انحدار بحمل $g_w = 0.8986$ هو الميل المتوسط ضمن المعالجات. ومتوسط المعالجة المعدل $\bar{Y}_i(\text{adj.})$ هو ببساطة الإحداثي الصادي لخط الانحدار عند $X = \bar{X}_.$ وبهذه الطريقة يُقال إن المعالجات قد أصبحت قابلة للمقارنة بالنسبة لـ X . وفي مثال ترويج البسكويت نحصل على المتوسطات المعدلة للمعالجات كما يلي:

المعالجة	\bar{Y}_i	\bar{X}_i	$\bar{X}_.$	g_w	$g_w(\bar{X}_i - \bar{X}_.)$	$\bar{Y}_i(\text{adj.})$
1	38.2	23.2	25	.8986	-1.62	39.82
2	36.0	26.4	25	.8986	1.26	34.74
3	27.2	25.4	25	.8986	.36	26.84

وتشير مقارنة مع النتائج على الصفحة ٤٤ إلى أن المتوسطات المعدلة للمعالجات هذه هي ببساطة تقديرات لتقاطعات خطوط انحدار المعالجات مع المحور الصادي. وبعبارة أخرى، فإن $\bar{Y}_i(\text{adj.})$ هي ببساطة مقدر لـ $\mu_i + \eta_i$.

ويمكن تبين أن تباين $\bar{Y}_i(\text{adj.})$ هو:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_i(\text{adj.})\} = \sigma^2\left[\frac{1}{n_i} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_.)^2}{SSE_X}\right] \quad (23.41)$$

والمقدر غير المنحاز لهذا التباين هو:

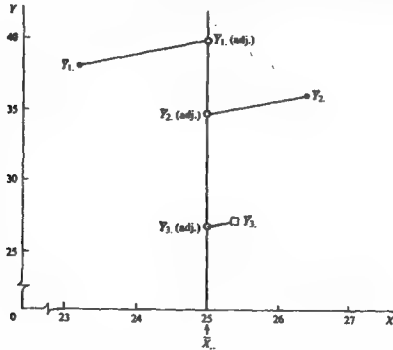
$$s^2\{\bar{Y}_i(\text{adj.})\} = MSE(\text{adj.})\left[\frac{1}{n_i} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_.)^2}{SSE_X}\right] \quad (23.42)$$

وعلى سبيل المثال، فإن التباين المقدر للمتوسط المعدل للمعالجة 1 في مثال ترويج البسكويت هو:

$$s^2 \{ \bar{Y}_i(\text{adj.}) \} = 3.506 \left[\frac{1}{5} + \frac{(23.2 - 25)^2}{333.2} \right] = .735$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في الصفحة باستخدام أسلوب الانحدار.

الشكل (٩-٢٣) تحليل المتوسطات المعدلة للمعالجات في مثال البسكويت



مقارنات بين المتوسطات المعدلة للمعالجات. بما أن $\bar{Y}_i(\text{adj.})$ هي مقلّر لـ $\mu_i + \tau_i$ ، فإن المقارنة الثنائية $\bar{Y}_i(\text{adj.}) - \bar{Y}_r(\text{adj.})$ هي مقلّر لـ $\tau_i - \tau_r$. وفي مثال تروبيج البسكويت يمكن إذا تقدير $\tau_1 - \tau_3$ من:

$$\bar{Y}_1(\text{adj.}) - \bar{Y}_3(\text{adj.}) = 39.82 - 26.84 = 12.98$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في الصفحة وتبين الفرق بين متوسطين

معدلين لمعالجتين هو:

$$\sigma^2 \{ \bar{Y}_i(\text{adj.}) - \bar{Y}_r(\text{adj.}) \} = \sigma^2 \left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_r} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_{..})^2}{SSE_X} \right] \quad (23.43)$$

وتقدير هذا التباين هو:

$$s^2 \{ \bar{Y}_i(\text{adj.}) - \bar{Y}_{r_i}(\text{adj.}) \} = MSE(\text{adj.}) \left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{r_i}} + \frac{(\bar{X}_{r_i} - \bar{X}_{r_{r_i}})^2}{SSE_X} \right] \quad (23.44)$$

وفي المثال السابق، نجد:

$$s^2 \{ \bar{Y}_1(\text{adj.}) - \bar{Y}_5(\text{adj.}) \} = 3.506 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{(23.2 - 25.4)^2}{3332} \right] = 1.453$$

وهو بالطبع التباين المقدر نفسه كما حصلنا عليه بأسلوب الانحدار في الصفحة ويتطابق استخدام التوزيع t في حالة تقدير بفترة واحدة لمقارنة بين المتوسطات المعدلة للمعالجات، واستخدام طريقتي شيفه وبو نفوروني للمقارنات المتعددة، مع استخدامها في أسلوب الانحدار. ونعرف مقلداً لمقارنة بين المتوسطات المعدلة للمعالجات كما يلي:

$$\hat{L} = \sum c_i [\bar{Y}_i(\text{adj.})] = \sum c_i \bar{Y}_i - g_{..} \sum c_i \bar{X}_i \quad (23.45)$$

حيث : $\sum c_i = 0$. وتبينها المقدر هو:

$$s^2(\hat{L}) = MSE(\text{adj.}) \left[\sum \frac{c_i^2}{n_i} + \frac{(\sum c_i \bar{X}_i)^2}{SSE_X} \right] \quad (23.46)$$

وحدا الثقة لمقارنة بمفردها L هما:

$$\hat{L} \pm t(1-\alpha/2; n_T - r - 1) s(\hat{L}) \quad (23.47)$$

وفي المقارنات المتعددة نضع أحد عاملي الضرب S أو B المرفقين في (23.17)

و(23.18)، على التوالي، بدلا من عامل الضرب t .

(٢٣-٥) دراسات متعددة العوامل

اعتبرنا حتى الآن حالة تحليل تباين للدراسات وحيدة العامل تتضمن r معالجة. ويمكن، أيضا، استخدام تحليل التباين في دراسات بعاملين أو عدة عوامل. ونوضح الآن استخدام تحليل التباين للدراسات تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد.

نموذج تباين للدراسة تتضمن عاملين

أعطي نموذج التحاين المثبت للدراسة تتضمن عاملين في (18.23) كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (23.48)$$

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$$

حيث α_i التأثير الرئيس للعامل A عند المستوى i التأثير الرئيس للعامل B عند المستوى j $(\alpha\beta)_{ij}$ تأثير التفاعل عندما يكون العامل A في مستواه i والعامل B في مستواه j . ونموذج التباين للدراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب، مفتردين أن العلاقة بين Y والمتغير المصاحب X خطية، هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma(X_{ijk} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ijk} \quad (23.49)$$

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$$

أسلوب الانحدار

لتوضيح أسلوب الانحدار في تحليل تباين الدراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد، لنفرض أن لكل من العاملين A و B مستويين. فيكون نموذج الانحدار المقابل لنموذج التباين (23.49) عندئذ كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 I_{ijk1} + \beta_1 I_{ijk2} + (\alpha\beta)_{11} I_{ijk1} I_{ijk2} + \gamma_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \quad (23.50)$$

حيث:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل } A \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل } A \end{array} \right\} = I_{ijk1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 1 للعامل } B \\ -1 \text{ إذا كانت الملاحظة من المستوى 2 للعامل } B \end{array} \right\} = I_{ijk2}$$

$$x_{ijk} = X_{ijk} - \bar{X}_{..}$$

ونلاحظ أن معاملات الانحدار في (23.50) هي تأثيرات العوامل α_1 و β_1 و $(\alpha\beta)_{11}$ كما هي في تحليل التباين بالإضافة إلى معامل المتغير المصاحب γ .

واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A يتطلب وضع $\alpha_1 = 0$ في النموذج المخفض. وفي المقابل نضع $\beta_1 = 0$ في النموذج المخفض عند اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B ونضع $(\alpha\beta)_{11} = 0$ في النموذج المخفض عند اختبار التفاعلات AB .

ويمكن بسهولة القيام بتقدير التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B بدلالة مقارنات بين معاملات الانحدار. ولا يقدم استعمال طريقتي شيفه وبونفرونوني في المقارنات المتعددة أية

مشاكل جديدة. وعلى سبيل المثال، نعرّف المضاعف (عامل الضرب) S للمقارنات المتعددة بين متوسطات مستويات العامل A كما يلي:

$$S^2 = (a-1)F(1-\alpha; a-1, nr-ab-1) \quad (23.51)$$

ويعطى المضاعف (عامل الضرب) B بالعلاقة (23.18) مع اعتبار $r = ab$.

أسلوب التعديل

عند تطبيق أسلوب التعديل في تحليل تباين دراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد، نحتاج ثانية لتحليل التباين لكل من X و Y وتحليل التباين لـ Y معطى في (18.38) و (18.39) وتحليل التباين لـ X مطابق له بعد استبدال X_y بـ Y_y . ويتضمن الجدول (٢٣-٩) تحليلي التباين هذين لـ Y و لـ X . لاحظ استخدام الدليل Y أو X للتمييز. وتحليل التباين لـ XY هو كما يلي:

$$SPTO = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{i.})(Y_{ijk} - \bar{Y}_{.}) = \sum_i \sum_j \sum_k X_{ijk} Y_{ijk} - \frac{X.Y}{abn} \quad (23.52a)$$

$$SPA = bn \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = \frac{\sum_i X_{i.} Y_{i.}}{bn} - \frac{X.Y}{abn} \quad (23.52b)$$

$$SPB = an \sum_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) = \frac{\sum_j X_{.j} Y_{.j}}{an} - \frac{X.Y}{abn} \quad (23.52c)$$

$$SPE = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{i.})(Y_{ijk} - \bar{Y}_{.}) = SPTO - SPTR \quad (23.52d)$$

$$SPAB = n \sum_i \sum_j (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}) \\ = SPTR - SPA - SPB \quad (23.52e)$$

حيث:

$$SPTR = n \sum_i \sum_j (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i.})(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{.}) = \frac{\sum_i \sum_j X_{ij.} Y_{ij.}}{n} - \frac{X.Y}{abn} \quad (23.52f)$$

ويتضمن الجدول (٢٣-٩)، أيضاً، تحليل التباين للجداء XY .

وتتجاهل طريقة التعديل جميع المركبات فيما عدا مركبة الخطأ والمركبة التي نقوم باعتبارها، ثم نمضي الطريقة عندئذ في إجراء التعديلات بصورة مشابهة لما رأيناه في دراسة وحيدة العامل. وهكذا، كي نختار التأثيرات الرئيسة للعامل A :

جدول (٩-٢٣) تحليلات تباين لـ X و Y و XY - دراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد

df	بمجموع مربعات أو جذائيات			مصدر التغير
	XY	X	Y	
$a - 1$	SPA	SSA_x	SSA_y	العامل A
$b - 1$	SPB	SSB_x	SSB_y	العامل B
$(a - 1)(b - 1)$	$SPAB$	$SSAB_x$	$SSAB_y$	التفاعل AB
$ab(n - 1)$	SPE	SSE_x	SSE_y	الخطأ
$abn - 1$	$SPTO$	$SSTO_x$	$SSTO_y$	المجموع

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$$

$$H_a: \text{ليست جميع المعالم } \alpha \text{ مساوية للصفر} \quad (23.53)$$

نستخلص من الجدول (٩-٢٣) السطرين الخاصين بالعامل A وبالخطأ. وقد تم ذلك في الجدول (٩-٢٣). ثم نستبدل بجميع المربعات للمعللة بالطريقة المعتادة:

$$SS(A + E; \text{adj.}) = (SSA_y + SSE_y) - \frac{(SPA + SPE)^2}{SSA_x + SSE_x} \quad (23.53a)$$

$$SSE(\text{adj.}) = SSE_y - \frac{(SPE)^2}{SSE_x} \quad (23.53b)$$

$$SSA(\text{adj.}) = SS(A + E; \text{adj.}) - SSE(\text{adj.}) \quad (23.53c)$$

ويتضمن الجدول (٩-٢٣) ب تحليل التباين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A . وقد خفضت درجات الحرية لكل من المجموع والخطأ بمقدار الواحد لتأخذ في الاعتبار التغير المصاحب X ، وحصلنا على درجات الحرية للمعللة لتأثيرات العامل A بالطرح.

وكالمعتاد، فإن إحصائية اختبار البدائل في (23.53) هي:

$$F^* = \frac{MSA(\text{adj.})}{MSE(\text{adj.})} \quad (23.54)$$

جدول (٢٣-١٠) تحليل تباين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A في دراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد

(أ) تحليل التباين				
بمجاميع مربعات أو جداول				
df	XY	X	Y	مصدر التغير
$a - 1$	SPA	SSA_X	SSA_Y	العامل A
$ab(n - 1)$	SPE	SSE_X	SSE_Y	الخطأ
$a + ab(n - 1) - 1$	$SPA + SPE$	$SSA_X + SSE_X$	$SSTO_Y$	المجموع

(ب) تحليل التباين			
المعدل	df المعدلة	SS المعدل	مصدر التغير
$MSA(adj.)$	$a - 1$	$SSA(adj.)$	العامل A
$MSE(adj.)$	$ab(n - 1) - 1$	$SSE(adj.)$	الخطأ
	$a + ab(n - 1) - 2$	$SS(A+E; adj.)$	المجموع

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع التوزيع $F[a - 1, ab(n - 1) - 1]$.

وبصورة مماثلة تطور اختبارات لتأثيرات العامل الآخر.

مثال

نفذ باحث في مجال البستنة تجربة لدراسة تأثيرات نوع الزهرة (عامل A : النوعان LP , WB)، ومستوى الرطوبة (عامل B : منخفض، مرتفع) على إنتاج زهور قابلة للبيع (Y). وبسبب أن الوحدات التجريبية لم تكن من الحجم نفسه، رغب الباحث في استخدام حجم الوحدة التجريبية (X) كمتغير مصاحب. وقد كُررت كل معالجة ست مرات. والبيان الإحصائي مقدم في الجدول (٢٣-١١).

وقد تم توفير نموذج الانحدار (23.50) للبيان الإحصائي باستخدام حزمة حاسب خاصة بالانحدار. ودالة الانحدار التوفيقية مبيّنة في الجدول (٢٣-١٢). وقد رسم المحلل البيان الإحصائي وخطوط الانحدار التوفيقية (غير مبيّنة هنا)، وقام بعدد من رسومات الرواسب

والاعتبارات. وعلى أساس هذه التشاخيص اقتنع بأن نموذج الانحدار (23.50) الذي يفترض دوال انحدار خطية متوازية وتباين ثابت للخطأ، هو نموذج مناسب هنا.

جدول (٢٣-١١) بيانات مثال الزهور القابلة للبيع

العامل B (مستوى الرطوبة)				
A (نوع الزهرة) العامل A				
B ₂ (مرتفع)		B ₁ (منخفض)		i
X ₀₂	Y ₀₂	X ₀₁	Y ₀₁	
10	71	15	98	النوع A ₁ LP
12	80	4	60	
14	86	7	77	
13	82	9	80	
2	46	14	95	
3	55	5	64	النوع A ₂ WB
11	76	4	55	
10	68	5	60	
2	43	8	75	
3	47	7	65	
7	62	13	87	
9	70	11	78	

وخطوط الانحدار التوفيقية للمعالجات الأربع الناتجة عن نموذج الانحدار الثام (23.50) مقدمة في الشكل (٢٣-١٠). ولدراسة طبيعة تأثيرات العوامل، نبين في الشكل (٢٣-١٠) ب الرسوم المتعادلة لمتوسطات المعالجات المقترنة. وجميع المتوسطات المقترنة هذه تقابل حجما $X = \bar{X} = 8.25$ للوحدة التحريية أو $x = 0$ وسيتم أي حجم آخر للوحدة التحريية العلاقات نفسها بالضبط التي نجدنها في الشكل (٢٣-١٠) ب، ويدلو من الشكل (٢٣-١٠) ب عدم وجود تفاعلات مهمة بين نوع الزهور ومستوى الرطوبة، وقد يكون هناك تأثيرات رئيسة لكلا العاملين، وعلى وجه الخصوص لمستوى الرطوبة.

جدول (٢٣-١٢) مخرجات الحاسب لمشيقات الانحدار لحال الزهور القليلة البيع - نموذج الانحدار (23.50)

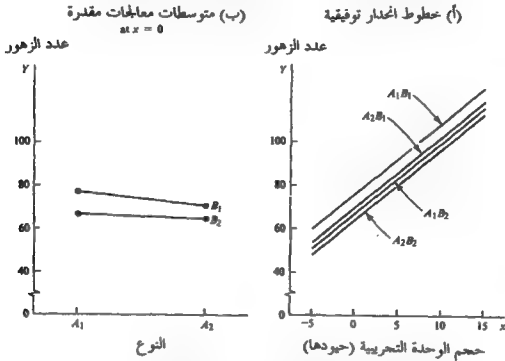
(أ) دالة الانحدار توفيقية للنموذج (23.50)			
$\hat{Y} = 70.0 + 2.04234I_1 + 3.68078I_2 + .81922I_1I_2 + 3.27688x$			
معامل الانحدار	معامل الانحدار مقدر	انحراف معياري مقدر	
α_1	2.04234	.52108	
β_1	3.68078	.51291	
$(\alpha\beta)_{11}$.81922	.51291	
γ	3.27688	.13002	
(ب) مجاميع مربعات إضافية			
التأثير	مصدر التغير	SS	df MS
التغير للمصاحب	$x I_1, I_2, I_1I_2$	3,994.52	1 3,994.52
	$I_1 x, I_2, I_1I_2$	96.60	1 96.60
	$I_2 x, I_1, I_1I_2$	323.85	1 323.85
	$I_1I_2 x, I_1, I_2$	16.04	1 16.04
	الخطأ	119.48	19 6.2884

وللدراسة تأثيرات العوامل شكَّلت نماذج مخفضة بمحذف متغير مستقل واحد في كل مرة من نموذج الانحدار (23.50)، (باعتبار أن كلا من العاملين له مستويان) ثم جرى توفيق كل من هذه النماذج المخفضة. وبمجاميع المربعات الناتجة بالإضافة إلى مجموع مربعات الخطأ للنموذج التام ودرجات الحرية ومتوسطات المربعات مقدمة جميعها في الجدول (٢٣-١٢) ب. ولا يظهر مجموع مربعات كلي لأن مركبات تأثيرات العوامل ليست متعامدة. ونختبر أولاً وجود تفاعلات باستعمال إحصاءة الاختبار المعتادة F^* ، مستعملين النتائج في الجدول (٢٣-١٢) ب:

$$F^* = \frac{SSR(I_1, I_2 | x, I_1, I_2)}{1} \div MSE = \frac{16.04}{6.2884} = 2.55$$

ومن أجل $\alpha = 0.01$ نحتاج إلى $F(99; 1, 19) = 8.18$. وبما أن $F^* = 2.55 \leq 8.18$ ، نستنتج عدم وجود تفاعلات. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.13.

شكل (٢٣-١٠) خطوط الانحدار التوافقية ورسوم متوسطات المعالجات المقترنة - مثال الزهور القابلة للبيع



ونرغب الآن في مقارنة التأثيرات الرئيسة للعامل A والتأثيرات الرئيسة للعامل B مستخدمين

فترات ثقة بمعامل ثقة عاظمي 95 بالمائة. وبما أن $\alpha_2 = -\alpha_1$ ، فلدينا في المثال هنا:

$$D_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 - (-\alpha_1) = 2\alpha_1$$

وبصورة مماثلة نحصل عند مقارنة التأثيرات الرئيسة للعامل B :

$$D_2 = 2\beta_1$$

ومن نتائج الجدول (٢٣-١٢) نحصل بسهولة على تقديرات نقطية:

$$\hat{D}_1 = 2\hat{\alpha}_1 = 2(2.04234) = 4.08$$

$$\hat{D}_2 = 2\hat{\beta}_1 = 2(3.68078) = 7.36$$

وباستخدام (1.166) نحصل بسهولة، أيضا، على الانحرافات المعيارية المقترنة:

$$s\{\hat{D}_1\} = 2s\{\hat{\alpha}_1\} = 2(5.2108) = 10.42$$

$$s\{\hat{D}_2\} = 2s\{\hat{\beta}_1\} = 2(5.1291) = 10.26$$

وستستخدم طريقة التقدير المتزامنة لبونفرونوني في حالة مقارنتين $g = 2$. ومن أجل

$$\text{معامل ثقة عائلي } 95 \text{ بالمائة، نحتاج إلى: } 2.433 = t_{(19)(9875; 19)} = t_{(1.05/2(2); 19)}$$

وهكذا تكون فترة الثقة المرغوبتين كما يلي:

$$1.5 = 4.08 - 2.433(1.042) \leq \alpha_1 - \alpha_2 \leq 4.08 + 2.433(1.042) = 6.6$$

$$4.9 = 7.36 - 2.433(1.026) \leq \beta_1 - \beta_2 \leq 7.36 + 2.433(1.026) = 9.9$$

ونستنتج، بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة، أن النوع LP يُنتج، في المتوسط، ما بين 1.5 إلى

6.6 من الزهور القابلة للبيع أكثر من النوع WB، وذلك من أجل أي حجم معطى للوحدة التحريية. وأيضاً، من أجل أي حجم معطى للوحدة التحريية، يكون العدد المتوسط للزهور القابلة للبيع في حالة مستوى منخفض للرطوبة أكبر مما يتراوح بين 4.9 إلى 9.9 زهرة منه في حالة مستوى مرتفع للرطوبة. مما يشير إلى تأثير كبير لمستوى الرطوبة على الإنتاج.

ولو كانت التفاعلات موجودة لأمكننا دراسة طبيعة تأثيرات التفاعلات بمقارنة تأثير مستوى الرطوبة، على سبيل المثال، لكل من نوعي الزهور ويمكن تبيان أن هذه المقارنة معطاة بالعلاقة :

$$L = (\alpha\beta)_{12} = -(\alpha\beta)_{11}$$

وبالتالي يمكن تقدير تأثير التفاعل المرغوب باستخدام معامل الانحدار المقدّر

$$(\hat{\alpha\beta})_{11} \text{ وانحرافه المعياري المقدّر المبيّن في الجدول (٢٣-١٢).}$$

ملاحظة

عندما تختلف أحجام العينة في الخلايا، في دراسات تباير متعددة العوامل، يبقى أسلوب الانحدار قابلاً للتطبيق لاختبار تأثيرات المعالجات إلا أن صيغ مجاميع المربعات المعدلة لا تعود مناسبة.

وينبغي استخدام حزم الحاسب الخاصة بتحليل التباير مع أحجام عينة غير متساوية في الخلايا بحذر شديد بحيث نطمئن إلى أن الحزمة تقوم بالاختبارات التي ينبغي القيام بها.

(٢٣-٦) اعتبارات إضافية في استخدام تحليل التباير

استخدام القروق

في تشكيلة من الدراسات، تتوفر لكل وحدة دراسة مشاهدة سابقة X ودراسة مشاهدة لاحقة Y على المتغير نفسه. وعلى سبيل المثال، يمكن أن تمثل الدرجة X موقف شخص تجاه

شركة قبل قراءة تقريرها السنوي، و Y الدرجة بعد قراءة التقرير. والبديل الواضح لتحليل التغير، في هذه الحالة، هو تطبيق تحليل التباين على الفروق $Y - X$. ويسمى الفرق $Y - X$ ، أحيانا، دليل استجابة، لأنه يخرج بمشاهدة واحدة من مشاهدين منفصلتين.

وإذا كان ميل خطوط الانحدار المعالجات $Y = 1$ ، فإن تحليل التغير يكون مكافئا في الأساس لتحليل التباين مطبقا على $Y - X$ ، إذ يصبح نموذج التغير (23.2) عندما يكون $Y = 1$:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + X_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (23.55)$$

ويمكن كتابته كنموذج تحليل تباين نظامي:

$$Y_{ij} - X_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (23.55a)$$

وهكذا إذا كانت وحدة تغير في X تؤدي إلى حوالي التغير نفسه في Y ، فمن المعقول القيام بتحليل تباين مطبقا على $Y - X$ بدلا من استخدام تحليل تغير، ذلك لأن تحليل التباين أسهل بكثير. إلا أنه إذا لم يكن ميل الانحدار قريبا من الواحد، فقد يكون تحليل التغير أكثر فعالية بكثير من استخدام الفرق $Y - X$.

وفي مثال ترويج البسكويت السابق لو أننا استعملنا $Y - X$ لكان ذلك فعالا. إذ كان

ذلك سينطوي على متوسط مربعات خطأ (انظر جدول ٢٣-٦):

$$\frac{SSE_Y + SSE_X - 2SPE}{12} = \frac{307.6 + 333.2 - 2(299.4)}{12} = 3.50$$

وهو عمليا نفس متوسط مربعات الخطأ $MSE(adj.) = 3.51$ لتحليل التغير. ولنتذكر أن ميل الانحدار في مثالنا كان قريبا من الواحد ($\beta = 8986$) وبالتالي كان التكافؤ التقريبي للطريقتين.

تصحيح من أجل الانحياز

نجد أحيانا من يقرح أن تحليل التغير يمكن أن يساعد في تصحيح الانحياز في بيانات الملاحظة. ففي مثل هذه البيانات يمكن أن تختلف المجموعات قيد الدراسة اختلافا بينا بالنسبة للمتغير المصاحب، ويمكن أن يسبب هذا انحيازا في مقارنة هذه المجموعات. فلنعتبر، مثلا، دراسة قورنت فيها المواقف تجاه تأمين السيارات ضد الغير وذلك في أشخاص بمقتون المخاطرة وأشخاص يرغبونها. فقد وُجد أن العديد من الأشخاص في مجموعة من بمقتون المخاطرة ينحو إلى أن يكون مسنا (50 إلى 70 سنة من العمر)، بينما ينحو العديد من

الأشخاص في مجموعة من يرغبون في المخاطرة الى أن يكونوا من الشباب 20 إلى 40 سنة من العمر) وفي حالة من هذا النوع يُنصح باستخدام تحليل تفاير يُتخذ العمر كمتغير مصاحب وذلك للمساعدة في إزاحة أي انحياز يمكن أن يوجد في بيانات المشاهدة بسبب اختلاف المجموعتين من الأعمار اختلافا كبيرا .

ومع أن هناك حاذية كبيرة في فكرة إزاحة الانحياز في بيانات مشاهدة، إلا أنه ينبغي الحذر في استخدام تحليل التباير لهذه الغاية. ففي المقام الأول، قد تتطلب المتوسطات المعدلة استيفاء خارجيا كبيرا لخطوط الانحدار إلى منطقة لا يوجد فيها نقاط مشاهدة أو يوجد القليل منها، فقط، (في مثالنا، إلى جوار الـ 45 عاما). وكثيرا ماتكون علاقة الانحدار المستعمدة في تحليل التباير غير مناسبة للقيام باستيفاء خارجي واسع. وفي المقام الثاني، يمكن أن يعتمد متغير المعالجة على المتغير المصاحب (أو العكس) مما يمكن أن يؤثر في استنباط النتائج السليمة.

الاهتمام بطبيعة تأثيرات المعالجة

يُستخدم تحليل التباير أحيانا لفرض رئيس هو إلقاء مزيد من الضوء على طبيعة تأثيرات المعالجة، وليس بمجرد زيادة دقة التحليل. وعلى سبيل المثال، قد يستخدم باحث تسويق تحليل التباير في دراسة لتأثيرات ثلاث دعايات مختلفة على السعر الأعظمي الذي يرحب المستهلكون بدفعه لقاء نوع جديد من ألواح الجدران الخارجية لمبنى خشبي، مع أخذ قيمة بيت المستهلك كمتغير مصاحب. والسبب هو أنه يهتم فعلا بالعلاقة بين قيمة المنزل والسعر الأعظمي من أجل كل من الدعايات الثلاث. ويمكن أن يكون تخفيض تباين الخطأ في هذا المثال أمرا ثانويا .

وكما في جميع تحليلات الانحدار، لابد من الحذر في استنباط أية استقرارات حول الطبيعة السببية للعلاقة بين المتغير المصاحب والمتغير التابع. وفي مثال الدعاية، من المحتمل جدا أن تتأثر قيمة بيت المستهلك إلى حد كبير بدخله. وإذا كان الأمر كذلك، فإن العلاقة بين قيمة بيت المستهلك والسعر الأعظمي الذي يرحب المستهلك بدفعه يمكن أن تكون، وإلى حد كبير، في الواقع انعكاسا لعلاقة أكثر رسوخا بين الدخل والسعر الأعظمي.

مراجع ورد ذكرها

[23.1] MINITAB Reference Manual, Release 7, State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.

مسائل

(٢٣-١) كان رد فعل طالب لمباراة المدرس بأن تحليل التباين غير مناسب عندما لا يكون الخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه، كما يلي: "يبدو لي أن هذا تخلص من مسألة تطبيقية ناجحة إذا لم تكن ميول المعالجات مختلفة، فلنستخدم نموذج تباين يسمح بميول مختلفة للمعالجات. قوم رد الفعل هذا.

(٢٣-٢) لاحظ محلل مسح عينة: عندما يُستخدم تحليل تباين لبيانات مسح، فهناك خطورة أن تكون المعالجات على صلة بالتغير المصاحب. "ما هي طبيعة المسألة؟ هل توجد المشكلة نفسها عندما تُخصص المعالجات إلى الوحدات التجريبية عشوائياً؟

(٢٣-٣) ارسم بصورة مشابهة للرسم الموجود في الشكل (٢-٧)، (في الجزء الأول من هذا الكتاب) والخاص بنموذج انحدار، طبيعة نموذج التباين (23.3) عند وجود ثلاث معالجات وتكون قيم المعالم:

$$\sigma=5, \bar{X}=70, \gamma=6, \tau_3=-10, \tau_2=-5, \tau_1=15, \mu=150$$

بين عدة توزيعات لـ Y من أجل كل معالجة.

(٢٣-٤) بالإشارة إلى مثال ترويج البسكويت فقرة (٢٣-٣). عرض طالب في مناقشته لهذه الحالة: "بعبارة دقيقة، لا يمكن أن نستنتج أي شيء عما إذا كانت الترويج الثلاثة مختلفة في فعاليتها لأنه لم يكن هناك معالجة حيادية. والفرة السابقة لاتصلح كمعالجة حيادية لأنها قد تكون اختلفت عن فرة الترويج بسبب عوامل موسمية أو ظروف فريدة أخرى" علّق.

(٢٣-٥) بالإشارة إلى مثال ترويج البسكويت فقرة (٢٣-٣) حيث تمت ثلاث مقارنات ثنائية بين تأثيرات المعالجات باستخدام طريقة شيفّه.

أ - ماذا يمكن أن تكون قيمة عامل بوتنغروني هنا لتقدير المقارنات الثلاث؟

ب - هل حصل المحلل على فترات تقدير أقل دقة بكثير باستخدام طريقة شيفه، مما يسمح له القيام بتقديرات إضافية دون تعديل التقديرات الحالية؟.

(٦-٢٣) اعرض نموذج تحليل تغاير للدراسة وحيدة العامل بأربع معالجات، وذلك عند وجود متغيرين مصاحين، ولكل منهما حد خطي وحد تربيعي في النموذج.

(٧-٢٣) بالإشارة إلى مسألة تحسين الإنتاجية (١٤-١٠). تتوفر للاقتصادى، أيضا، معلومات عن تحسين الإنتاجية السنوي في السنة السابقة ويرغب في استخدام هذه المعلومات كمتغير مصاحب. وفيما يلي البيانات عن تحسين الإنتاجية في السنة السابقة X_0 :

i	j											
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1				6.3	7.9	6.5	7.0	7.2	5.7	7.0	7.9	8.2
2	10.0	8.9	10.3	10.0	9.8	10.6	9.4	9.7	10.0	10.7	10.0	8.8
3							12.1	12.3	11.0	12.8	12.2	11.5

أ - أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.3).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية، قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

ج - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي ينبغي استخدامه لاختبار ما إذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = 0.01$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - هل يمكنك هنا القيام باختبار رسمي لما إذا كانت دوال الانحدار خطية؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما هو عدد درجات الحرية الموافق لمتوسط المربعات في مقام إحصاء الاختبار؟.

(٨-٢٣) بالإشارة إلى مسألتى تحسين الإنتاجية (١٤-١٠) و(٧-٢٣). افترض أن نموذج التغاير (23.3) مناسب.

أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣-٥). هل يبدو أن لمستويات نفقات البحث والتطوير آثار على متوسط تحسين الإنتاجية؟ ناقش.

ب - اعرض في هذه الحالة نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (23.3) استعمل المتغيرات المؤشرة 1، 0، -1، 0. اعرض، أيضا، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.

ج - قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض واختبر تأثيرات المعالجات؛ استعمل $\alpha = 0.05$ اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ملء القيمة P - للاختبار؟.

د - هل $MSE(F)$ لنموذج التباين أصغر بكثير من MSE لنموذج تحليل التباين في (١٤-١٠) ج-؟ وهل يؤثر هذا في النتيجة التي توصلت إليها حول تأثيرات المعالجات؟ هل يؤثر في القيمة P -؟.

هـ - قدر متوسط تحسن الإنتاجية لشركات نفقات البحث والتطوير فيها معتدلة وكانت قد حققت تحسنا سابقا في الإنتاجية $X = 90$ استعمل 95 بالمائة فترة ثقة.

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات، وبـ 90 بالمائة معامل ثقة عايلي، استعمل إما طريقة بونفرونوي أو طريقة شيفه أيهما أكثر كفاءة. اعرض نتائجك.

(٢٣-٩) بالاشارة إلى مسألة لون الامتصاص (١٤-١١). اقترح على الباحث أن حجم موقف السيارات يمكن أن يكون متغيرا مصاحبا مفيدا . وعدد الأماكن (X_j) في كل موقف شملته الدراسة كان كمايلي:

j					
	5	4	3	2	1
1	100	350	226	381	300
2	325	264	473	334	153
3	252	243	296	359	144

أ - أوجد الرواسب لنموذج التباين (23.3).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوزيعية. وجهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟.

ج - اعرض غودج الانحدار المعمم الذي يُراد استخدامه لاختبار ما إذا كان لخطوط

انحدار المعالجات للميل نفسه أم لا. قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.005$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

د - هل يمكنك القيام باختبار رسمي هنا لما إذا كانت دوال الانحدار خطية؟ اشرح.

(٢٣-١٠) بالإشارة إلى مسألتي لون الاستبيان (١٤-١١) و (٢٣-٩) لنفرض أن نموذج

التغاير (23.3) قابل للتطبيق.

أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣-٥). هل يبدو أن هناك تأثيرات للون

الاستبيان على معدل متوسط الاستجابة؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (23.3) في هذه الحالة

مستخدماً التقديرات للوشرة 1، 0. و اعرض، أيضاً، النموذج المخفض

لاختبار تأثيرات المعالجات.

ج - قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض واختبر تأثيرات المعالجات؛ استخدم α

10. = اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - هل $MSE(F)$ لنموذج التغاير أصغر بكثير من MSE لنموذج تحليل التباين

في المسألة (١٤-١١) ج؟ كيف يؤثر هذا في النتيجة التي توصلت إليها فيما

يتعلق بتأثيرات المعالجات؟.

هـ - قُدِّر معدل متوسط الاستجابة للاستبيانات الزرقاء في مواقف حجمها

$280 = n$ استخدم 90 بالمائة فرة ثقة.

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات، مع 90 بالمائة معامل ثقة

عائلي استخدم إما طريقة بوتفرونوي أو طريقة شيفه، أيهما أكثر كفاءة.

اعرض نتائجك.

(٢٣-١١) بالإشارة إلى مسألة معالجة إعادة التأهيل (١٤-١٢). يرغب باحث إعادة

التأهيل في استخدام عمر المريض كمتغير مصاحب. وفيما يلي أعمار المرضى

(X_i) في الدراسة:

	<i>j</i>										<i>i</i>
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
1			29.3	19.8	27.8	29.7	28.1	26.5	30.0	18.3	
2	22.9	20.2	24.7	19.7	22.1	21.5	20.0	29.2	25.2	20.8	
3					20.0	21.7	18.0	18.9	28.7	22.7	

أ - أوجد الرواسب لنموذج التباين (23.3).

ب - لكل معاملة ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

ج - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان خطوط انحدار المعالجات الميل نفسه أم لا. قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

د - هل يمكنك تنفيذ اختبار رسمي هنا يتعلق بما إذا كانت دول الانحدار خطية؟ اشرح.

(٢٣-١٢) بالإشارة إلى مسألتي معالجة إعادة التأهيل (١٤-١٢) و(٢٣-١١). افترض أن نموذج التباين (23.3) قابل للتطبيق.

أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣-٥). هل يبدو أن هناك تأثيرات لحالة الكمال الجسماني على متوسط عدد الأيام المطلوبة للمعالجة؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (23.3) في هذه الحالة، استخدم 1، -1، 0، كمستغيرات مؤشرة. اعرض، أيضاً، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.

ج - قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض واختبر تأثيرات المعالجات، استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

د - هل $MSE(F)$ لنموذج التباين أصغر بكثير من MSE لنموذج تحليل التباين في (١٤-١٢) ج؟ كيف يؤثر هذا في النتيجة التي توصلت إليها فيما يتعلق

بتأثيرات المعالجات؟ هل يؤثر في القيمة -٩٢؟

هـ - قُدر متوسط عدد الأيام المطلوبة لمعالجة مرضى كمالهم الجسماني متوسط وأعمارهم 24 سنة، استعمل 99 بالمائة فترة ثقة.

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات؛ ومع 95 بالمائة معامل ثقة عائلي، استعمل إما طريقة بونفرونوني أو طريقة شيفيه، أيهما أكثر كفاءة. اعرض نتائجك.

(٢٣-١٣) عرض مُنتج. درس صانع لأقلام ذات رأس ملبّد (تُستعمل لوضع علامات)، عن طريق تجربة، ما إذا كانت طريقة عرض جديدة مقترحة، تتميز بصورة طيب، أكثر كفاءة في محلات لبيع الأدوية وحاجات أخرى، من طريقة العرض الحالية والتميزة بصورة رياضي ومصممة لوضعها في جناح الأدوات المكتبية. وقد اختير للدراسة خمسة عشر محلا ذات مواصفات متشابهة. وقد خصصت المحلات بالتساوي للمعالجات الثلاث التالية: (١) العرض الحالي في جناح الأدوات المكتبية. (٢) عرض جديد في جناح الأدوات المكتبية، (٣) عرض جديد في منطقة المحاسبة. وقد سُحلت المبيعات (X_{ij}) مع طريقة العرض الحالية في جميع المحلات الخمسة عشر ولفرة ثلاثة أسابيع. ثم نُفذت طريقة العرض الجديد في المحلات العشرة المخصصة لها وسُحلت المبيعات (Y_{ij}) لفترة الأسابيع الثلاثة التالية في جميع المحلات الخمسة عشر. وفيما يلي بيانات المبيعات (بالدولار):

	<i>j</i>					<i>i</i>
	5	4	3	2	1	
المعالجة 1						
الأسابيع الثلاثة الأولى	65	52	74	68	92	
الأسابيع الثلاثة التالية	54	38	58	44	69	
المعالجة 2						
الأسابيع الثلاثة الأولى	79	73	70	80	77	
الأسابيع الثلاثة التالية	82	78	73	75	74	
المعالجة 3						
الأسابيع الثلاثة الأولى	71	68	81	43	64	
الأسابيع الثلاثة التالية	77	75	84	49	66	

ويرغب المهمل في تحليل تأثيرات معالجات العرض المختلفة الثلاث مستخدماً تحليل التغير (23.3).

أ - أوجد الرواسب لنموذج التغير (23.3).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوقعية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

ج - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان الخطوط انحدار المعالجات للبل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

د - هل يمكنك القيام باختبار رسمي هنا حول ما إذا كانت دوال الانحدار خطية؟ اشرح.

(٢٣-١٤) بالإشارة إلى مسألة عرض مُنتج (٢٣ - ١٤). افترض أن نموذج التغير (23.3) قابل للتطبيق.

أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣ - ٥)، هل يبدو أن هناك تأثيراً لطريقة العرض على متوسط المبيعات؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج التغير المكافئ لنموذج التغير (23.3) في هذه الحالة؛ استخدم المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0. اعرض، أيضاً، النموذج المحفّض لاختبار تأثيرات المعالجات.

ج - قم بتوقيع النموذجين المحفّض والنام واعتبر تأثيرات المعالجات؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P للاختبار؟

د - هل $MSE(F)$ لنموذج التغير أصغر بكثير من متوسط مربعات الخطأ الذي كان سيتبع لو أن نموذج التحليل التباين (14.2) قد استُخدم؟
هـ - قدّر متوسط المبيعات بطريقة عرض المعالجة 2 لمحات كانت مبيعاتها في فترة الأسابيع الثلاثة السابقة 75 دولاراً، استخدم 95 بالمائة فترة ثقة.

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات؛ استخدم إما طريقة يونفيروني أو طريقة شيفه، أيهما أكثر كفاءة، مع 90 بالمائة معامل ثقة عاظمي. اعرض نتائجك.

(٢٣ - ١٥) بالإشارة إلى مسألة العروض التقليدية (١٨-١٠) يرغب محلل في استخدام حجم للمبيعات لكل تاجر سيارات كمقياس مصاحب، وفيما يلي بيانات المبيعات (X_{ijk} مبيعات آلاف الدولارات).

$i=3$		$i=2$		$i=1$	
$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$
4.0	5.0	2.2	6.5	3.5	3.0
.8	3.1	5.4	4.1	4.2	5.1
1.9	3.2	3.1	2.2	2.2	1.0
2.8	3.2	4.5	3.7	3.1	4.4
2.2	3.0	3.6	3.4	1.3	2.7
1.9	2.9	5.0	3.0	6.6	4.9

أ - احسب الرواسب لنموذج التباين (23.49).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوقعية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعة. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ - اعرض نموذج الانحدار للمعم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان خطوط الانحدار للمعالجات الميل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.01$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ما هي القيمة p - للاختبار.

(٢٣-١٦) بالإشارة إلى مسألتين العروض التقليدية (١٨-١٠) و (٢٣-١٥). افترض أن نموذج التباين (23.49) قابل للتطبيق.

أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (23.49) في هذه الحالة استخدم المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0. قم بتوفيق هذا النموذج التام.

ب - اعرض النماذج المخفضة لاختبار التفاعل، واختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A والعامل B ، على الترتيب. قم بتوفيق هذه النماذج المخفضة.

جـ - اختبر تأثيرات التفاعل؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

د - اختبر التأثيرات الرئيسية للعامل A ؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

و - من أجل كل عامل، قم بجميع المقارنات الثنائية بين التأثيرات الرئيسية لمستوى العامل. استخدم طريقة بونفيروني مع 90 بالمائة معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

(١٧-٢٣) بالإشارة إلى مسألة تأثير النظر إلى علمسة التصوير (١٨-١٢). يُراد استخدام عمر مندوب شؤون الموظفين كمتغير مصاحب. وفيما يلي أعمار مندوبي شؤون الموظفين (٧٨):

$i = 2$		$i = 1$	
$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$
42	43	51	42
47	53	35	30
46	40	48	47
49	50	38	31
46	49	49	35

أ - أوجد الرواسب لنموذج التباين (23.49).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ - اعرض نموذج الانحدار المعمّم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه أم لا. قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

(١٨-٢٣) بالإشارة إلى مسألتنا تأثير النظر إلى علمسة التصوير (١٨-١٢) و(١٧-٢٣). افترض أن نموذج التباين (23.49) قابل للتطبيق.

- أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التفاعل (23.49) في هذه الحالة؛ استخدم المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0، قم بتوفيق هذا النموذج التام.
- ب - اعرض النماذج المحفزة لاختبار التفاعل، واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B ، على الترتيب. قم بتوفيق هذه النماذج المحفزة.
- ج - اختبر تأثيرات التفاعل؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P للاختبار؟
- د - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P للاختبار؟
- هـ - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل B ؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة P للاختبار؟
- و - قارن التأثيرات الرئيسة للجنس عن طريق 99 بالمائة فترة ثقة. فسر تقديرك بفترة.
- ز - قدر متوسط ترتيب النجاح لمدربي شؤون الموظفين الإناث اللواتي أعمارهن 40 سنة، وذلك عند تقديم الصور لمن؛ استخدم 99 بالمائة فترة ثقة.

(٢٣-١٩) بالإشارة إلى مسألتي تحسين الإنتاجية (٢٣-٧) و(٢٣-٨). يريد المحلل استخدام

الفرق بين تحسين الإنتاجية في العاملين $(Y_{ij} - X_{ij})$ كمتغير تابع وتطبيق نموذج تحليل التباين (23.55a) النظامي.

أ - أوجد جدول تحليل التباين.

ب - ما هي فعالية استخدام الفرق ونموذج التحاين النظامي هنا بالمقارنة مع استخدام نموذج التفاعل (23.3)؟ ناقش.

(٢٣-٢٠) بالإشارة إلى مسألتي عرض المنتج (٢٣-١٣) و(٢٣-١٤)، يريد المحلل استخدام

الفرق في المبيعات بين الفترتين $(Y_{ij} - X_{ij})$ كمتغير تابع وتطبيق نموذج تحليل التباين النظامي (23.55a).

أ - أوجد جدول تحليل التباين.

ب - ما هي فعالية استخدام الفرق ونموذج التحاين النظامي هنا بالمقارنة مع استخدام نموذج التباين (23.3)؟ ناقش.

تمارين

(٢٣-٢١) (في حاجة إلى حساب التفاضل والتكامل) لنرمز لـ $\tau_j + \mu$ في نموذج التباين (23.3) بـ Δ_j . استنبط مقلّري المربعات الدنيا لـ Δ_j و γ في نموذج التباين (23.3).

(٢٣-٢٢) بين أن $\{\bar{Y}_i(\text{adj.})\}$ معطى بـ (23.41).

(٢٣-٢٣) بين أن تباين مقارنة بين المتوسطات المقشّرة المعدّلة للمعالجات، معطى بـ:

$$\sigma^2(\bar{L}) = \sigma^2 \left[\sum \frac{c_i^2}{n_i} + \frac{(\sum c_i \bar{X}_i)^2}{SSE_x} \right]$$

مشاريع

(٢٣-٢٤) بالإشارة إلى مجموعة بيانات *SENIC* سنعتبر المستشفيات التالية في دراسة

لتأثيرات المنطقة (التغير 9) على متوسط طول فترة إقامة المرضى (التغير 2) مع أخذ التسهيلات والخدمات المتوفرة (التغير 12) كمُتغير مصاحب:

111 103 94 84 83 76 63 58 57 55 54 52-1

أ - أوجد الرواسب لنموذج التباين (23.3).

ب - لكل منطقة، ارسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية، جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

ج - اعرض نموذج الانحدار المعمّم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان الخطوط الانحدار الميل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدماً $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة p -لحنا الاختبار؟

(٢٣-٢٥) بالإشارة إلى مجموعة البيانات *SENIC* والمُشروع (٢٣-٢٤).

افترض أن نموذج التباين (23.3) قابل للتطبيق.

- أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣-٥)، هل يبدو أن هناك تأثيرات للمنطقة على متوسط طول فترة الإقامة في مستشفى؟ ناقش.
- ب - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (23.3) في هذه الحالة؛ استخدم المتغيرات المؤشرة 1، 0، -1، 0. واعرض، أيضا، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.
- ج - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المناطق؛ استخدم إما طريقة بونفرونوني أو طريقة شيفه، أيهما أكثر كفاءة، مع 90 بالمائة معامل ثقة عالتي اعرض نتائجك.

(٢٣-٢٦) بالإشارة إلى مجموعة البيانات *SMSSA*. سنعتبر المناطق الحضرية التالية في دراسة لتأثيرات المنطقة (عامل *A* : متغير 12) والنسبة المئوية من السكان في المدن المركزية (عامل *B* : متغير 4) على معدل الجريمة (متغير 11 مقسوما على متغير 3)، مع أخذ نسبة السكان الذين بلغوا 65 عاما فأكثر (متغير 5) من العمر كمتغير مصاحب :

1-45	49	51-54	58	60-62	64	66	71
73	80	92	101	123	130	131	

ولغايات تتعلق بدراسة تحليل التباين هذه، سنصنف النسب المئوية من السكان في المدن المركزية إلى صنفين 37.0 بالمائة أو أقل و 37.1 بالمائة أو أكثر.

- أ - أوجد الرواسب لنموذج التباين (23.49).
- ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية، جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟
- ج - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان لخطوط انحدار للمعالجات الميل نفسه، قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = 0.001$. اعرض البدائل قاعدة القرار والنتيجة، ما هي القيمة *p*- لهذا الاختبار؟

(٢٧-٢٣) بالإشارة إلى مجموعة البيانات *SMSA* والمشروع (٢٦-٢٣). افترض أن نموذج التباين (23.49) قابل للتطبيق.

- أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (23.49) في هذه الحالة استخدم المتغيرات المؤشرة 1، -1، 0. قم بتوفيق هذا النموذج الثام.
- ب - اعرض النماذج المحفظة لاختبار التفاعل واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل *A* وللعامل *B*، على الترتيب. قم بتوفيق هذه النماذج.
- ج - اختبر وجود تأثيرات التفاعل؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل قاعدة القرار، والنتيجة، ما هي القيمة *P*- للاختبار؟
- د - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للعامل *A*؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة *P*- للاختبار؟
- هـ - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للعامل *B*؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة *P*- للاختبار؟
- و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين التأثيرات الرئيسة للمناطق؛ استخدم إما طريقة بونفيرونوي أو طريقة شيفيه أيهما أكثر كفاءة، مع 95 بالمائة معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

تصميم القطاعات العشوائية - I

يُستخدم التحريب الرسمي على نطاق واسع في العلوم الاجتماعية والأحيائية (البيولوجية). وإذا نُفذ يُطبق حديثاً إلى حد ما، في ميادين مثل الأعمال والاقتصاد، إلا أننا نواجه اليوم تشكيلة واسعة من الاستخدمات في هذه الميادين، أيضاً. وأحد الأمثلة هو تجربة لتقصّي أفضل مستوى لتجميع بيانات شركة يقدّمها نظام معلومات إداري إلى مديرين من المستوى المتوسط. والآخر هو تجربة حول تأثير دخل مضمون على السلوك الاستهلاكي للأسر. وقد صُممت التجربة الأخيرة بتقسيم فئة من الأسر ذات الدخل المحدود (المنخفض) تقسيماً عشوائياً إلى نصفين: أحدهما تلقى دعماً يرفع الدخل إلى مستوى سنوي مضمون، بينما لم يلق النصف الآخر أي دعم ثم رُوِّب السلوك الاستهلاكي لكل فئة من الأسر.

وقد اعتبرنا حتى الآن تحليل بيانات تجريبية من دراسات مبنية على تصميم تام العشوائية. إلا أن هناك العديد من الأنواع الأخرى للتصاميم التجريبية المستخدمة على نطاق واسع، وسندرس في هذا الجزء التصاميم الأكثر أهمية من بينها.

ونبدأ هذا الفصل بدراسة العناصر الرئيسة لأي تصميم تجريبي والإسهامات الإحصائية نحو تصميم تجريبية فعالة. ثم تابع فيما تبقى من هذا الفصل وفي الفصل القادم تصاميم القطاع العشوائي. وفي الفصول اللاحقة، سنناقش تصاميم تجريبية أخرى مستخدمة على نطاق واسع.

(٢٤-١) تصميم تجارب

يشير تصميم تجربة إلى بنية التجربة مع الإشارة، بوجه خاص، إلى:

- ١- مجموعة المعالجات التي تشملها الدراسة.
- ٢- مجموعة الوحدات التحريية التي تشملها الدراسة.
- ٣- القواعد والإجراءات التي تُخصص بموجبها المعالجات إلى الوحدات التحريية (أو بالعكس).

٤- القياسات التي تتم على الوحدات التحريية بعد تطبيق المعالجات.

وتهتم التصميم الإحصائية للتحارب بالقواعد والإجراءات التي يتم بموجبها تخصيص المعالجات إلى الوحدات التحريية. وتُقدم الطرائقية الإحصائية، أيضاً، إسهامات إلى العناصر الأخرى للتصميم التحريي، إلا أننا سنحط الرحال بصورة رئيسة على كيفية تخصيص المعالجات إلى الوحدات التحريية بحيث يكون استخدام هذه الوحدات التحريية استعداما كفوًا .

ويمكن أن يؤدي الاستخدام غير السليم لقواعد وإجراءات تخصيص المعالجات إلى الوحدات التحريية إلى صعوبات جدية. وعلى سبيل المثال، في دراسة طبية صُممت لمقارنة معالجة قياسية بمعالجة جديدة وشديدة الخطورة، وقد تألفت الفئة التي خضعت للمعالجة الجديدة من متطوعين. وكان هؤلاء المتطوعون عند بدء الدراسة، أضعف صحياً من المرضى الذين تلقوا المعالجة القياسية. وبالرغم من حقيقة أن لكل من المعالجتين القياسية والجديدة الفعالية نفسها، إلا أن تحليل الحالة الصحية للمرضى في نهاية الدراسة أظهر فرقا مهماً بين الفئتين، بمعنى أن الحالة الصحية لفئة المعالجة الجديدة كانت أضعف. وبالتالي يكون استنتاج أن المعالجة الجديدة أقل كفاءة استنتاجاً منحازاً . ويُسمى مصدر الانحياز هنا "انحياز اختيار" لأن الوحدات التحريية لفئتي المعالجتين لم تكونا متماثلتين. ويمكن جعل انحياز الاختيار أقل ملائمة عن طريق العشوائية. وينحوا استخدام العشوائية إلى الموازنة بين الوحدات التحريية في كل فئة معالجة وذلك فيما يتعلق بالعوامل، فيما عدا المعالجة، التي تؤثر في النتيجة.

وعملية القياس هي عنصر مهم آخر في التصميم التحريية. وعلى المستوى النموذجي ينبغي لعملية القياس أن تُنتج قياسات غير منحازة ومُحكمّة. ويمكن أن

يسبب انحياز القياس صعوبات حتمية في تحليل الدراسة. ويعود المصدر المهم لانحياز القياس إلى فروق لا يمكن التعرف عليها في عملية التقويم. وعلى سبيل المثال، يمكن أن يقوم الباحث، وعن غير قصد، مجموعة من النباتات خصّصت عشوائيا إلى معالجة مبيد حشري جديد، بأنها تستجيب للمعالجة أفضل مما هي في الواقع بسبب الرغبة في إظهار المعالجة الجديدة على أنها فعّالة. وعندما تكون الوحدة التجريبية شخصا فقد يكون لمعرفة الشخص بالمعالجة أثره، أيضا، في القياس الملحوظ. وعلى سبيل المثال، عند تقويم مذاق نوع من الخضار، قد يستجيب شخص يعلم أن ماأضيف كان ملحا بصورة مختلفة عما لو لم يكن يعلم نوع الإضافة. ويمكن جعل هذا المصدر من انحياز القياس في حدوده الدنيا بإخفاء المعالجة المخصصة عن كل من العنصر التجريبي ومن يقوم بعملية التقويم. وتدعى الدراسة التي تستخدم هذا النوع من التعمية دراسة "مضاعفة التعمية". وعند إخفاء المعالجة المخصصة عن العنصر التجريبي، فقط، أو عن المقوم، فقط، تدعى الدراسة دراسة "وحيدة التعمية".

(٢٤-٢) إسهامات الإحصاء في عملية التجريب

قدم الإحصاء عددا من الإسهامات المهمة في عملية التجريب. ونستعرض باختصار أربعة من أهمها:

التجارب العملية

اعتبر هذا الإسهام في الفصل ١٨ وقد نوّهنا هناك أن الدراسات متعددة العوامل تسمح بتحليل عدد من العوامل بدقة نفسها كما لو أن التجربة بكاملها قد كرّست لدراسة عامل واحد، فقط. وبالإضافة إلى ذلك، فإن تجربة عملية بمفردها تقدم معلومات عن تأثيرات التفاعل، بينما يتطلب الأسلوب التقليدي (الكلاسيكي) أو دراسة العوامل واحدا فآخر، سلسلة من التجارب للقيام بذلك.

التكرار

يشير التكرار إلى إعادة تجربة. لنأخذ تجربة تتألف من ثلاث معالجات. فيشكل تخصيص ثلاث وحدات تجريبية عشوائيا، وحدة لكل معالجة، تكرارا واحدا

للتحربة. وبشكل تخصيص ثلاث وحدات تجريبية إضافية، بصورة عشوائية، إلى المعالجات الثلاث تكراراً ثانياً ، وهكذا دواليك.

وليست جميع الإعادات تكرارات. فلنفرض أننا درسنا خطتين تشجيعيتين لدفع الأجور واستخدمنا شركتين في الدراسة، حيث تُخصص شركة واحدة لكل خطة تشجيعية. لنفرض الآن أننا اخبرنا عشرة مستخدمين من كل شركة وقسنا إنتاجيتهم. وفيما يتعلق بهدف مقارنة خطتي الدفع التشجيعيتين، فإن الشركات هي الوحدات التحريبية، أي أن هناك تكرار واحد، فقط (شركة لكل خطة). وليس 10 (عدد المستخدمين الذين خضعوا للدراسة في كل شركة). ومع تكرار واحد، فقط، هنا لا يمكن، في الحقيقة، فصل تأثيرات خطة الدفع التشجيعية عن تأثيرات الشركة، ويُقال أن التأثيرين اختلطاً. وسوف لايسمح اختيار مستخدمين إضافيين بفصل تأثيرات خطة الدفع التشجيعية عن تأثيرات الشركة وسوف لايسمح بذلك إلا إعادة التحربة في شركات إضافية. (أي تكرار التحربة).

والتكرارات تجعل من الممكن الحصول على متوسط مربعات الخطأ وهو المقدار الذي نحتاجه لاختبار وجود تأثيرات المعالجات أو لوضع تقديرات بفترة ثقة لهذه التأثيرات، وذلك كما رأينا في فصول سابقة. ويلعب التكرار، أيضاً، دوراً ثانياً إذ يسمح بالتحكم بدقة التقديرات أو بقوة الاختبارات من خلال التصرف بحجم التكرار (حجم العينة). ومرة أخرى فقد شاهدنا هذا في فصول سابقة.

العشوائية

العشوائية في التجارب هي فكرة حديثة نسبياً ، فأول من قدمها كان الإحصائي البريطاني المشهور السير رونالد فيشر (*R.A.Fisher*). كانت المعالجات تُخصص في الماضي إلى الوحدات التحريبية على أساس نمطي أو على أساس شخصي. وقد لاحظنا سابقاً كيف يمكن أن تبرز انحيازات جدية عند استخدام الاختيار الذاتي في تخصيص الوحدات التحريبية إلى المعالجات. وتوجد المخاطر نفسها مع الاختيار النمطي أو الشخصي، ولتوضيح انحيازات اختيار كبيرة عندما تكون التخصيصات نمطية، لنأمل

تجربة تشمل عشرة مستخدمين ومعالجتين، وقد تُخصّصت المعالجة ١ لأول خمسة مستخدمين على قائمة دفع الأحمال وتُخصّصت للمعالجة ٢ للخمسة الذين يلونهم في القائمة. ولنفترض أن قائمة دفع الأحمال مُعدّة على أساس التقدّم وأن هذا التغير على صلة بالظاهرة المدروسة، ولنقل، الإنتاجية. فالمقارنة بين المعالجتين ١ و ٢ لاتعكس، فقط، الفروق بين المعالجتين. بل تعكس، أيضاً، الفروق في مقدار الخبرة بين الفئتين من المستخدمين. ويمكن أن يكون هذا الانحياز المهم جلياً إلى الحد الذي يمنع أي محرّب جيد من استخدام نوع التخصيص النمطي الموصوف آنفاً . ومع ذلك، فقد يكون هناك العديد من المصادر الأخرى للانحياز التي هي ليست على هذه الدرجة من الواضح.

ويمكن للتخصيصات الشخصية للمعالجات أن تؤدي، أيضاً، إلى انحياز اختيار، كما في الحالة التي ينحو فيها المحرّب، بصورة لاشعورية، إلى تخصيص معالجة إلى عناصر تجريبية تصنف بدرجة عالية من الغيرية أو الإنفتاح، بينما يُخصّص المعالجة الأخرى إلى عناصر أقلّ غيرية أو انفتاحاً .

ومع العشوائية تُخصّص المعالجات إلى الوحدات التجريبية عشوائياً . وتنحو العشوائية إلى الموازنة، في المتوسط، بين المعالجات، وذلك بصرف النظر عما يمكن أن يوجد من تأثيرات مُعطية، ظاهرة أو مخبأة، ويجت تقيس المقارنات بين المعالجات التأثيرات المُعرّفة للمعالجات، فقط. وهكذا تُفضي العشوائية إلى إلغاء نفوذ العوامل الخارجية التي لاتقع تحت السيطرة المباشرة للمحرّب، وتحوّل بالتالي دون تواجد انحياز الاختيار، وقد شبه كوكران وكوكس (Cochran & Cox)، (المراجع 24.1، صفحة ٨) العشوائية بعقد تأمين، من حيث أنها نوع من التدبير الوقائي ضد الانحيازات ماكان منها يمكن الوقوع وما لم يكن.

والعشوائية ليست مناسبة، فقط، لتخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية ولكنها مناسبة، أيضاً، لأية أطوار أخرى للتجربة حيث يمكن أن تتواجد تأثيرات غطية لاتقع تحت السيطرة المباشرة للمحرّب، فعلى سبيل المثال، لتختبر تجربة استخدام

فيها عشرون عنصرا وخمس معالجات (بدائل من طرق قياس احتمال ذاتي). ويمكن تناول عنصر واحد في اليوم؛ وهكذا نحتاج إلى أربعة أسابيع لإتمام التجربة. ففي حالة من هذا النوع يكون من المستحسن جدا تحديد ترتيب المعالجات بصورة عشوائية باعتبار أنه يمكن أن تتواجد تأثيرات تغطية للزمن. إذ قد يُحسّن المحرّب، مع الزمن، شرحه لطرق قياس احتمال ذاتي، أو قد توجد فترة من الطقس الحار جدا خلال أسبوع معين، وماشابه. ومع هذه التأثيرات الممكنة للزمن، يمكن أن يؤدي التخصيص النمطي لمعالجة واحدة كل أسبوع إلى نتائج منحازة انحيازاً خطئياً. وستنحو العشوائية، على الوجه الآخر، إلى الموازنة في المتوسط بين أية تأثيرات تغطية متواجدة، سواء أكانت تأثيرات متوقعة أم لا.

والنصيحة فيما يتعلق بمحتى نحتاج إلى العشوائية، إضافة إلى تخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية، لا يمكن أن تكون إلا نصيحة عامة. ومن المؤكد أنه ينبغي استخدام العشوائية حيثما يمكن لتبعات التأثيرات النمطية أن تكون تبعات حديثة. وفي توضيحنا المتعلق بطرق قياس احتمال ذاتي، لنفرض أن مجريين يقومان بتنفيذ التجربة، فمن المستحسن جدا تخصيص المجريين عشوائياً إلى التراكيب المختلفة لمعالجة مع وحدة تجريبية، إذ من المتعارف عليه وجود فروق كبيرة بين المجريين في حالات من هذا النوع، وإذا لم تكن خطورة التبعات معروفة، فالتصرف السليم هو التعشية وذلك حيثما كانت التعشية ممكنة وتكاليفها غير مرتفعة. وإذا لم يكن تنفيذ العشوائية سهلاً ولا يتوقع وجود تبعات حديثة للتأثيرات النمطية، فقد يرحب المحرّب بالإمساك عن العشوائية. وعلى أي حال لا بد للمحرّب أو للمجربة أن يدركا عندئذ أن مشروعية المقارنات بين المعالجات تعتمد على غياب أية تأثيرات تغطية حديثة.

تعليقات

١- يمكن النظر إلى مضامين العشوائية بطريقة مختلفة، إلى حد ما، عما قلّمناه حتى الآن. فالأخطاء العشوائية للوحدات التجريبية المتحاورة في الزمان أو المكان هي أخطاء مرتبطة في الغالب، وليست مستقلة، وذلك كنتيجة لتأثيرات تغطية فوق الزمان

أو المكان. ولاحمو العشوائية هذا النمط من الارتباط ولكنها، إذ نجعل فرص تجاور أي معالجتين فرصا متساوية، ننحو، مع زيادة التكرارات، إلى إلغاء الارتباطات بين المعالجات. وهكذا نجعل العشوائية تحليل البيانات، وكأن حدود الخطأ العشوائي في النموذج مستقلة، تحليلًا مقبولا، الفرض الذي ماقتنا نعتمده في جميع النماذج التي ناقشناها حتى الآن تقريبًا.

٢- في أحيان نادرة يمكن أن تقدم العشوائية غطا يقلق المجرّب، كأن تُخصّص الوحدات التحريية الأربع للمعالجة 1 أولا ثم تُخصّص الوحدات التحريية الأربع التالية للمعالجة 2. واحتمال مثل هذه الواقعة ضعيف، إلا أنه يمكن حصولها. وقد اقترحت بعض الحلول لهذه المشكلة إلا أن أيًا منها لم يقدم جوابًا نهائيًا. وفي الواقع العملي، من التقليدي أن ينبذ المجرّب متابعة عشوائية تبدو منها أخطار تأثرات تغطية في تجربة بالذات ويختار لها تعشية أخرى.

٣- يمكن أن تقدم العشوائية أساسًا للقيام باستقرايات دون الحاجة إلى أن تكون حدود الخطأ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$. ونوضح هذا في حالة تجربة وحيدة العامل، تتألف من معالجتين وثلاثة تكرارات. وفي هذه التجربة خُصّصت المعالجات إلى الوحدات التحريية عشوائيًا. لنفترض أن البيانات كانت كما يلي:

معالجة 1	معالجة 2
3	6
9	2
4	10

ولنفترض الآن النموذج البسيط التالي (يمكن تعميمه):

$$Y_{ij} = (\text{كمية تعتمد على المعالجة}) + (\text{كمية تعتمد على الوحدة التحريية}) \quad (24.1)$$

وننظر إلى كل من الكميات المتعلقة بالوحدات التحريية والكميات المتعلقة بالمعالجات على أنها مثبته. والمصدر الوحيد للعشوائية في النموذج هو التخصيص العشوائي للمعالجات إلى الوحدات التحريية. لنفترض الآن أن تأثير المعالجتين متساويان. ففي هذه الحالة كان يمكن أن تتوفر الفرصة نفسها لمشاهدة الأعداد 3, 9, 4,

من المعالجة 2، والأعداد 10, 2, 6 من المعالجة 1، باعتبار أن المعالجات قد خصصت إلى الوحدات التجريبية عشوائيا . وفي الحقيقة، إذا كان تأثيرا المعالجتين متساويين، فسيكون لأي تقسيم للملاحظات الست إلى مجموعتين من ثلاث مشاهدات فرص متساوية. وهكذا إذا لم تكن هناك أية تأثيرات للمعالجات، فسيكون لكل ترتيبه في قائمة جميع الترتيبات الممكنة الفرصة نفسها:

معالجة 2	معالجة 1
6, 2, 10	3, 9, 4
4, 2, 10	3, 9, 6
6, 4, 10	3, 9, 2
etc.	etc.

ومن ثم ننظر إلى مسألة مقارنة المعالجات كمسألة تحليل تباين وحيدة العامل ونحسب $F^* = MSTR / MSE$ لكل ترتيبية. وبذلك نحصل على توزيع المعاينة المضبوط لـ F^* عندما يكون تأثيرا المعالجتين متساويين. وقد بينت كل من الدراسات النظرية والتجريبية أن توزيع المعاينة الذي نحصل عليه بهذه الطريقة قريب من التوزيع F شريطة أن لا تكون أحجام العينات صغيرة جدا . وهكذا يمكن للعشوائية بمفردها أن تقرر استخدام الاختبار F كاختبار تقريبي جيد دون الحاجة إلى أية افتراضات عن استقلال وطبيعية حدود الخطأ.

التحكم الموضعي

والإسهام الرابع للإحصاء في التصميم هو مفهوم التحكم الموضعي الذي يُعتبر، في الغالب، مفهوما خاصا بالتصميم الإحصائي. ويهدف التحكم الموضعي إلى تخفيض الأخطاء التجريبية وجعل التجربة أكثر فعالية من خلال قيود مناسبة على تعشية المعالجات إلى الوحدات التجريبية. لننظر ثانية الدراسة الخاصة بطرق خمسة لقياس الاحتمال الذاتي، والتي ستُنفذ فوق فترة أربعة أسابيع. وقد انتابنا في مناقشتنا السابقة الظن بأن العشوائية التامة قد لا تؤدي إلى توازن تام بين المعالجات ضمن فترة الأسابيع الأربعة. أليس من الأفضل لو أننا تقيّدنا باحتواء كل أسبوع لكل من

المعالجات الخمس مرة واحدة ؟ إذا كان من المتوقع أن يكون للزمن تأثير كبير، فسيكون من المستحسن، في الحقيقة، استخدام هذا الشكل من التعشية المقيّدة، وتُسمى "التجميع في قطاعات". وبذلك تتم تعشية ترتيب المعالجات تحت القيد بأن كل معالجة تقع مرة واحدة في كل أسبوع. وسنرى لاحقاً أنه إذا كان تأثير الزمن موجوداً، فإن التجميع في قطاعات سيقود إلى نتائج أدق من نتائج العشوائية التامة بكثير.

دعنا ننظر الآن إلى المثال نفسه من وجهة نظر مختلفة قليلاً، فمع العشوائية المقيّدة ستختلف المشاهدات الخمس، في تكرار، مفردة للتحربة، فيما بينها، بسبب تأثيرات المعالجات، وبسبب تأثيرات الزمن (باعتبار أن المعالجات يمكن أن تحطّ رحالها في أي من الأسابيع الأربعة)، وهلمحراً. وإذا تقيّدنا بتنفيذ كل من المعالجات الخمس في كل أسبوع فستشكل مشاهدات أسبوع، عندئذ، تكراراً. ومن جديد ستختلف المشاهدات ضمن تكرار كهذا بسبب تأثيرات المعالجات وتشكيلة من الأسباب الأخرى، ولكن ليس بسبب أية تأثيرات للزمن من أسبوع إلى آخر. والتأخير الوحيد المتبقّي للزمن هو التأثير ضمن أسبوع واحد، وهو تأثير نتوقع أن يكون أصغر بكثير من التأثيرات بين الأسابيع. وهكذا سيُخفّض التجميع وفقاً للأسبوع من تشتت الخطأ التحريبي في حال وجود تأثير للزمن، وبهذه الطريقة نجعل التحربة أكثر فعالية.

والفائدة الأخرى للتجميع في قطاعات هو أنه يمكن أن يزيد في مدى صلاحية النتائج المستخلصة من التحربة. وبصورة عامة، يمكن جعل الأخطاء التحريبية أصغر (أي يمكن جعل تباين المركبة العشوائية أصغر) باستخدام وحدات تجريبية متشابهة، مما يقود إلى نتائج تجريبية أكثر دقة. وهكذا ففي تجربة تعلم، سينحوا استخدام أشخاص من العمر نفسه والذكاء نفسه، والخلفية الاجتماعية الاقتصادية نفسها إلى فرز أخطاء تجريبية أصغر مما لو استعملنا مجموعات غير متجانسة من الأشخاص. وعلى أي حال، كلما كانت الوحدات التحريبية أكثر تجانساً كلما صغر المدى الذي تستمر فيه صلاحية النتائج التحريبية. وعلى سبيل المثال، قد لا تكون الاستنتاجات الخاصة بأشخاص من مجموعة عمرية معينة صالحة لأشخاص من مجموعات عمرية أخرى. وهكذا كي نجعل النتائج صالحة على نطاق أوسع، ينبغي التغيير في سمات الوحدات

التحريية والتمن الذي ندفعه مقابل هذا هو دقة أقل في النتائج التحريية. ويمكن استخدام جميع الوحدات التحريية في قطاعات وفقا لمميزاتها للحصول على الكمية والتهامها، أيضا ، ونعني الحصول على تشتت كاف بين الوحدات التحريية وصولا إلى مدى واسع للصلاحيات، وفي الوقت نفسه إنجاز دقة عالية بسبب الأخطاء التحريية الصغيرة.

ويمكن أن يكون التجميع في قطاعات وفقا لمميزات الوحدات التحريية مفيدا ، على وجه الخصوص، في الأعمال والاقتصاد والعلوم الأحيائية. إذ كثيرا ماتكون الوحدات التحريية المستخدمة في هذه الميادين غير متجانسة إلى حد كبير - على سبيل المثال، أشخاص، عائلات، بلدان، مساحات حضرية. وقد يكون تجميع الأشخاص في قطاعات، وفقا للعمر أو الدخل أو تجميع البلدان في قطاعات وفقا لعدد السكان فعلا جدا في تخفيض تشتت الخطأ التحريي.

(٢٤-٣) عناصر تصميم القطاع العشوائي

وصف التصميم

تصميم قطاع عشوائي هو تصميم عشية مقيّدة تُصنف فيه الوحدات التحريية أولا إلى فئات متجانسة تدعى قطاعات ثم تُخصص المعالجات عندئذ عشوائيا ضمن القطاعات. ونوضح تصميم القطاع العشوائي باستعراض ثلاثة أمثلة.

١- في تجربة تناول تأثيرات أربعة مستويات من الإعلان في الصحف على حجم المبيعات، تشكل المدينة وحدة تجريبية، وتتوفر للدراسة ست عشرة مدينة. وهناك ارتباط عال عادة بين حجم المدينة والمتغير التابع، حجم المبيعات. ومن المستحسن تجميع المدن الست عشرة في أربع فئات تضم كل منها أربع مدن، وذلك وفقا لعدد السكان. وهكذا ستشكل المدن الأربع الأكبر القطاع ١، وهكذا، ثم تُخصص المعالجات الأربع عشوائيا إلى المدن الأربع ضمن كل قطاع، ويكون التخصيص العشوائي ضمن قطاع مستقلا عن التخصيص العشوائي ضمن قطاع آخر.

٢- في تجربة حول تأثيرات ثلاث خطط مختلفة للمكافآت التشجيعية على إنتاجية مُستخدم في شركات تجميع أجهزة إلكترونية، يشكل المستخدم وحدة تجريبية ويتوفر ثلاثون مستخدماً للدراسة. وبما أن الإنتاجية ترتبط، في هذه الحالة، ارتباطاً عالياً بالمهارة اليدوية، فمن المستحسن تجميع المستخدمين الثلاثين في عشر فئات من ثلاثة مستخدمين وذلك وفقاً للمهارة اليدوية. وهكذا تم تجميع المستخدمين الثلاثة ذوي المهارة اليدوية الأعلى في قطاع، واهتمجراً بالنسبة للمستخدمين الآخرين. وتُخصص خطط المكافآت التشجيعية الثلاث عندئذ عشوائياً إلى المستخدمين الثلاثة ضمن كل قطاع.

٣- يدرس كيميائي معدل التفاعل الخمسة كواشف كيميائية. ويمكن تحليل خمسة كواشف بصورة فعالة في اليوم الواحد. وبما أن الفروق من يوم إلى يوم يمكن أن تؤثر في معدل التفاعل، فقد استخدم كل يوم كقطاع واختبرت الكواشف الخمسة جميعها كل يوم وفق ترتيبات عشوائية ومستقلة.

وكما توضح هذه الأمثلة، فإن الهدف الرئيس لتجميع الوحدات التجريبية في قطاعات هو جعلها ضمن القطاع الواحد متجانسة قدر الإمكان بالنسبة للمتغير التابع تحت الدراسة، وجعل القطاعات المختلفة غير متجانسة قدر الإمكان بالنسبة للمتغير التابع. والتصميم الذي يتضمن فيه كل قطاع جميع المعالجات يسمى تصميم القطاع العشوائي التام. وفي الغالب سنحذف كلمة التام لأنه يتضح من السياق أن المعالجات جميعها موجودة ضمن كل قطاع.

تعليقات

١- في تصميم قطاع تام يشكل كل قطاع تكراراً للتجربة. ولهذا السبب من المستحسن جداً معالجة الوحدات التجريبية ضمن قطاع مع بعضها حيثما كان ذلك سيساعد في تخفيض تشتت الخطأ التجريبي. وكمثال يمكن أن ينحدر الجرب، مع الزمن، إلى القيام بتغييرات في تقاناته التجريبية (مثلاً، في تطبيق التجربة على العناصر) دون أن يكون واعياً لها. والمعالجة للمتعلقة للوحدات التجريبية قطاعاً بعد آخر ستسبب إلى

حفظ مصادر تغير كهذه في منأى عن التغير ضمن القطاعات، وبالتالي جعل النتائج التحريية أكثر دقة.

٢- في التحارب العاملة تكون بعض العوامل ذات الأهمية، في الغالب، خواصا مميزة للوحدات التحريية مثل الجنس، العمر، مقدار الحرة في عمل. ومع أنه لم يمر إدخال هذه العوامل لتخفيض تشتت الخطأ التحريي بل أدخلت لأنها مهمة في ذاتها، إلا أننا سنعتبر مثل هذه التحارب تصاميم قطاع عشوائي، باعتبار أن تعشية المعالجات إلى الوحدات التحريية قد قيدت بعوامل التصنيف التي أخذناها في الاعتبار.

معايير للتجميع في قطاعات

كما ذكرنا سابقا، فإن هدف التجميع في قطاعات هو تصنيف الوحدات التحريية إلى فئات تكون العناصر ضمن كل فئة منها متجانسة بالنسبة إلى المتغير التابع، وبحيث تكون الفروق بين الفئات كبيرة بالقدر الممكن. وللمساعدة في التعرف على بعض مميزات الوحدات التحريية التي تشكل معيارا مجديا للتجميع نحتاج إلى تعريف دقيق للوحدة التحريية. وينبغي أن نخصص لتعريف الوحدة التحريية كافة عناصر الحالة التحريية التي لايشملها تعريف المعالجة. فلنفرض أن المعالجة في تجربة تتألف من نوع من الخضار يحتوي على مادة مضافة معينة وتقدم في المختبر، فيمكن تعريف الوحدة التحريية عندئذ كرتبة بيت من عمر معين تخضع لمراقب معين في يوم محدد خلال جزء معين من اليوم، وتقدم الطعام من دفعة معينة من الخضار المطبوخة. ويمكن، أيضا، إضافة عناصر أخرى من واقع التجربة إلى تعريف الوحدة التحريية، الأمر الذي يفرض نفسه إذا كان يمكن لهذه العناصر أن تسبب تغيرا ملحوظا في المشاهدات. ويقترح تعريف كامل للوحدة التحريية كالتعريف الذي أعطيناه لتونا نوعين من معايير التجميع في قطاعات:

- ١- مميزات خاصة بالوحدة - من أجل أشخاص يمكن أن تكون : الجنس، العمر، الدخل، الذكاء، التحصيل الدراسي، حرة العمل، المواقف، إلخ. ومن أجل

المساحات الجغرافية يمكن أن تكون : عدد السكان، متوسط الدخل، إلخ.
٢- مميزات خاصة بواقع التجربة - المحرب، وقت القيام بالتجربة، الآلة، دفعة أو عجلة من المادة التحريرية، جهاز قياس، إلخ.

وكثيرا ما يتحكم استخدام الزمن كمتغير في قطاعات عدد من مصادر التغير، مثل خيرة المحرب، تفورات في الأجهزة، تحولات في الشروط البيئية (مثلا الطقس)، والتجميع في قطاعات وفقا للمحرب يُلغى في الغالب قدرا كبيرا من التشتت العائد للمحرب، وبصورة مشابهة كثيرا ما يكون التجميع في قطاعات وفقا للنفقات (أو المعنات) من المواد التحريرية تجميعا فعلا جدا .

ولاحاجة للاقتصار على معيار واحد للتجميع في قطاعات، إذ يمكن استخدام عدة معايير إذا كان يمكن للخطأ التحريري أن ينخفض عندئذ انخفاضاً شديداً .
وسندرس في الفصل ٢٥ استخدام أكثر من معيار واحد للتجميع في قطاعات، كما هي الحال عندما يتألف قطاع من عناصر تحريرية من فئة عمرية معينة ويتعامل معها مراقب معين. ويتطلب تصميم فعال لتحارب قطاع عشوائي المقدرة على اختيار متغيرات التجميع في قطاعات التي ستعوض تشتت الخطأ التحريري. وفي الغالب تساعد الخبرة السابقة في ميدان "مادة الموضوع" المحرب على اختيار متغيرات تجميع جيدة. وإذا كانت بعض التحارب قد نُفذت في الماضي واستُخدمت فيها متغيرات تجميع في قطاعات فيمكن تحليل تلك النتائج لتحديد فعالية متغيرات التجميع. وسنناقش طريقة تحليل مناسبة في الفقرة ٢٤-٩ للقيام بذلك. وفي غياب أية معلومات حول متغيرات تجميع فعالة يمكن تنفيذ محاولات منتظمة تُخصص بموجبه المعالجة نفسها إلى جميع الوحدات التحريرية. ومن هذه المحاولات يمكن الحصول على معلومات عن فعالية متغيرات مختلفة للتجميع في قطاعات.

ملاحظة

هناك متغير تجميع آخر يُستخدم غالبا في أبحاث علم الاجتماع ولم نذكره بعد، ونعني عنصر التجربة. ومع اتخاذ عنصر التجربة كقطاع تام تُعطى جميع المعالجات لكل عنصر تجربة. وتدعى مثل هذه التصميمات، في الغالب، تصميمات القياسات المتكررة. وبما أنها

تطوي على بعض المسائل الخاصة بها فسنناقشها منفصلة في الفصل الثامن والعشرين.

المزايا والمساوىء

مزايا تصميم القطاع العشوائي التام هي:

١- مع تجميع فعال في قطاعات يمكن أن يقدم نتائج أكثر دقة بكثير من تصميم العشوائية التامة من الحجم نفسه.

٢- يتسع التصميم لأي عدد من المعالجات والتكرارات.

٣- لا تحتاج المعالجات المختلفة إلى أحجام عينات متساوية. وعلى سبيل المثال، إذا كان حجم العينة للمعالجة الحياضية ضعف حجم عينة كل من المعالجات الثلاث، يمكن استخدام قطاعات حجمها خمسة وعندئذ يمكن تخصيص ثلاث وحدات في قطاع عشوائي إلى المعالجات الثلاث وتخصيص اثنتين إلى المعالجة الحياضية.

٤- التحليل الإحصائي بسيط نسبياً

٥- إذا اضطررنا إلى إلغاء معالجة أو قطاع بكامله من التحليل لسبب ما، كأن تكون نتائج غير سليمة، فالتحليل لا يصبح معقداً .

٦- يمكن زيادة تشتت ما بين الوحدات التحريضية بصورة متعمدة لتوسيع مدى صلاحية النتائج التحريضية دون التضحية بدقة النتائج.

والمساوىء تتضمن:

١- المشاهدات المفقودة ضمن قطاع تستدعي حسابات أكثر تعقيداً .

٢- درجات حرية الخطأ التحريضي ليست في حجم درجات حرية الخطأ التحريضي في التصميم تام العشوائية إذ تخسر درجة حرية لكل قطاع باستثناء القطاع الأول.

٣- يتطلب التصميم عدداً من الافتراضات (مثلاً ، لاتساعات بين المعالجات والقطاعات، تبين ثابت من قطاع إلى قطاع) أكبر مما هو في نموذج العشوائية التامة.

كيفية تطبيق العشوائية

إجراءات العشوائية لتصميم القطاع العشوائي ميسرة تماماً ، إذ نستخدم ضمن كل قطاع ترتيباً عشوائياً لتخصيص المعالجات إلى الوحدات التحريضية، تماماً كما في التصميم تام العشوائية. ونختار ترتيبات عشوائية مستقلة للقطاعات المختلفة.

توضيح

في تجربة لاتخاذ قرار، تعرّض المديرون التنفيذيون إلى إحدى طرق ثلاث لتكسيم أعظم رسم تأمين مستعدون لدفعه لاتقاء شيء غير مأمون. والطرق الثلاث هي طريقة المنفعة، طريقة القلق، وطريقة المقارنة. وبعد استخدام الطريقة المخصصة، طُلب من كل مدير عرض درجة الثقة في طريقة تكسيم رسم التأمين وفق تدريج يبدأ من الصفر (لا ثقة) وحتى العشرين (أعلى ثقة).

وقد استخدم خمسة عشر عنصرا في الدراسة. وقد جُمعوا في خمسة قطاعات في كل منها ثلاثة مديرين تنفيذيين، وذلك وفقا لأعمارهم. وقد تضمن القطاع 1 المديرون الأكبر سنا وهكذا.

وقد استخدم مخطط التصميم المبين في الجدول (١-٢٤) بعد استخدام خمسة ترتيبات عشوائية مستقلة في كل منها ثلاثة. ويتضمن الجدول (٢-٢٤) نتائج التجربة، ويقدم الشكل (١-٢٤) رسما بيانيا للدرجات تصنيف الثقة لكل طريقة وذلك لكل قطاع. ويبدو من الشكل (١-٢٤) أنه يوجد تشتت كبير بين القطاعات، ولكن طريقة المقارنة تتمتع بأعلى ثقة في جميع القطاعات، وأن طريقة المنفعة هي الأقل في درجة تصنيف الثقة. وناقش فيما يلي نموذجنا واسع الانتشار في التطبيق العملي لتصاميم القطاع العشوائي، كما نقدم تحليل التباين لهذا النموذج قبل القيام بالتحليل الرسمي للنتائج في مثالنا هذا.

جدول (١-٢٤) مخطط تصميم قطاع عشوائي - مثال رسم التأمين

وحدة تجريبية

1	2	3
C	W	U
C	U	W
U	W	C
W	U	C
W	C	U

القطاع 1 للمديرون الأكبر سنا

القطاع 2

القطاع 3

القطاع 4

5 (المديرون الأقل سنا)

طريقة مقارنة

طريقة القلق

طريقة المنفعة

C :

W :

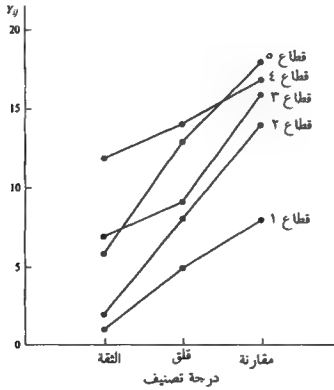
U :

جدول (٢٤-٧) نتائج تجربة رسم التأمين (درجة تصنيف الثقة على تدرج من 0 إلى 20)

قطاع i	طريقة (j)		
	قلق	مقارنة	منفعة
قطاع 1	1	5	8
قطاع 2	2	8	14
قطاع 3	7	9	16
قطاع 4	6	13	18
قطاع 5	12	14	17
التوسط	5.6	9.8	14.6

شكل (٢٤-١) تجربة رسم التأمين - رسم درجة تصنيف الثقة وفقا للقطاعات

طريقة منفعة



(٢٤-٤) نموذج تصميم القطاع العشوائي التام

يشبه الجدول (٢-٢٤) في مظهره الجدول (٢-٢١)أ، الذي يعرض بيانات دراسة ثنائية العامل بمشاهدة واحدة في كل خلية. في الحقيقة، يمكن التفكير في تصميم قطاع عشوائي تام كمقابل للدراسة ثنائية العامل (حيث القطاعات والمعالجات هما العاملان)، بمشاهدة واحدة في كل خلية. وكما لاحظنا في فقرة (٢١-١)، إذا أمكن افتراض عدم وجود تفاعل بين العاملين، فيمكن إجراء تحليل لتأثيرات العوامل عندما يكون هناك مشاهدة واحدة، فقط، في كل خلية وللعوامل تأثيرات مثبتة.

وهكذا يكون النموذج لتصميم قطاع عشوائي تام، عندما تكون كل من تأثيرات القطاع والمعالجة مثبتة، ويكون هناك n قطاعا (تكرارا) و r معالجة، كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad (24.2)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

ρ_i ثوابت خاصة بتأثيرات القطاع (الصف) وخاضعة للقيود $\sum \rho_i = 0$

τ_j ثوابت خاصة بتأثيرات المعالجة، وخاضعة للقيود $\sum \tau_j = 0$

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$j = 1, \dots, r; i = 1, \dots, n$

والملاحظات Y_{ij} في نموذج القطاع العشوائي (24.2) مستقلة وتتوزع توزيعا

طبيعيا، بمتوسط:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j \quad (24.2a)$$

وتباين ثابت:

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma^2 \quad (24.2b)$$

ونموذج القطاع العشوائي (24.2) مطابق لنموذج الالتفاعل ذي العاملين (24.1)،

فيما عدا أننا نستخدم الآن ρ_i لتأثير القطاع، τ_j لتأثير المعالجة و n تشير إلى العدد الكلي للقطاعات. لاحظ هنا أن Y_{ij} تمثل للمشاهدة الخاصة بالمعالجة j في القطاع i .

تعليقات

١- عندما يتم تجميع الوحدات التحريية طبقاً لتصنيفات محددة مثل مجموعات عمر معينة، فئات دخل، وترتيب فئات التشغيل، فتُعتبر تأثيرات القطاع ρ ، عادة، مثبتة. ويمكن النظر إلى تأثيرات القطاع، أحياناً على أنها عشوائية. على سبيل المثال، عندما يتم استخدام الملاحظين أو الأشخاص كقطاعات، فيمكن اعتبار الملاحظين أو الأشخاص بالذات الذين استُخدموا في الدراسة. عينة من مجتمع من الملاحظين أو الأشخاص. وستتطرق لحالة تأثيرات القطاع العشوائية في الفصل ٢٥.

٢- إذا كانت تأثيرات المعالجة عشوائية، فالتغير الوحيد في النموذج (24.2) هو أن τ_j تمثل الآن متغيرات طبيعية مستقلة بتوقع صفر وتباين σ_τ^2 ، وأن τ_j مستقلة عن ρ_j .

٣- يتضمن النموذج التجميعي (24.2) أن القيم المتوقعة للملاحظات في قطاعات مختلفة للمعالجة نفسها قد تختلف (مثلاً، يتجه المدبرون التنفيذيون الأكبر سناً للأخذ بدرجة تصنيف ثقة أقل لأي من طرق تحديد قيمة قسط التأمين عن المدبرين التنفيذيين الأصغر سناً)، ولكن تأثيرات المعالجات (مثلاً، كم تكون درجة تصنيف الثقة لإحدى الطرق أعلى منها لطريقة أخرى) نفسها لجميع القطاعات. وسنعتبر إمكانية تفاعل بين القطاعات والمعالجات لاحقاً في هذا الفصل.

(٢٤-٥) تحليل التباين والاختبارات

توليف نموذج قطاع عشوائي

يتم الحصول على مقترحات المربعات الدنيا لمعلم نموذج القطاع العشوائي (24.2) بالطريقة المعتادة. وباستخدام رموزنا المعتادة، نجد:

$$\mu = \bar{Y} \quad \mu. \quad (24.3a)$$

$$\hat{\rho}_i = \bar{Y}_i - \bar{Y} \quad \rho_i \quad (24.3b)$$

$$\hat{\tau}_j = \bar{Y}_j - \bar{Y} \quad \tau_j \quad (24.3c)$$

وبذلك تكون القيم التوفيقية:

$$\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{.} + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.}) + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.}) = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.} \quad (24.4)$$

وتكون الرواسب:

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{.} \quad (24.5)$$

تحليل التباين

تحليل التباين لنموذج قطاع عشوائي تام مطابق لذلك الخاص بنموذج الارتفاع لعاملين مع مشاهدة واحدة في كل عتبة، كما وصفناه في فقرة ٢١-١:

$$SSBL = r \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.})^2 = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \frac{Y^2}{rn} \quad (24.6a)$$

$$SSTR = n \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.})^2 = \sum_j \frac{Y_{.j}^2}{n} - \frac{Y^2}{rn} \quad (24.6b)$$

$$\begin{aligned} SSBL \cdot TR &= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{.})^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \sum_j \frac{Y_{.j}^2}{n} + \frac{Y^2}{rn} \\ &= \sum_i \sum_j e_{ij}^2 \end{aligned} \quad (24.6c)$$

ويرمز $SSBL$ ، هنا، لمجموع مربعات القطاعات ويرمز $SSTR$ ، كالمعتاد، لمجموع مربعات المعالجات. ويرمز $TR \cdot SSBL$ لمجموع مربعات التفاعل بين القطاعات والمعالجات، لاحظ من (24.5) أن مجموع المربعات هذا هو نفسه مجموع مربعات الرواسب، وأخيرا rn هو العدد الكلي للوحدات التحريية في الدراسة.

ويقدم الجدول (٣-٢٤) ملخصا لتحليل التباين يتضمن توقع متوسط المربعات لكل من تأثيرات المعالجات المثبتة والعشوائية. لاحظ أنه مع عدم وجود تفاعل في النموذج، يتضمن توقع متوسط المربعات الحد σ^2 ، فقط، إلى جانب حد التأثيرات الرئيسة للمعالجات أو القطاعات، كما يقتضي الحال. لاحظ، أيضا، من أعمدة $E\{MS\}$ في الجدول (٣-٢٤) أن المقام الملائم في إحصاءة F^* لاختبار تأثيرات المعالجات هو متوسط مربعات التفاعل، معمرا عنه هنا بالرمز، $TR \cdot MSBL$ ، سواء كانت تأثيرات المعالجات مثبتة أو عشوائية. وهذا هو نفس ما في الفقرة ٢١-١ لنموذج التفاعل بعاملين و $n = 1$. وبالتالي كي نختبر تأثيرات المعالجات:

تأثيرات عشوائية للمعالجات	تأثيرات مثبته للمعالجات	
$H_0: \sigma^2_\tau = 0$	H_0 : جميع τ_j مساوية للصفر	(24.7a)
$H_a: \sigma^2_\tau > 0$	ليس جميع τ_j مساوية للصفر H_a	

نستخدم إحصاء الاختبار نفسها سواء كانت التأثيرات مثبته أو عشوائية.

$$F^* = \frac{MSTR}{MSBL.TR} \quad (24.7b)$$

وتكون قاعدة القرار لضبط الخطأ من النوع الأول عند α :

$$H_0 \text{ كان } F^* \leq F[1 - \alpha; r - 1, (n - 1)(r - 1)] \text{ استتج}$$

$$H_a \text{ كان } F^* > F[1 - \alpha; r - 1, (n - 1)(r - 1)] \text{ استتج}$$

جدول (٢٤-٣) جدول تباين لتصميم قطاع عشوائي تام، تأثيرات القطاعات مثبته

$E(MSE)$		MS	df	SS	مصدر التغير
المعالجات عشوائية	المعالجات مثبته				
$\sigma^2 + \frac{r \sum \rho_i^2}{n-1}$	$\sigma^2 + \frac{r \sum \rho_i^2}{n-1}$	MSBL	$n - 1$	SSBL	قطاعات
$\sigma^2 + n\sigma^2_\tau$	$\sigma^2 + \frac{r \sum \tau_j^2}{r-1}$	MSTR	$r - 1$	SSTR	معالجات
σ^2	σ^2	MSBL.TR	$(n-1)(r-1)$	SSBL.TR	الخطأ
			$nr - 1$	SSTO	المجموع

مثال

يحتوي جدول (٢٤-٤) تحليل التباين لمثال رسم التأمين في جدول (٢٤-٢).

الحسابات مباشرة وقد تمت باستخدام أحد حزم الحاسوب. واختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

$$H_a: \text{ليس كل } \tau_j \text{ مساو للصفر}$$

نستخدم النتائج في جدول (٢٤-٤):

$$F^* = \frac{MSTR}{MSBL.TR} = \frac{1014}{2.99} = 33.9$$

ولمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ، نحتاج إلى $F(99;2,8) = 8.65$. وبما أن $F^* = 33.9 > 8.65$ ، نستنتج H_0 . أي أن متوسطات درجات تصنيف الثقة للطرق الثلاث مختلفة. والقيمة P للاختبار هي 0.0001.

تعليقات

١ - قد نرغب أحيانا ، في إجراء اختبار لتأثيرات القطاع، أيضا :

$$H_0: \text{ليس كل } \rho \text{ مساويا للصفر} \quad (24.8a)$$

$$H_a: \text{جميع التأثيرات } \rho \text{ مساوية للصفر}$$

وعلى أي حال، فالاهتمام بالمعالجات يأتي عادة في المقام الأول، وتكون القطاعات بصورة رئيسة وسائل لتخفيف تشتت الخطأ التجريبي ويشير الجدول (٢٤-٣) إلى أن الاختبار الخاص بالتأثيرات المثبتة للقطاعات يستخدم الإحصاءة:

$$F^* = \frac{MSBL}{MSBL.TR} \quad (24.8b)$$

وفي مثال قسط التأمين تكون إحصاءة الاختبار هذه:

$$F^* = \frac{42.8}{2.99} = 14.3$$

جدول (٢٤-٤) جدول تخمين لتصميم قطاع عشوائي تام - مثال رسم التأمين في الجدول ٢٤-٢.

MS	df	SS	مصدر التغير
42.8	4	171.3	قطاعات
101.4	2	202.8	طرق تحديد رسم التأمين
2.99	8	23.9	الخطأ
	14	398.0	المجموع

ولمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ نجد $F(99;4,8) = 7.01$. وبما أن $F^* = 14.3 > 7.01$ ، نستنتج أن متوسط درجات تصنيف الثقة (المتوسط مأخوذ فوق المعالجات) يختلف باختلاف القطاع.

وبما أن القطاعات تقابل عامل تصنيف، فلا بد من الحذر في تفسير مضامين تأثيرات القطاعات. وفي مثالا، على سبيل المثال، قد لا تكون تأثيرات القطاعات راجعة للعمر، مع أن العمر كان متغير التصنيف. وقد تكون درجة التحصيل الدراسي المتغير المستقل المعول عليه، مع أن التأثير يبدو وكأنه يعود للعمر، إذا كان التحصيل الدراسي للمدراء الأكبر سنا أقل من التحصيل الدراسي للمدراء الشباب.

٢ - تتضمن قوة اختبار F لتأثيرات المعالجات لتصميم القطاع العشوائي التام المعلمة اللامركزية نفسها كما في التصميم تام التعشية. وتعطي الصيغة (17.2) القياس المناسب. وعلى الرغم من الصيغة نفسها للمعلمة اللامركزية، يؤدي كل من التصميمين، بصورة عامة، إلى مستويات قوة مختلفة، حتى ولو كان حجم العينة نفسه، وذلك لسببين: إذ سيختلف أولاً تباین الخطأ التحريبي σ^2 للتصميمين، وستختلف ثانياً، درجات الحرية المصاحبة لمقام الإحصاء F^* للتصميمين.

٣ - إذا تمت دراسة معالجتين، فقط، في تصميم قطاع عشوائي تام فيمكن أن نرى بسهولة أن اختبار F لتأثيرات المعالجة المبني على إحصاءة الاختبار (24.7b) مكافئ لاختبار t ذي الجانبين للمشاهدات للزوجات المبني على إحصاءة الاختبار (1.66).

(٢٤٠-٦) تقويم مصداقية نموذج قطاع عشوائي

بما أن أهمية تفحص مصداقية نموذج إحصائي لمجموعة معطاة من البيانات قد ذكرت عدة مرات في السابق وأن تقانات التفحص هذه متشابهة، فسنكتفي هنا بتقديم نقاط قليلة، فقط، لها صلة خاصة بتصاميم قطاع عشوائي.

رسوم تشخيصية

بعض الحالات الرئيسة التي قد لا تلائم البيانات فيها نموذج القطاع العشوائي

(24.2) هي:

- ١ - عدم تساوي تشتت الخطأ من قطاع إلى آخر.
- ٢ - عدم تساوي تشتت الخطأ من معالجة إلى أخرى.

٣ - تأثيرات الزمن.

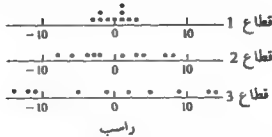
٤ - تفاعلات القطاع - المعالجة.

تمّ في الفقرة ١٦ - ١، التطرق لاستخدام رسوم الرواسب فيما يتعلق بالحالتين ٢ و ٣، وذلك عند دراستنا للتصميم تام التعشية، وتنطبق المناقشة هناك، أيضاً، على رواسب تصميم قطاع عشوائي المعطاة في (24.5).

$$e_y = Y_y - \bar{Y}_i - \bar{Y}_j + \bar{Y}_-$$

ونضيف هنا ببساطة أنه إذا كان تشتت الخطأ للمعالجات في تصميم قطاع عشوائي تام غير متساو، فيمكن دائماً تقدير الفروق بين أي معالجتين من خلال الفروق بين أزواج المشاهدات $Y_{ij} - Y_{jk}$ التي لا تتأثر بالتباينات غير المتساوية للمعالجات.

شكل (٢٠٢٤) رسوم نقطية للرواسب تلوح عدم تساوي تباينات الخطأ من قطاع إلى آخر.



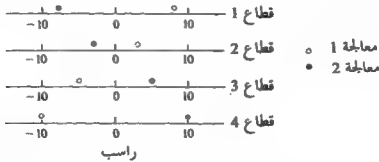
ويمكن دراسة عدم تساوي تشتت الخطأ من قطاع إلى آخر برسوم رواسب نقطية مصطفة لكل قطاع، كما هو موضح في الشكل (٢٠٢٤). تقترح الرسوم البيانية المنقطة في الشكل (٢٠٢٤) زيادة اختلافات الخطأ مع زيادة رقم القطاع. وإذا عولجت القطاعات، على سبيل المثال، وفقاً لترتيب القطاع، فقد تحدث بعض التعديلات في إجراءات العمل، مما يقود إلى تشتت خطأ تجريبي يزداد مع الزمن ويمكن استخدام اعتبارات تتعلق بتساوي التباينات كذلك المذكورة في الفقرة ١٦-٢، وذلك بغية تحديد

أكثر منهجية للنموذج، شريطة أن تكون أحجام العينات كبيرة إلى حد معقول يسمح بالتعامل مع الرواسب وكأنها مستقلة.

وإلى حد ما سيكون الكشف عن تفاعلات بين المعالجات والقطاعات أكثر صعوبة باستخدام رسوم الرواسب. ويحتوي الشكل (٢٤-٣) الرواسب لتجربة بمعالجتين في أربع قطاعات، ويقترح الانقلاب في نمط الرواسب وجود تأثيرات تفاعل، وعلى أي حال، هناك الكثير من الأنواع الأخرى الممكنة لأنماط تفاعل تبدو مختلفة اختلافا كبيرا جدا عن تلك المبينة في الشكل (٢٤-٣).

والرسم التشخيصي الآخر الذي يمكن أن يساعد في الكشف عن تأثيرات تفاعل هو رسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية وغالبا ما يقترح النمط المنحني للرواسب في رسوم كهذه وجود تأثيرات تفاعل بين القطاعات والمعالجات، ويزودنا هذا الرسم، أيضا، بمعلومات حول ثبات تباين حد الخطأ.

شكل (٢٤-٣) رسوم راسب قطعية تقترح تفاعلات قطاع - معالجة



ويبقى هناك رسم تشخيصي آخر للتفاعلات هو، في الغالب، أكثر فعالية من رسم الرواسب. وهو رسم الاستجابات Y_{ij} في مقابل المعالجات لكل قطاع. ويوضح الشكل (٢٤-١) هذا النوع من الرسوم. ويكون النقص الشديد في التوازي في رسم كهذا مؤشرا قويا إلى أن القطاعات والمعالجات تتفاعل في تأثيراتها على الاستجابة.

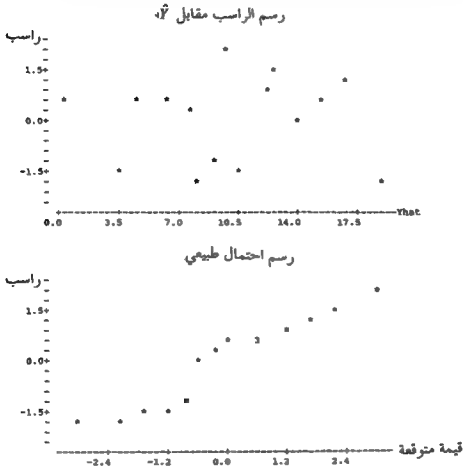
مثال. لا يعرض الشكل (١-٢٤) لمثال قسط التأمين نقصا شديدا في التوازي، مما يقترح عدم وجود تفاعل واضح بين القطاعات والمعالجات. والشكل (٤-٢٤)أ الذي يقدم رسما حاسوبيا للرواسب في مقابل القيم التوفيقية يؤدي إلى النتيجة نفسها. ولا توجد أية دلالة قوية على وجود نمط منحني هنا. وبالإضافة إلى ذلك، لا يشير الشكل (٤-٢٤)أ إلى وجود عدم تساوي جوهري بين تباينات الخطأ. ويحتوي الشكل (٤-٢٤)ب رسم احتمال طبيعي للرواسب. ولا يقترح هذا الرسم أية حيود شديدة عن التوزيع الطبيعي للخطأ. ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية يساوي 0.959، وهو يدعم هذه النتيجة. وقد أعدت رسوم راسب نقطية لكل معالجة ولكل قطاع، أيضا، (غير مبينة هنا). واقترحت تلك الرسوم أن تباينات الخطأ لا تختلف جوهريا بين المعالجات وبين القطاعات. هذه النتائج، بالإضافة إلى اختبار رسمي كانت نتيجته عدم وجود تفاعل بين تأثيرات القطاع والمعالجة (سنناقشه لاحقا)، قاد المحلل ليستنتج أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) هو نموذج مناسب للبيانات.

اختبار التجميعية لتوكي

يمكن استخدام اختبار توكي للتجميعية الذي ناقشناه في الفقرة ٢-٢١، للقيام باختبار رسمي لتأثيرات التفاعل الممكنة بين القطاعات والمعالجات، وسنوضح هذا الاختبار لمثال بيانات قسط التأمين في الجدول (٢-٢٤). ومجموع المربعات الخاص للتفاعل، ونرمز له هنا بـ $SSBL.TR^*$ ، معطى في (21.11):

$$SSBL.TR^* = \frac{\left[\sum_i \sum_j (\bar{Y}_i - \bar{Y}_\cdot)(Y_{ij} - \bar{Y}_\cdot) \right]^2}{\sum_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_\cdot)^2 \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_\cdot)^2}$$

شكل (٢٤-٤) رسوم راسب تشخيصية - مثال رسم التامين (مستطاب، مرجع، 24.2).



ونجد باستخدام البيانات في الجدول (٢-٢٤) أن البسط:

$$[(4.7-10)(5.6-10)(1)+...+(14.3-10)(14.6-10)(17)]^2 = 615.04$$

ومن النتائج في جدول (٤-٢٤)، والصيغ (24.6a) و (24.6b) نحصل على الحدين في المقام:

$$\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \frac{SSBL}{n} = \frac{171.3}{3} = 57.1$$

$$\sum (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 = \frac{SSTR}{n} = \frac{202.3}{5} = 40.56$$

وبالتالي:

$$SSBL.TR^* = \frac{615.04}{57.1(40.56)} = 27$$

وباستخدام النتائج في الجدول (٤-٢٤)، يمكن أن نحصل الآن على مجموع مربعات الراسب (21.12a) لنموذج التفاعل الخاص (21.9):

$$SSRem^* = SSTO - SSBL - SSTR - SSBL.TR^*$$

$$= 398.0 - 171.3 - 202.8 - 27$$

$$= 23.63$$

وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار (21.13):

$$F^* = \frac{SSBL.TR^*}{1} + \frac{SSRem^*}{rm-r-n}$$

$$= \frac{27}{1} + \frac{23.63}{7} = .08$$

ولمستوى معنوية $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F(.95; 1, 7)$ ، وبما أن $F^* = 08 < 5.95$ ، فنستنتج

عدم وجود تأثيرات تفاعل بين المعالجة والقطاع. والقيمة P - لهذا الاختبار 0.79.

ملاحظة

إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة، فينبغي محاولة تحويل البيانات لإزالة تأثيرات التفاعل المهمة على الأقل. والمناقشة في الفقرة ٢-٢١ مناسبة لهذه النقطة.

(٢٤ - ٧) تحليل تأثيرات المعالجات

ما أن يتم إثبات وجود تأثيرات معالجات مثبتة من خلال تحليل التباين، حتى نمضي في تحليل تلك التأثيرات كما هو موصوف في الفصل ١٥ للدراسات وحيدة

العامل، وغالباً، يمكن الحصول على نظرة أولية مفيدة لتأثيرات المعالجات من رسم احتمال طبيعي لتوسطات المعالجات المقدرة \bar{Y}_r . ويتضمن التحليل الرسمي لتأثيرات المعالجات، عادة، تقدير لواحدة أو أكثر من متضادات متوسطات المعالجات μ_r ، حيث μ_r متوسط الاستجابة للمعالجة r آخذين المتوسط فوق جميع القطاعات، وتطبق هنا، صيغ الفصل ١٥ لتقدير متضادات متوسطات المعالجات، ونرمز لتوسطات المعالجات الآن بالرمز μ_r كما نرمز لتوسطات المعالجات المقترنة بالرمز \bar{Y}_r . وحد متوسط المربعات المناسب الذي سنستخدمه في التباين المقدر للمتضادة هو $MSBL, TR$ الذي نحصل عليه من (24.6c)، باعتباره يمثل مقام الإحصاءة F^* المستخدمة لاختبار تأثيرات المعالجات المثبتة، ومضاعفات الانحراف المعياري المقدر للمتضادة هي الآن كما يلي:

$$(24.9a) \quad \text{مقارنة بمفردها} \quad d[1 - \alpha/2; (n-1)(r-1)]$$

$$(24.9b) \quad \text{طريقة توكي (لمقارنات ثنائية)} \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1 - \alpha; r, (n-1)(r-1)]$$

$$(24.9c) \quad \text{طريقة شيفه} \quad S^2 = (r-1)F[1 - \alpha; r-1, (n-1)(r-1)]$$

$$(24.9d) \quad \text{طريقة بونفيروني} \quad B = d[1 - \alpha/2g; (n-1)(r-1)]$$

مثال

كان المحلل الذي قام بدراسة رسم التأمين مقتنعاً، بناءً على تحليلات الرواسب والاختبارات، أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) مناسب للتحرية. ولذلك فقد بدأ تحليل تأثيرات المعالجات بإعداد رسم احتمال طبيعي لتوسطات المعالجات المقدرة \bar{Y}_r وهذا الرسم موضح في الشكل (٥-٢٤)، والخط المرجعي المبين في الشكل (٥-٢٤) أعطي في (15.2) وهو هنا:

$$\bar{Y} + z \left(\frac{i - 375}{r + 25} \right) \sqrt{\frac{MSBL, TR}{n}} = 10.0 + z \left(\frac{i - 375}{3.25} \right) \sqrt{\frac{2.99}{5}}$$

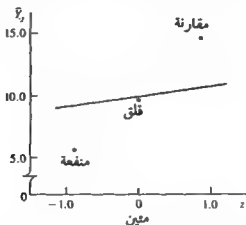
حيث $\bar{Y} = 10.0$ جدول (٢-٢٤)، $MSBL, TR = 2.99$ جدول (٤-٢٤) و $n = 5$

بسبب وقوع كل معالجة مرة واحدة في كل من خمسة قطاعات.

ويبين الرسم في الشكل (٥-٢٤) بوضوح أن تأثيرات المعالجات موجودة، ويقترح، أيضاً، وجود فروق معنوية بين كل طريقتين من طرق تكميم الحد الأقصى

لقسط التأمين، وذلك من خلال واقعة اختلاف الميول التي تصل بين كل زوج من المعالجات اختلافا مهما عن تلك الخاصة بالخط المرجعي.

شكل (٧٤ - ٥) رسم احتمالات طبيعي لموسطات المعالجات المقترنة - مثال رسم التأمين



ولتحليل تأثيرات المعالجات رسمياً، يرغب الباحث في الحصول على جميع المقارنات الثنائية بمعامل ثقة عائلي 95%، مستخدماً طريقة توكي. وباستخدام (15.25) بعد استبدال $MSBL, TR$ بـ MSE ، والنتائج في الجدول (٤-٧٤)، نحصل على:

$$S^2(\hat{D}) = MSBL, TR \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{2 MSBL, TR}{n} = \frac{2(2.99)}{5} = 1.20$$

تذكر أن كل متوسط معالجة مقترن \bar{Y}_j يتألف من n مشاهدة (واحدة من كل n قطاعاً). وباستخدام (24.9b)، نجد، بمعامل ثقة عائلي 95%.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(95; 3, 8) = \frac{1}{\sqrt{2}} (4.04) = 2.86$$

وبالتالي:

$$Ts\{\hat{D}\} = 2.86\sqrt{1.20} = 3.1$$

وهكذا نحصل من أجل المقارنات الثنائية (انظر جدول ٢-٢٤ من أجل \bar{Y}_j).

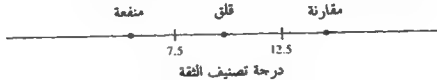
$$1.7 = (14.6 - 9.8) - 3.1 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq (14.6 - 9.8) + 3.1 = 7.9$$

$$5.9 = (14.6 - 5.6) - 3.1 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq (14.6 - 5.6) + 3.1 = 12.1$$

$$1.1 = (9.8 - 5.6) - 3.1 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (9.8 - 5.6) + 3.1 = 7.3$$

و μ_1 هنا هو متوسط درجات تصنيف الثقة لطريقة المنفعة، آخذين المتوسط فوق جميع القطاعات، و μ_2 و μ_3 هما متوسطا درجات تصنيف الثقة لطريقتي القلق والمقارنة، على الترتيب.

ونستنتج، تماما كما اقترح الشكل (٥-٢٤)، أن لطريقة المقارنة متوسط درجات تصنيف ثقة أعلى من طريقة القلق، وهذه بدورها لها متوسط درجات تصنيف ثقة أعلى من طريقة المنفعة. ومعامل الثقة العائلي لهذه المجموعة بكاملها من المقارنات هو 95%. ويلخص رسم الخط لمتوسطات المعالجات المقترنة النتائج:



(٨-٢٤) معالجات عاملية

عندما تكون المعالجات في تصميم قطاع عشوائي تراكيب في مستويات عوامل مختلفة، يمكن ببساطة كتابة نموذج التحاين الذي يبين تأثيرات العوامل بدلا من تأثيرات المعالجات. ولدينا، في حالة دراسة ثنائية العامل:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (24.10)$$

حيث للحدود في النموذج المعنى المعتاد، و (j, k) تحدد المعالجة.

وفي تحليل التباين، نبدأ، كما هو الحال دائما، بتفكيك مجموع مربعات المعالجات إلى مجاميع مربعات للتأثيرات الرئيسة للعوامل والتفاعلات. وهذا موضح في الجدول (٥-٢٤) في حالة دراسة ثنائية العامل، وللعاملين a و b من المستويات على الترتيب. وهكذا يكون العدد الكلي للمعالجات هنا هو ab ، ويتم التفكيك بالطريقة المعتادة، كما شرحنا في الفقرة (١٨-٤)، مستخدمين العلاقة (18.39):

$$SS_{TR} = SSA + SSB + SSAB$$

وتكون الصيغ (a, b, c) و (18.39) والصور البديلة لها (d, f, c) مناسبة لحساب مركبات مجاميع المربعات، متذكرين أن الدليلين الملحقين (i, j) مستخدمان لتحديد

المعالجات بدلالة تراكيب مستويات العوامل. ونقوم باعتبار تأثيرات العوامل كالمعاد، ولا نواجه أية مشاكل جديدة في تقدير التأثيرات المثبتة للعوامل.

جدول (٥-٢٤) جدول نحين للدراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي تم - نموذج قطاع عشوائي (24.10).

مصدر التغير	SS	df	MS
قطاعات	SSBL	$n - 1$	MSBL
معالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR
العامل A	SSA	$a - 1$	MSA
العامل B	SSB	$b - 1$	MSB
التفاعل AB	SSAB	$(a - 1)(b - 1)$	MSAB
الخطأ	SSBL.TR	$(n - 1)(r - 1)$	MSBL.TR
المجموع	SSTO	$nr - 1$	

ملاحظة : $r = ab$

ملاحظة

يفترض نموذج القطاع العشوائي (24.10) عدم وجود تفاعلات بين المعالجات والقطاعات ويتضمن هذا، على وجه التحديد، أن كل تفاعلات القطاع والعامل A مساوية للصفر (نرمز لها بـ $BL.A$)، وأن كل التفاعلات $BL.B$ و $BL.AB$ بالنظر مساوية للصفر. ويمكن القيام بتحليل أقل تعقيدا بفرض أن التفاعلات $BL.AB$ لقط مساوية للصفر. ولرؤية هذا، اعتبر الشكل التخطيطي للدراسة ثنائية العامل ($a = 2, b = 2$) في $n = 3$ قطاعات، كما هو مبين في الجدول (٦-٢٤). ويرمز Y_{ijk} هنا للمشاهدة في القطاع i لتركيبة العامل (j, k)، ولاحظ أن هذا الرسم التخطيطي يقابل الرسم التخطيطي لثلاثة عوامل في الجدول (٧-٢٢)، ولكن بمشاهدة واحدة، فقط، لكل خلية. ويحتوي الجدول (٣-٢٢) تحليل التباين العام للدراسة ثلاثية العامل. ومن ذلك يمكن رؤية أنه إذا كانت كل التفاعلات $BL.AB$ و $BL.AB$ تقابل ABC في الجدول

٢-٢٢) مساوية للصفر، يكون متوسط مربعات التفاعل $BLAB$ مقبلاً غير منحاز لتباين الخطأ التحريكي σ^2 ، ويُشكل بالتالي متوسط المربعات المناسب للمقام في الإحصاءة F^* لاختبار تأثيرات العوامل كافة، وهكذا، يمكن إجراء جميع الاختبارات والقيام بكل التقديرات المرغوبة في تجربة عاملية في تصميم قطاع تام بمجرد افتراض أن التفاعلات $BLAB$ مساوية للصفر. والثمن الذي دفعناه لقاء افتراضات أقل تقييداً هو درجات حرية أقل للخطأ التحريكي).

جدول (٦-٢٤) مخطط لدراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي تام

	A_2		A_1		
	B_2	B_1	B_2	B_1	
1	Y_{122}	Y_{121}	Y_{112}	Y_{111}	قطاع 1
2	Y_{222}	Y_{221}	Y_{212}	Y_{211}	قطاع 2
3	Y_{322}	Y_{321}	Y_{312}	Y_{311}	قطاع 3

جدول (٧-٢٤) جدول تحليل لدراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي تام

- نموذج القطاع العشوائي (24.11)

مصدر التغير	SS	df	MS
قطاعات (BL)	SSBL	$n - 1$	MSBL
العامل A	SSA	$a - 1$	MSA
العامل B	SSB	$b - 1$	MSB
التفاعلات AB	SSAB	$(a - 1)(b - 1)$	MSAB
التفاعلات BL A	SSBLA	$(n - 1)(a - 1)$	MSBLA
التفاعلات BL B	SSBLB	$(n - 1)(b - 1)$	MSBLB
الخطأ	SSBLAB	$(n - 1)(a - 1)(b - 1)$	MSBLAB
المجموع	SSTO	$nab - 1$	

ويكون نموذج التحاين لهذه الحالة الأقل تقييماً .

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\rho\alpha)_{ik} + (\rho\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \quad (24.11)$$

ولحدود النموذج المعنى المعتاد. وتحليل التباين لهذا النموذج معطى في الجدول (٧-٢٤)، ويمكن حساب مجاميع المربعات باستخدام الصيغ (22.21a - g) أو الصيغ الحسابية البديلة لها. وعند استخدام هذه الصيغ، تذكر أن n في هذه الصيغ (عدد المشاهدات لكل خلية) هو الآن 1. وأن عدد المستويات للقطاع (يقابل العامل C) هو n .

(٩-٢٤) تخطيط تجارب قطاع عشوائي

عدد القطاعات الضروري

إن تخطيط حجم العينة لتصميم قطاع عشوائي تام كثير الشبه بذلك الخاص بالتصميم تام التعشية. ويمكن تحديد العدد الذي نحتاجه من القطاعات n ، إما للحصول على وقاية محددة ضد ارتكاب الخطأين من النوع I والنوع II، أو للحصول على دقة محددة لمتضادات رئيسة في متوسطات للمعالجات. ومن الضروري في أي من الطريقتين، أن نخمن سلفاً مقدار تباين الخطأ التحريبي σ^2 .

أسلوب القوة. يمكن استخدام الجدول نفسه كما في التصميم تام التعشية (جدول ١٠-أ) شريطة أن لا يكون عدد المعالجات أو القطاعات صغيراً جداً، وعلى وجه التحديد، شريطة أن يكون $n(n-1) \geq 20$. ويمكن اتباع التفصيلات المذكورة في الفقرة (١٠-١٧) مباشرة.

مثال. في تجربة درجات تصنيف الثقة لثلاث طرق لتحديد رسم التأمين.

افترض أن عدد القطاعات لم يتم تحديده بعد، وأن المبرر رغب في اتقاء الخطأ وفقاً لما يلي:

- ١- ضبط الخطأ من النوع الأول عند $\alpha = 0.05$.
- ٢- إذا اختلف أي متوسطي معالجتين بمقدار 3 درجات تصنيف أو أكثر، بمعنى أنه إذا كان أقل مدى لمتوسطات للمعالجات $\Delta = 3$ ، فلن غاطرة استنتاج عدم وجود تأثيرات معالجات يجب ألا يتجاوز $\beta = 0.20$.

ويتوقع الجرب أن الانحراف المعياري للخطأ التحريبي، في حالة تصنيف المديرين وفقا للعمر، سيكون تقريبا $\sigma = 2$.

وهكذا، يمكن تلخيص الموصافات كالآتي:

$$\begin{array}{lll} \gamma = 3 & \alpha = .05 & \Delta = 3 \\ \sigma = 2 & \text{القوة} = .80 & \beta = .02 \text{ أو} \end{array}$$

ونجد باستخدام (17.5):

$$\frac{\Delta}{\sigma} = \frac{3}{2} = 1.5$$

وبدعول الجدول (١٠-أ) عند $\beta = .80$, $r = 3$, $\Delta / \sigma = 1.5$ و $\alpha = .05$ ، نجد $n = 10$. ولهذا، يحتاج الجرب إلى 10 قطاعات تقريبا في كل منها ثلاثة مديري للحصول على الوقاية المرغوبة ضد قرارات غير صحيحة.

أسلوب التقدير. إذا رغب الجرب في تحديد عدد القطاعات n بواسطة أسلوب التقدير فإنه يحتاج ببساطة إلى حساب الانحراف المعياري المتوقع لتضادات رئيسة وتعديل حجم التكرار مرة بعد أخرى حتى الوصول إلى الدقة المرغوبة. وسيستخدم الجرب، في الغالب، أسلوب مقارنة متعددة للإحاطة بالتقديرات المختلفة وفق معامل ثقة عائلي.

مثال. في توضيح رسم التأمين، يُراد استخدام أسلوب توكي لجميع المقارنات الثنائية بمعامل ثقة عائلي 95 وباستخدام $n = 10$ كنقطة بداية مع افتراض $\sigma = 2$ تقريبا سيكون التباين المتوقع لأي فرق ثنائي:

$$\sigma^2\{\hat{D}\} = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = (2)^2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = .8$$

أو $\sigma\{\hat{D}\} = .89$ وفضلا عن ذلك:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[95; r(n-1)(r-1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} q(95; 3, 18) = \frac{1}{\sqrt{2}} (3.61) = 2.55$$

وهكذا يكون نصف اتساع فترة الثقة المتوقع $T\sigma\{\hat{D}\} = 2.55(.89) = 2.3$ وإذا لم تكن هذه الدقة كافية، فينبغي استخدام عدد أكبر من القطاعات في الخطوة التالية، وينبغي استخدام عدد أقل إذا كانت الدقة أكبر مما هو ضروري.

كفاءة متغير التجميع في قطاعات

ما أن يتم إجراء تجربة قطاع عشوائي تام، حتى نرغب، في الغالب، بتقدير كفاءة متغير التجميع المستخدم، وذلك للاسترشاد به في التجارب المستقبلية. لنرمز بـ σ_r^2 لتباين الخطأ التحريبي لتصميم القطاع العشوائي. وحتى هذه النقطة، استخدمنا σ_r^2 لتباين الخطأ هذا، وبما أننا سنقارن الآن تصميمين، فنحن في حاجة لأن نكون أكثر تحديداً. لنرمز بـ σ_r^2 لتباين الخطأ التحريبي لتصميم تام التعشية. فالكفاءة النسبية للتجميع في قطاعات مقارنة بتصميم تام التعشية تُعرف عندئذٍ كالتالي:

$$E = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_d^2} \quad (24.12)$$

ويشير المقياس E إلى الزيادة في عدد التكرارات التي نحتاجها في تصميم تام التعشية بالمقارنة مع تصميم قطاع عشوائي كي يكون تباين أي متضادة مقدرة بين المعالجات هو نفسه في التصميمين.

ونعلم أن $MSBL, TR$ لتصميم قطاع عشوائي هو مقدر غير منحاز لـ σ_r^2 . والسؤال هو كيف نقدر σ_r^2 من بيانات تصميم قطاع عشوائي. وبما أن الوحدات التحريبية المستخدمة في كلي الحالتين هي الوحدات نفسها، وأنها تفترض عدم وجود تفاعل بين المعالجات والقطاعات، فيمكن تبين أن مقدرًا غير منحاز لـ σ_r^2 هو :

$$s_r^2 = \frac{(n-1)MSBL + n(r-1)MSBL, TR}{nr - 1} \quad (24.13)$$

وبالتالي نقدر E كما يلي:

$$\hat{E} = \frac{s_r^2}{MSBL, TR} = \frac{(n-1)MSBL + n(r-1)MSBL, TR}{(nr - 1)MSBL, TR} \quad (24.14)$$

وحيث أن عدد درجات حرية الخطأ التحريبي لتصميم قطاع عشوائي لا يكون كبيرًا كما في حالة تصميم تام التعشية، فإن E يبالغ قليلاً في تعبيره عن الكفاءة لأنه يأخذ في الاعتبار، تباينات الخطأ، فقط. ولأخذ هذه المبالغة في الاعتبار، فقد اقترحت عدة مقاييس معقدة للكفاءة. وما لم يكن عدد درجات حرية الخطأ التحريبي لكل من

التصميمين صفرا جدا فسيكون لتلك التعديلات تأثير طفيف. وأحد التعديلات شائعة الاستخدام، والقابلة للتطبيق عند تقويم أي تصميم بالنسبة لآخر هو :

$$\hat{E}' = \frac{(df_2 + 1)(df_1 + 3)}{(df_2 + 3)(df_1 + 1)} \hat{E} \quad (24.15)$$

حيث df_1 يمثل درجات حرية الخطأ التجريبي في التصميم الأساس (تصميم تام العشبية، في حالتنا)، ويرمز df_2 لدرجات حرية الخطأ التجريبي في التصميم المراد تقويم كفاءته (تصميم قطاع عشوائي، في حالتنا).

مقال. سنقوم كفاءة التجميع في قطاعات وفقا لأعمار المديرين في مثال رسم التأمين. ويوضح النتائج المناسبة من الجدول (٢٤-٤) في مقياس الكفاءة (24.14) نحصل على:

$$\hat{E}' = \frac{4(42.8) + 5(2)(2.99)}{14(2.99)} = 3.8$$

وهكذا، ففي تصميم تام العشبية، كنا سنحتاج تقريبا إلى تكرار كل معالجة خمسة أضعاف كي تنجز لأي متضادة مقسمة التباين نفسه الذي نحصل عليه عند التجميع في قطاعات وفقا للعمر.

ومن الواضح هنا أن التجميع في قطاعات وفقا للعمر كان ذا كفاءة عالية.

ولو استخدمنا مقياس الكفاءة المعدل (24.15) لكنا سنجد:

$$\hat{E}' = \frac{(8+1)(12+3)}{(8+3)(2+1)} (4.8) = 4.5$$

وبالطبع لا تختلف هذه النتيجة كثيرا عن تلك التي حصلنا عليها باستخدام (24.14).

ملاحظة

يصبح مقياس الكفاءة \hat{E} في (24.14) مساويا للواحد إذا كان $MSBL = MSBL. TR$ ، ويكون أكبر من 1 إذا كان $MSBL > MSBL. TR$. كما يكون أقل من 1 إذا كان $MSBL < MSBL. TR$ ، وبما أن إحصاء الاعتبار لتأثيرات القطاع في (24.8b) هي $F^* = MSBL / MSBL. TR$ ، فيتبع عن ذلك أن يتحقق التجميع الجيد أو الناجح في قطاعات عندما تتجاوز F^* الواحد بكثير.

تحليل التباير كبديل للتجميع في قطاعات

هناك أحيانا اختيار بين (١) تصميم تام التعشية مع تحليل تباير مستخدم لتخفيض الأخطاء التحريية و (٢) تصميم قطاع عشوائي، تشكل القطاعات فيه وفقا للمتغير للمصاحب، وبصفة عامة، فإن البديل الأخير هو المفضل.

وهناك عدة أسباب لهذا:

١- إذا كان الانحدار خطيا فلتصاميم القطاع العشوائي وتحليل التباير الكفاءة نفسها تقريبا . وإذا كان الانحدار غير خطي ولكن تم استخدام تحليل تباير بعلاقة خطية، فسينحو تحليل التباير مع تصميم تام التعشية إلى أن يكون أقل فعالية (أو كفاءة) من تصميم قطاع عشوائي.

٢- الحسابات في تصاميم قطاع عشوائي أبسط من تلك الخاصة بتحليل التباير.

٣- نخلو تصاميم القطاع العشوائي، أساسا، من أية افتراضات حول طبيعة العلاقة بين متغير التجميع في قطاعات والمتغير التابع، بينما يفترض تحليل التباير صيغة محددة لهذه العلاقة.

وأحد عيوب تصاميم القطاع العشوائي هو، إلى حد ما، توفر عدد من درجات الحرية للخطأ التحريي أقل مما في حالة تحليل التباير مع تصميم تام التعشية. وعلى أي حال ففي جميع التجارب، باستثناء التجارب ذات الحجم الصغير، يكون تأثير هذا الفرق في درجات الحرية على دقة التقديرات تأثيرا طفيفا .

(١٠-٢٤) أسلوب الانحدار لتصاميم قطاع عشوائي

لنأخذ نموذج التحاين (24.2) لتصميم قطاع عشوائي بتأثيرات مثبتة لكل من

القطاع والمعالجة، وهو النموذج:

$$Y_{ij} = \mu. + \rho_j + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (24.16)$$

$$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$$

فيمكن التعبير عن هذا النموذج مباشرة في صيغة نموذج انحدار مع متغيرات مؤشرة تتخذ القيم 0، -1، 1. ويمكن كتابة نموذج الانحدار لمثال رسم التأمين في الجدول

(٢-٢٤) مع $r = 3$ معالجات و $n = 5$ قطاعات، كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu + \underbrace{\rho_1 X_{ij1} + \rho_2 X_{ij2} + \rho_3 X_{ij3} + \rho_4 X_{ij4}}_{\text{تأثير قطاع}} + \underbrace{\varepsilon_1 X_{ij5} + \varepsilon_2 X_{ij6}}_{\text{تأثير معاملة}} + \varepsilon_{ij}$$

حيث:

$$X_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التحريية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التحريية من القطاع 5} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ونعرف بصورة مماثلة المتغيرات $X_{ij4}, X_{ij3}, X_{ij2}$

$$X_{ij5} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التحريية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التحريية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij6} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التحريية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التحريية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ومتجه المشاهدات Y والمصفوفة X لمثال رسم التأمين مبيان في الجدول (٢٤-٨).

لاحظ، على سبيل المثال، أن المتغيرات للوشرة تتخذ القيم التالية من أجل المشاهدة Y_{13} .

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 0 \quad X_3 = 0 \quad X_4 = 0 \quad X_5 = -1 \quad X_6 = -1$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} Y_{13} &= \mu + \rho_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_{13} \\ &= \mu + \rho_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_{13} \end{aligned}$$

$$\text{لأن: } \varepsilon_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

الاختبارات وتقديرات تأثيرات المعالجات باستخدام أسلوب الانحدار تتبع بسهولة وسوف نناقشها هنا.

جدول (٨-٢٤) مصفوفات البيانات لنموذج الانحدار (24.17) للواقع لبيانات رسم العين في الجدول (٧-٢٤).

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$Y_{11}=1$	1	1	0	0	0	1
$Y_{12}=5$	1	1	0	0	0	0
$Y_{13}=8$	1	1	0	0	0	-1
$Y_{21}=2$	1	0	1	0	0	1
$Y_{22}=8$	1	0	1	0	0	0
$Y_{23}=14$	1	0	1	0	0	-1
$Y_{31}=7$	1	0	0	1	0	1
$Y_{32}=9$	1	0	0	1	0	0
$Y_{33}=16$	1	0	0	1	0	-1
$Y_{41}=6$	1	0	0	0	1	1
$Y_{42}=13$	1	0	0	0	1	0
$Y_{43}=18$	1	0	0	0	1	-1
$Y_{51}=12$	1	-1	-1	-1	-1	1
$Y_{52}=14$	1	-1	-1	-1	-1	0
$Y_{53}=17$	1	-1	-1	-1	-1	-1

(١١-٢٤) تحليل التباين لتصاميم قطاع عشوائي

يمكن استخدام تحليل التباين لمزيد من التخصيص في تشتت الخطأ التجريبي في تصميم قطاع عشوائي. والتعميم هو تعميم مباشر لتحليل التباين في حالة تصميم تام التعشية. نموذج التباين أعطي النموذج المتعاد لتصميم القطاع العشوائي في (24.2):

$$Y_{ij} = \mu. + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad (24.18)$$

$\dots, n; j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, n$

ونحصل، ببساطة، على نموذج التغيرات لتصميم قطاع عشوائي، متغير مصاحب واحد بالإضافة حد (أو عدة حدود) من أجل العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغير المصاحب X . وبافتراض أنه يمكن وصف هذه العلاقة بواسطة دالة خطية، نجد:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \gamma(X_{ij} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ij} \quad (24.19)$$

$$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$$

أسلوب الانحدار

لا يتطوّر أسلوب الانحدار لنموذج التغيرات (24.19) على أية مبادئ جديدة. وكما في الفصل ٢٣، سنرمز لـ $X_{ij} - \bar{X}_{..}$ في نموذج التغيرات (24.19) بالرمز x_{ij} :

$$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_{..} \quad (24.20)$$

وفضلاً عن ذلك، سنستخدم مرة أخرى 1، -1، 0، كمستويات مؤشرة خاصة بتأثيرات القطاع والمعالجة.

افترض في دراسة تصميم قطاع عشوائي تام أنه تم استخدام $n = 4$ قطاعات، $r = 3$ معالجات. فيكون نموذج الانحدار المقابل لنموذج التغيرات (24.9) عندئذ:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_1 I_{j1} + \rho_2 I_{j2} + \rho_3 I_{j3} + \tau_1 I_{i1} + \tau_2 I_{i2} + \gamma_{23} + \varepsilon_{ij} \quad (24.21)$$

حيث:

$$I_{j1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 4} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{j2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 4} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{j3} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 4} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{40} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{45} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ولاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \tau_j \text{ مساوية للصفر}$$
(24.22)

وسوف نحتاج إما إلى توفيق النموذج المخفض تحت H_0 :

$$Y_{ij} = \mu. + \rho_1 I_{41} + \rho_2 I_{42} + \rho_3 I_{43} + \gamma_{2j} + \varepsilon_{ij} \quad (24.23)$$

أو إلى استخدام بمجاميع المربعات الإضافية المناسبة. ويمكن عندئذ اختبار تأثيرات المعالجات بالطريقة المعتادة.

ومن السهل القيام بمقارنات بين تأثيرات معالجتين باستخدام أسلوب الانحدار.

فلتقدير $\tau_1 - \tau_2$ على سبيل المثال، نستخدم التقدير غير المنحاز $\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$ القائم على معاملات الانحدار المقطرة التي حصلنا عليها عند توفيق النموذج التام (24.21). ويكون التباين المقدر لهذا المقدّر:

$$s^2 \{ \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 \} = s^2 \{ \hat{\tau}_1 \} + s^2 \{ \hat{\tau}_2 \} - 2s \{ \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \} \quad (24.24)$$

ويمكن عندئذ استخدام مصفوفة التباين والتغاير المقطرة لمعاملات الانحدار المتوفرة على مطبوعة الحاسب لتزويدنا بالتباينات المقطرة والتغايرات المقطرة التي نحتاجها.

مراجع ورد ذكرها

- [24.1] Cochran, W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1957.
- [24.2] MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa. : Minitab, Inc., 1989.

مسائل

- (١-٢٤) اعط مثالاً للدراسة تجريبية لا تشكل الإعادة فيها تكراراً .
- (٢-٢٤) في تجربة للدراسة تأثرت موضع العرض المُنتج ما في سلسلة من المحلات أعداد مدير أحد المحلات ترتيب عرض منتجات أخرى بحيث يزيد من تدفق المارة عند العرض التجريبي. هل يؤدي هذا الفعل إلى انخياز في الاختبار أم إلى انخياز في القياس؟ ناقش.
- (٣-٢٤) في دراسة عن تأثير حجم فريق على مقدار الاتصالات ضمن الفريق، هل يمكن استخدام أسلوب ثنائي التعمية؟ أسلوب وحيد التعمية؟ ناقش.
- (٤-٢٤) علق أحد الدارسين في مجموعة نقاش "تستخدم التبادل العشوائية لتخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية في تصميم قطاع عشوائي تماماً كما في التصميم تام العشوائية. وبالتالي ليس هناك فرق أساسي بين هذين التصميمين" علق.
- (٥-٢٤) أ - ماذا يمكن أن تكون بعض المتغيرات المفيدة للتجميع في قطاعات وذلك في تجربة حول تأثيرات مستويات أسعار مختلفة على مبيعات مُنتج ما، مستخدماً المحلات كوحدات تجريبية؟
- ب - ماذا يمكن أن تكون بعض المتغيرات المفيدة للتجميع في قطاعات وذلك في تجربة حول تأثيرات الواجهات الملاحية الجوية المختلفة على معنويات الأطعم الملاحية، مستخدماً الأطعم الملاحية كوحدات تجريبية؟
- ج - ماذا يمكن أن تكون بعض المتغيرات المفيدة للتجميع في قطاعات في تجربة حول تأثيرات عقاقير مختلفة على سرعة الاستجابة لمنشط، مستخدماً الحيوانات المعملية كوحدات تجريبية؟
- (٦-٢٤) تمت دراسة خمس معالجات في تجربة تصميم قطاع عشوائي تام مستخدماً أربعة قطاعات. حدد تخصيصات المعالجات عشوائياً للوحدات التجريبية.

(٧-٢٤) تمت دراسة معالجتين ومعالجة حيادية في تجربة تصميم قطاع عشوائي تام وقد استُخدمت خمسة قطاعات يحتوي كل منها على أربع وحدات تجريبية. وفي كل قطاع، يتم تخصيص كل معالجة لوحدة تجريبية واحدة، ويتم تخصيص المعالجة الحيادية لوحدين تجريبيين - حدد تخصيصات المعالجات عشوائيا للوحدات التجريبية.

(٨-٢٤) لتدريب مراجع حسابات. قامت إحدى شركات المحاسبة، وقبل إدخالها لبرنامج تدريب واسع في الشركة تتعلق بالمعانة الإحصائية في مجال مراجعة الحسابات باختبار ثلاث طرق لتدريب : (١) الدراسة في المنزل مع مواد تدريبية مبرجة، (٢) دورات تدريبية في مكاتب محلية ومدربين محليين. و(٣) دور قنترينية في شيكاغو يشرف عليها مدربون على المستوى القومي. وقد صُنف ثلاثون مراجعا في 10 قطاعات من ثلاثة مراجعين، وذلك وفقا للزمن المنصرم منذ التخرج من الكلية، وتم تخصيص المراجعين في كل قطاع لطرق التدريب الثلاث عشوائيا. وفي نهاية التدريب طُلب من كل مراجع تحليل حالة معقدة تنطوي على تطبيقات إحصائية، وقد تم الحصول على مقياس مهارة، بناء على هذا التحليل، لكل مراجع. كانت النتائج (يحتوي القطاع 1 المراجعين الأحدث تخرجاً ويحتوي القطاع 10 المراجعين الأقدم تخرجاً).

قطاع				طريقة تدريب			
				طريقة تدريب	قطاع		
					3	2	1
				i	3	2	1
86	75	73	6	92	81	73	1
88	72	68	7	89	78	76	2
82	74	64	8	87	76	75	3
81	73	65	9	90	77	74	4
78	69	62	10	88	71	76	5

أ - لماذا، في اعتقادك، استُخدم متغير "الزمن المنصرم منذ التخرج من

الكلية" كمتميز لجميع في قطاعات؟

ب - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (24.2) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية، جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ما هي استنتاجاتك؟

ج - ارسم الاستجابة ولا وفقاً للقطاعات وذلك في هيئة الشكل (١-٢٤).

ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افراض اللاتفاعل هنا؟

د - قم باختبار توكي الخاص بتجميعية تأثيرات القطاعات وتأثيرات المعالجات، استخدم $\alpha = 0.01$ ، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

(٩-٢٤) بالإشارة إلى مسألة (٨-٢٤) لتدريب مراجع حسابات. افترض أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات المعالجات المقدرّة. هل تبدو متوسطات المعالجات مختلفة جوهرياً هنا؟

ج - اختر ما إذا كان متوسط المهارة نفسه لطرق التدريب الثلاث أم لا. استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

د - قم بجمع المقارنات الثنائية بين متوسطات طرق التدريب، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عايلي 90% اعرض استنتاجاتك.

هـ - اختر ما إذا كانت تأثيرات القطاع موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ واكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

(١٠-٢٤) الدهن في هيئات غذائية، درس أحد الباحثين تأثيرات ثلاث حميات غذائية تجريبية مختلفة في محتوياتها الدهنية على مستوى الشحوم الكلي في البلازما. ومستوى الشحوم الكلي مستخدم على نطاق واسع للتنبؤ بأمراض القلب التاجية. وقد صنّف خمسة عشر شخصاً من الذكور، الذين يقع وزنهم في

حدود 20% من وزن الجسم المثالي، في خمسة قطاعات وفقا للعمر، وضمن كل قطاع، تُخصّصت الحميات التحريرية الثلاث عشوائية للأشخاص الثلاثة، وفيمايلي بيانات التخفيض في مستوى الشحوم (بالغرام لكل لتر) بعد أن وضع الأشخاص تحت الحمية لفترة مثبتة من الزمن.

مستوى الشحوم للحمية

قطاع i	$j = 1$ منخفض جدا	$j = 2$ منخفض بصورة مقبولة	$j = 3$ منخفض بصورة معتدلة
1 العمر 15 - 24	.73	.67	.15
2 العمر 25 - 34	.86	.75	.21
3 العمر 35 - 44	.94	.81	.26
4 العمر 45 - 54	1.40	1.32	.75
5 العمر 55 - 65	1.62	1.41	.78

أ - لماذا، في اعتقادك، استخدم عمر الشخص كمتغير لجميع في قطاعات؟

ب - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (24.2) وارسمها في مقابل القيم التوافقية - قم، أيضا، برسم احتمال طيعي للرواسب. ما هي استنتاجاتك؟

ج - ارسم الاستجابة y_i وفقا للقطاعات وذلك في هيئة الشكل (٢٤-١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افتراض اللاتغاير هنا؟

د - قم باختبار توكي الخاص بتجمعية تأثيرات القطاع وتأثيرات المعالجة، استخدم $\alpha = 0.1$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

(٢٤-١١) بالإشارة إلى المسألة (٢٤-١٠) اللهن في الحميات. افترض أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقترنة للمعالجات. هل تبدو

متوسطات المعالجات مختلفة جوهرياً هنا؟

ج - اختر ما إذا كان متوسط التخفيضات في مستوى الشحوم مختلف

للحميات الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل قاعدة

القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟.

د - قلّر $D_1 = \mu_1 - \mu_2$ و $D_2 = \mu_2 - \mu_3$ مستخدماً طريقة بونفيروني

بمعامل ثقة عالمي 95% اعرض استنتاجاتك.

هـ - اختر ما إذا كانت تأثيرات القطاع موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$.

اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

و - لم تُستخدم حمية قياسية في تلك التجربة كمعالجة حيادية. ما هي في

اعتقادك السررات التي قد يعطيها الباحث حول عدم استخدامه

معالجة حيادية هنا لأغراض المقارنة؟.

(٢٤-١٢) ألم الأسنان. قام اختصاصي تخدير بدراسة مقارنة لتأثيرات الوخز بالإبر

والكوداين على الألم الذي يعقب عمليات الأسنان عند الأشخاص

الذكور، وكانت المعالجات الأربع: (١) معالجة بلاسيبو: كبسولة سكر

ووخرتين غير نشطتين بالإبر A_1B_1 (٢) معالجة الكوداين، فقط - كبسولة

كوداين ووخرتين غير نشطتين بالإبر A_2B_1 (٣) معالجة الوخز بالإبر، فقط

- كبسولة سكر ووخرتين نشطتين بالإبر A_1B_2 (٤) معالجة كوداين ووخرتين

بالإبر - كبسولة كوداين ووخرتين نشطتين بالإبر A_2B_2 . وقد صُنّف اثنان

وثلاثون شخصاً في ثمانية قطاعات من أربعة وفقاً لتقويم مبدئي عن

مستوى قدرتهم على تحمل الألم. وخصّص عندئذ الأشخاص في كل

قطاع عشوائياً للمعالجات الأربع. وقد تم الحصول على درجات تخفيف

الألم لجميع الأشخاص بعد ساعتين من معالجة سنية. وجمعت البيانات

على أساس ثنائي التعمية، وفيما يلي بيانات درجات تخفيف الألم (الدرجة العالية لتخفيف الألم تقابل المعالجة الأكثر فعالية).

قطاع i	المعالجة (j, k)			
	A_2B_2	A_1B_2	A_2B_1	A_1B_1
الأدنى 1	1.2	.6	.5	0.0
2	1.3	.7	.6	.3
3	1.6	.8	.8	.4
4	1.5	.9	.7	.4
5	1.9	1.5	1.0	.6
6	2.3	1.6	1.4	.9
7	2.1	1.7	1.8	1.0
الأعلى 8	2.4	1.6	1.7	1.2

أ - لماذا، في اعتقادك، استُخدمت الفترة على تحمل الألم كمتغير لجميع
في قطاعات؟

ب - أي الافتراضات التي يتضمنها نموذج القطاع العشوائي (24.10) أكثر
أهمية بالنسبة لك هنا؟

ج - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (24.10) وارسمها في
مقابل القيم التوفيقية. جَوِّزْ، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب،
ماهي استنتاجاتك؟

د - ارسم الاستنتاجات γ_{ijk} وفقاً للقطاعات وذلك في هيئة الشكل
(٢٤-١)، متجاهلاً البنية العاملية للمعالجات، ماذا يقترح هذا
الرسم حول صلاحية افراض اللاتفاعل هنا؟

هـ - قم باختيار توكي الخاص بتجميعية تأثيرات القطاع والمعالجة،
متجاهلاً البنية العاملية للمعالجات، استخدم $\alpha = 0.1$. اكتب
البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة p - للاختبار؟.

(١٣-٢٤) بالإشارة إلى مسألة ألم الأستنان (١٢-٢٤) افترض أن نموذج القطاع

العشوائي (24.10) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين،

ب - اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$.

أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

جـ - جهز رسم احتمال طيعي منفصل لكل مجموعة من متوسطات

مستويات العوامل المقترنة. هل يبدو هنا أن تأثيرات رئيسة جوهرية

موجودة؟

د - اختر، بصورة منفصلة لكل عامل من العوامل، ما إذا كانت التأثيرات

الرئيسة موجودة، استخدم $\alpha = 0.01$. لكل اختبار واكتب البدائل،

قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P لكل اختبار ؟

هـ - قتر

$$D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.} = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$D_2 = \mu_{.1} - \mu_{.2} = \beta_1 - \beta_2$$

استخدم طريقة يونفروني. معامل ثقة عائلي 95% اعرض استنتاجاتك.

و - اختر ما إذا كانت تأثيرات القطاع موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$.

أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

(١٤-٢٤) بالإشارة إلى مسألة ألم الأستنان (١٢-٢٤). افترض أن نموذج القطاع

العشوائي (24.11) بتأثيرات مثبتة هو النموذج الذي سيستخدم.

أ - اكتب جدول تحليل التباين

ب - اختر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب

البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

جـ - اختر بصورة منفصلة ما إذا كانت القطاعات تتفاعل مع كل عامل

من العوامل. ولكل اختبار، استخدم $\alpha = 0.01$ ، واكتب البدائل،

قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة P لكل اختبار ؟ ماذا تتضمن

نتالحك حول الاختبار بين نموذجي القطاع العشوائي (24.10) و (24.11)؟ ناقش.

د - اختر بصورة منفصلة لكل عامل من العوامل، ما إذا كانت التأثيرات الرئيسية موجودة، استخدم $\alpha = 0.01$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟ هل أثر اختيار النموذج على نتالحك هنا؟

(١٥-٢٤) بالإشارة إلى مسألتي لتدريب مراجع حسابات (٨-٢٤) و (٩-٢٤). افترض أن $\sigma = 2.5$. ما هي قوة الاختبار لتأثيرات طرق التدريب في المسألة (٩-٢٤) جـ إذا كان $\mu_1 = 20, \mu_2 = 73, \mu_3 = 76$ ؟

(١٦-٢٤) بالإشارة إلى مسألتي الدهن في الحميات الغذائية (١٠-٢٤) و (١١-٢٤). افترض أن $\sigma = 0.04$. ما هي قوة الاختبار لتأثيرات الحميات في المسألة (١١-٢٤) جـ إذا $\mu_1 = 1.1, \mu_2 = 1.0, \mu_3 = 0.9$ ؟

(١٧-٢٤) بالإشارة إلى مسألة لتدريب مراجع حسابات (٨-٢٤). ترغب شركة محاسبة أخرى القيام بالتحربة نفسها مع بعض مراجعيها، مستخدمين التصميم والنموذج نفسيهما. ماهو عدد القطاعات التي يمكن أن توصي الشركة باستخدامها، إذا رغبت القيام بجميع المقارنات الثنائية من المعالجات بدقة ± 1.5 ومعامل ثقة عالمي 99%؟ افترض أن $\sigma = 2.5$ هي قيمة للاعتراف المعياري للخطأ في النموذج (24.2) معقولة لأغراض التخطيط.

(١٨-٢٤) بالإشارة إلى مسألة الدهن في الحميات الغذائية (١٠-٢٤). افترض أن عدد القطاعات المراد استخدامه في الدراسة، يتألف من أشخاص ذكور لهم العمر نفسه، لم يتم تحديده بعد. افترض أن $\sigma = 0.04$ هي قيمة للاعتراف المعياري للخطأ في النموذج (24.2) معقولة لأغراض التخطيط.

أ - ما هو عدد القطاعات المطلوب إذا أريد القيام بجميع المقارنات الثنائية بين الحميات، بدقة ± 0.03 ومعامل ثقة عالمي 95%؟

ب - ما هو عدد القطاعات المطلوب إذا كان : (١) يُراد الكشف عن فروق في متوسطات التخفيض في مستويات الشحوم للحميات الثلاث باحتمال 0.95 أو أكثر، وذلك عندما يكون مدى متوسطات المعالجات 0.12 و (٢) يراد ضبط المخاطرة عند 0.01؟

(٢٤-١٩) بالإشارة إلى مسألتي التدريب مراجع حسابات (٢٤-٨) و (٢٤-٩)، بناء على مقياس الكفاءة المقدر (24.14)، كيف كانت كفاءة استخدام متغير التجميع في قطاعات بالمقارنة مع تصميم تام التشبية؟

(٢٤-٢٠) بالإشارة إلى مسألتي الدهن في الحميات (٢٤-١٠) و (٢٤-١١)، بناء على مقياس الكفاءة المقدر (24.15)، كيف كانت كفاءة استخدام متغير التجميع في قطاعات بالمقارنة مع تصميم تام التشبية؟

(٢٤-٢١) بالإشارة إلى مسألتي ألم الأسنان (٢٤-١٢) و (٢٤-١٣)، بناء على مقياس الكفاءة المقدر (24.14)، كيف كانت كفاءة استخدام متغير التجميع في قطاعات بالمقارنة مع تصميم تام التشبية؟

(٢٤-٢٢) بالإشارة إلى مسألة تدريب مراجع حسابات (٢٤-٨).
أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج القطاع العشوائي (24.2)،
استخدم 1، -1، 0 كمتغيرات مؤشرة.

ب - قم بتوفيق نموذج الانحدار للبيانات.
ج - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار بناء على مجاميع المربعات الإضافية المناسبة.

د - اختر التأثيرات الرئيسة للمعالجات؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٤-٢٣) بالإشارة إلى مسألة الدهن في الحميات (٢٤-١٠).
أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج القطاع العشوائي (24.2)،
استخدم 1، -1، 0 كمتغيرات مؤشرة.

ب - قم بتوفيق نموذج الانحدار للبيانات.

ج - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار بناء على مجاميع المربعات الإضافية المناسبة.

د - اختر التأثيرات الرئيسة للمعالجات ؟ استعمل $\alpha = 0.05$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٤-٢٤) الإشارة إلى مسألة تدريب مراجع حسابات (٢٤-٨)، يرغب المحلل في دراسة ما إذا كان استخدام درجات المهارة الإحصائية قبل التدريب كمتغير مصاحب يمكن أن يساعد في تخفيض تشتت الخطأ التجريبي تخفيضاً مهماً. وفيما يلي درجات المهارة الإحصائية للمراجعين قبل التدريب:

قطاع				طريقة تدريب			
قطاع				طريقة تدريب			
3	2	1	i	3	2	1	i
78	74	75	6	91	98	93	1
72	76	79	7	94	93	94	2
64	69	71	8	92	91	89	3
70	71	74	9	90	84	86	4
64	68	63	10	84	76	78	5

أ - هل تتوقع هنا أن عمر المراجع كان سيشكل متغيراً مصاحباً أفضل من درجات المهارة الإحصائية قبل التدريب؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (24.19)، استعمل $0, -1, 1$ كمستغيرات مؤشرة.

ج - اعرض نموذج الانحدار التام.

د - اعرض نموذج الانحدار المعكوف لاختبار تأثيرات المعالجات. وقم بتوفيق النموذج المعكوف.

هـ - اختر ما إذا كانت طرق التدريب تختلف في متوسطات فعاليتها أم لا. استعمل مستوى معنوية 0.05 . اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة p للاختبار؟

- و - أوجد 95% فترة ثقة لـ $D = \sigma_1 - \sigma_2$. فسر هذا التقدير بفترة.
- ز - هل انخفض تباين الخطأ انخفاضاً كبيراً بإضافة للتغير للمصاحب؟ اشرح.
- (٢٤-٢٥) بالإشارة إلى مسألة الدهون في اللحيمات الغذائية (٢٤-١٠). يرغب الباحث بفحص ما إذا كان وزن كل شخص، معبراً عنه كنسبة مئوية من وزنه المثالي، متغيراً مصاحباً مفيداً وفيما يلي بيانات أوزان الأجسام كنسب من أوزانهم المثالية لخمس عشرة شخصاً من الذكور:

محتوى الحمية من الدهون			قطاع
$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	i
101	96	94	1
99	102	97	2
106	100	105	3
112	107	108	4
107	115	118	5

- أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التباين (24.19)؛ استخدم 1، 0، 1 كمصفوفات مؤشرة.
- ب - قم بتوفيق نموذج الانحدار التام.
- ج - اعرض نموذج الانحدار المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات، و قم بتوفيق النموذج المخفض.
- د - اختبر ما إذا كانت متوسطات التعفيض في مستويات الشحوم مختلفة للحميات الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة p - للاختبار؟
- هـ - أوجد فترة ثقة لـ $D_1 = \sigma_1 - \sigma_2$ و $D_2 = \sigma_2 - \sigma_3$ ، مستخدماً طريقة بنفويروني. معامل ثقة عائلي 95%. فسر التقديرات بفترة التي حصلت عليها.
- و - هل انخفض تباين الخطأ انخفاضاً كبيراً بإضافة للتغير للمصاحب؟ اشرح.

تقارير

(٢٦-٢٤) اعتبر نموذج القطاع العشوائي (24.2)، ولكن بتأثيرات معالجة عشوائية. استنبط $\{Y_j\} \sigma^2$ و $\{\bar{Y}_j\} \sigma^2$.

(٢٧-٢٤) (نحتاج لحساب التفاضل) اعرض دالة الإمكانية لنموذج القطاع العشوائي بتأثيرات مثبتة (24.2) وذلك عندما يكون $n = 3$ و $r = 2$. أوجد مقدرات الإمكانية العظمى للمعالم. هل هي مطابقة لتقديرات المربعات الدنيا في (24.3)؟

(٢٨-٢٤) استنبط $E(MSTR)$ لنموذج قطاع عشوائي بتأثيرات مثبتة (24.3). (٢٩-٢٤) بين أنه عند دراسة معالجتين في تصميم قطاع عشوائي تام، فإن إحصاء الاختبار F^* في (24.7b) لتأثيرات المعالجات مكافئة لمربع إحصاء الاختبار F ذي الجانبين الخاص بالمشاهدات أزواجاً والمبنى على (1.66). (٣٠-٢٤) بالإشارة إلى نموذج الانحدار (24.17)، المكافئ لنموذج التحاين (24.16) في حالة $n = 5$ و $r = 3$. افترض أن المتغيرات المؤشرة في النموذج (24.17) قد رُمزت كما يلي:

$$X_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ويتم بالمثل تعريف $X_{ij2}, X_{ij3}, X_{ij4}$

$$X_{ij5} = \begin{cases} 1 & \text{الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij6} = \begin{cases} 1 & \text{الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وأنا رمزنا لمعاملات الانحدار بالرموز $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$. أ - اعرض الصيغة X لنموذج الانحدار هذا.

ب - أوجد التقابلات بين معاملات الانحدار $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_6$ ، والمعامل في نموذج التحاين (24.16).

جـ - ناقش مزايا وعيوب استخدام المتغيرات المؤشرة 1، 0، والمتغيرات المؤشرة 1، -1، 0، هنا.

مشاريع

(٢٤-٣١) بالإشارة إلى التعليق ٣ في صفحة والنموذج (24.1). افترض أن الكميات المعتمدة على الوحدة التحريية هي كما يلي لثمانية عناصر في تجربة تقوية نفسية.

j :	1	2	3	4	5	6	7	8
كمية الوحدة التحريية	16	14	18	16	12	15	13	12

نريد مقارنة معالجة تجريبية بمعالجة قياسية، مع تخصيص أربعة أشخاص عشوائيا لكل معالجة.

أ - افترض عدم وجود تأثيرات معالجة تفاضلية وأن الكمية المعتمدة على المعالجة هي 4 لكل معالجة. ولّد جميع التعشيتات الممكنة للوحدات التحريية الثماني إلى المعالجتين واحصل على القيم الملحوظة لكل عينة معالجة.

ب - لكل واحدة من الـ 70 تعشيتة التي تم الحصول عليها في (أ)، احسب F^* لاختبار البدائل $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ ، حدد النسبة من قيم F^* التي تتجاوز $F(90; 1, 6)$ ، والنسبة التي تتجاوز $F(95; 1, 6)$ ، النسبة التي تتجاوز $F(99; 1, 6)$.

جـ - كيف تقارن النسب التي حصلنا عليها في الجزء (ب) بالاحتمالات الخاصة بنموذج الخطأ الطبيعي؟ ناقش.

د - كرّر الأجزاء (أ) و(ب) للحالة عندما تكون كميتا العلاج للمعالجتين التحريية 15 والقياسية 4، على الترتيب، هل يبدو أن للاختبار قوة معقولة في هذه الحالة؟

تصاميم القطاع العشوائي - II

نستمر، في هذا الفصل، مناقشتنا لتصاميم القطاع العشوائي بدراسة الاستجابات الثنائية للمتغير التابع واختيار لا معلمي لتأثيرات المعالجات أولاً. ثم نتابع المشاهدات المفقودة وتأثيرات القطاع العشوائي، ونهي الفصل بمناقشة تصاميم القطاع العشوائي للمعنة واستخدام أكثر من متغير للتجميع في قطاعات.

(٢٥-١) الاستجابات الثنائية للمتغير التابع

تكون الاستجابات ثنائية في بعض تجارب القطاع العشوائي. على سبيل المثال، قد تكون الاستجابات في تجربة تتعلق بتصرف المرء عند التسوق، بشري أو لا بشري وفي تجربة على الحافز المهمة، قد تكون الاستجابات هي النجاح في المهمة أو الفشل في المهمة وفي كل من تلك الحالات يمكن ترميز الاستجابات بـ 1 أو 0.

اختبار كوكران

عندما تكون الاستجابات في تجربة قطاع عشوائي ثنائية ومرمزة بـ 1 أو 0، يمكن استخدام اختبار كاي مربع تقويم وجود تأثيرات معالجات. ولاختبار ما إذا كانت تأثيرات المعالجات موجودة.

$$\text{كل } \tau_j \text{ مساو للصفر } H_0: \quad (25.1)$$

$$\text{ليس كل } \tau_j \text{ مساو للصفر } H_a:$$

ويمكن استخدام احصاءة الاختبار التالية وتعود إلى كوكران:

$$X_c^2 = SSTR + \frac{SSBL \cdot TR}{n(r-1)} \quad (25.2)$$

والتي تختصر إلى:

$$X_c^2 = \frac{(r-1)(r \sum_j Y_j^2 - Y^2)}{rY - \sum_j Y_j^2} \quad (25.2a)$$

حيث استُعملت الرموز المعتادة.

وقد يختلف عدد مرات وجود الرقم 1 في كل قطاع بسبب الفروق بين قطاع وآخر. وإذا علمنا عدد مرات وجود الرقم 1 في كل قطاع، وكان لجميع المعالجات التأثير نفسه، فستكون لجميع تباديل الأرقام 1, 0 داخل قطاع فرص متساوية. ويمكن عندئذ، وتحت الافتراض بأن H_0 صحيحة تبيان أن X_c^2 يتوزع تقريبا وفقا لتوزيع χ^2 بـ $r-1$ درجة حرية، شريطة أن لا يكون عدد القطاعات صغيرا جدا، وتؤدي القيم الكبيرة لـ X_c^2 إلى استنتاج H_a .

مثال. يحتوي الجدول (٢٥-١) بيانات لتجربة تم فيها تجميع 15 فريقا إلى $n=5$ قطاعات في كل منها ثلاثة فرق وذلك وفقا لمعيار حول المقدرة الابتكارية لكل فريق. وقد تم تخصيص الفرق عشوائيا داخل كل قطاع لواحد من $r = 3$ طرق تدريب، وعند استكمال التدريب، تم تكليف كل فريق بانجاز المهمة المعقدة نفسها. وقد رُمز النجاح في المهمة بـ 1 والفشل بـ 0.

ولاختيار ما إذا كانت لطرق التدريب تأثيرات متفاوتة على الأداء الناجح، نستخدم إحصاءة الاختبار (25.2a) ونحصل على:

$$X_c^2 = \frac{2[3(29) - (9)^2]}{3(9) - 19} = 1.5$$

وبضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$. نحتاج إلى $\chi^2(95;2) = 5.99$.

وبما أن $1.5 \leq 5.99$ ، فنستنتج أن طرق التدريب لا تختلف في فعاليتها والقيمة- P لهذا الاختبار هي 0.47.

جدول (٢٥-١) تجربة ثنائية الاستجابة في تصميم قطاع عشوائي

المجموع	طريقة التدريب			القطاع i
	3	2	1	
3	1	1	1	1 مقدرة ابتكارية عالية
2	1	0	1	2
1	0	0	1	3
1	0	1	0	4
2	1	0	1	5 مقدرة ابتكارية منخفضة
9	3	2	4	المجموع

$$\sum y_j^2 = 4^2 + 2^2 + 3^2 = 29$$

$$\sum y_i^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 19$$

طريقة الاختبارات الثنائية المتعددة

حينما يؤدي اختبار كوكران إلى استنتاج وجود تأثيرات معالجات، يمكن إجراء اختبارات ثنائية مبنية على متوسطات المعالجات \bar{y}_j . وذلك بطريقة مماثلة لاختبار كروسكال-والاس الموصوف في فقرة (١٧-٤)، شريطة ألا يكون عدد القطاعات صغيراً جداً. وتكون حدود الاختبار لكل $g = r(r-1)/2$ من الاختبارات الثنائية بمستوى معنوية عالي α ، كما يلي:

$$\bar{Y}_j = \bar{Y}_{..} \pm \left[\left(\frac{rY_{..} - \sum y_i^2}{nr(r-1)} \right) \left(\frac{2}{n} \right) \right]^{1/2} \quad (25.3)$$

حيث:

$$B = \alpha(1 - \alpha/2g) \quad (25.3a)$$

$$g = \frac{r(r-1)}{2} \quad (25.3b)$$

وإذا تضمنت حدود الاختبار القيمة صفر، نستنتج عدم اختلاف متوسطي المعالجتين المقابلتين μ_j و μ_r ونستنتج اختلاف متوسطي المعالجتين المقابلتين إذا لم تتضمن حدود الاختبار القيمة صفر.

(٢٠٠٠) اختبار الرتبة لفريدمان

عندما تكون المشاهدات Y_{ij} في تصميم قطاع عشوائي تام بعيدة عن الطبيعية وتكون تحويلات البيانات غير مؤثرة، يمكن استخدام اختبار لامعلمي لتأثيرات المعالجات. ويسمى هذا الاختبار، اختبار فريدمان، ويعتمد على رتب البيانات في كل قطاع.

إحصاءة اختبار فريدمان

يتم أولاً ترتيب المشاهدات لكل قطاع ولنرمز بـ R_{ij} لرتبة Y_{ij} عند ترتيب المشاهدات في القطاع i من 1 إلى r . فعندئذ تكون إحصاءة اختبار فريدمان:

$$X_F^2 = SSTR + \frac{SSBL \cdot TR}{n(r-1)} \quad (25.4)$$

ويمكن اختزالها (عندما لا توجد رتب متعادلة) إلى:

$$X_F^2 = \left[\frac{12}{nr(r+1)} \sum_j R_j^2 \right] - 3n(r+1) \quad (25.4a)$$

حيث R_j مجموع الرتب للمعالجة j .

وإذا لم تكن هناك فروق بين المعالجات، فنفترض أن لجميع تباديل الرتب ضمن قطاع الفرصة نفسها وأن الإحصاءة X_F^2 مستوزع تقريباً وفق التوزيع χ^2 بـ $(r-1)$ درجة حرية إذا لم يكن عدد القطاعات صغيراً. وتؤدي القيم الكبيرة لإحصاءة الاختبار إلى استنتاج أن المعالجات لها تأثيرات غير متساوية. وإذا كان عدد القطاعات صغيراً، فيمكن استخدام جداول كتلك الموجودة في المرحع (25.1) للقيام باختبار مضبوط.

مثال. يحتوي الجدول (٢٠٠٠) أ بيانات لتجربة تصميم قطاع عشوائي تام تم فيها تجميع 15 محلا في 5 قطاعات وفقاً لحجم المحل، وتم عشوائياً تخصيص ثلاث طرق ترتيب مختلفة للقسم الخاص بمنتج معين إلى المحلات الثلاثة في كل قطاع. وبين الجدول (٢٠٠٠) أ بيانات مبيعات هذا المنتج (بآلاف الدولارات) لكل من الـ 15 محلا. وبسبب مايلو من انحراف واضح لهذه المبيعات عن الطبيعية، تقرر استخدام اختبار

تعليقات

١- في حال وجود تعادلات في بيانات معالجة ما، يمكن تخصيص متوسط الرتب للمشاهدات المتعادلة والاستمرار في استخدام إحصاء الاختبار (25.4) شريطة عدم وجود العديد من التعادلات في مجموعة البيانات.

٢- يكون لإحصاء الاختبار (25.4) نفس شكل إحصاء اختبار كوكران (25.5)، ولكن مطبقة على رتب بدلا من بيانات 0، 1.

طريقة الاختبارات الثنائية المتعددة

بالضبط كما في حالة اختبار كروسكال - والاس للدراسات وحيدة العامل، فقرة (١٧ - ٤)، وقياسا على طريقة بونفيروني للمقارنات الثنائية، يمكن استخدام اختبار عينة كبيرة الحجم للحصول على معلومات حول المقادير المقارنة لتوسطات المعالجات في تصاميم قطاع عشوائي تام وذلك عندما يشير اختبار فريدمان إلى اختلاف هذه المتوسطات. وتوضع حدود الاختبار لكل $g = r(r-1)/2$ من المقارنات الثنائية مستخدمين متوسط الرتب \bar{R}_r بمستوى معنوية عالي α ، كما يلي:

$$\bar{R}_j - \bar{R}_r \pm B \left[\frac{r(r+1)}{6n} \right]^{1/2} \quad (25.5)$$

حيث:

$$B = z(1 - \alpha/2g) \quad (25.5a)$$

$$g = \frac{r(r+1)}{2}$$

إذا احتوت حدود الاختبار على الصفر، نستنتج عدم اختلاف متوسطي المعالجتين μ_r و μ_j . وإذا لم تحتوي حدود الاختبار الصفر، نستنتج أن متوسطي المعالجتين مختلفان. وبذلك يمكن أن نضع مجموعات من المعالجات التي لا تختلف متوسطاتها طبقا لهذه الطريقة المترابطة في الاختبار.

مثال. لمثال تسويق عرض مُنتج، نرغب في القيام بجميع الاختبارات الثنائية بمستوى معنوية عالي $\alpha = 0.20$. ومتوسطات الرتب \bar{R}_r معروضة في الجدول

(٢٠-٢٥) ب. ومن أجل $r=3$ لدينا $g=3(2)(2)$ ، ولذا، نحصل في حالة $n=5$ على
 $B = z [1-20 / 2(3)] = z (9667) = 1.834$
وهكذا يكون الحد الأدنى في (25.5):

$$B \left[\frac{r(r+1)}{6n} \right]^{1/2} = 1.834 \left[\frac{3(4)}{6(5)} \right]^{1/2} = 1.16$$

ونلاحظ من الجدول (٢٠-٢٥) ب أن الفروق بين متوسط الرتب لطريقة التنسيق 3 وكل من طرق التنسيق الأخرى يزيد عن 1.16 وهي بالتالي فروق معنوية. ولذا يمكن تكوين مجموعتين، لا تختلف فيهما متوسطات المعالجات:

المجموعة 2		المجموعة 1	
النسق 3	$\bar{R}_3 = 2.8$	النسق 1	$\bar{R}_1 = 1.6$
		النسق 2	$\bar{R}_2 = 1.6$

ولذا، نستنتج بمستوى معنوية عالٍ 0.20 أن طريقة التنسيق 3 تؤدي إلى متوسط مبيعات أكبر من الطريقتين 1 و 2.

(٢٥-٣) المشاهدات المفقودة

هناك حالات تكون فيها واحدة أو أكثر من المشاهدات "مفقودة" في تصميم قطاع عشوائي تام. قد يكون أحد العناصر مريضاً ، وقد يكون أحد السجلات مضللاً ، وقد يجري خطأ في تطبيق المعالجة في إحدى الحالات. وتدمر مثل تلك المشاهدات المفقودة تناظر (تعامد) تصميم قطاع تام وتجعل حسابات التحاين المتعادلة غير ملائمة. ومع ذلك، يظل أسلوب الانحدار لتحليل تصاميم قطاع عشوائي والذي نوقش في فقرة ٢٤-١٠ ملائماً عند وجود مشاهدات مفقودة. والسبب هو أن نموذج تصميم قطاع عشوائي بدون تفاعل (24.2) يسمح لنا في الواقع بتقدير متوسط الاستجابة للعلية المفقودة. وقد شرحنا سابقاً كيف يتم ذلك لنموذج ثنائي العامل بدون تفاعل (فقرة ٢١-١)، والمنطق نفسه ينطبق هنا.

وبما أنه ليست هناك مبادئ جديدة، فسنقدم الآن مثالا لتوضيح استخدام أسلوب الانحدار حينما تكون المشاهدات مفقودة في تجربة تصميم قطاع عشوائي.

مثال

يحتوي الجدول (٢٥-٣) بيانات تجربة تصميم قطاع عشوائي بسيطة بـ $r = 3$ معالجات و $n = 3$ قطاعات، وحيث الملاحظة Y_{ij} مفقودة. ونضع نموذج الانحدار المكافئ لنموذج تصميم قطاع عشوائي (24.2) كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \underbrace{\rho_1 X_{ij1} + \rho_2 X_{ij2}}_{\text{تأثير معالجة}} + \underbrace{\tau_1 X_{ij3} + \tau_2 X_{ij4}}_{\text{تأثير قطاع}} + \varepsilon_{ij} \quad (25.6)$$

حيث:

$$X_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij3} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij4} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

جدول (٢٥-٣) مثال مشاهدة مفقودة في تصميم قطاع عشوائي ($r=3, n=3$)

معالجة (i)			
قطاع i	1	2	3
1	مفقود	10	9
2	11	10	7
3	6	4	3

يعرض جدول (٢٥-٤) مصفوفات Y , X , و β للنموذج التام (25.6) لهذه التجربة حيث الملاحظة Y_{11} مفقودة.

ويتم تحليل التباين لاختبار تأثيرات المعالجات وتأثيرات القطاعات بالطريقة العادية وذلك بتوفيق النموذج التام (25.6) أولاً ثم توفيق كل من النماذج المحفظة الآتية اختبار لتأثيرات القطاعات

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \tau_j X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \varepsilon_{ij} \quad (25.7)$$

اختبار لتأثيرات المعالجات

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_1 X_{ij1} + \rho_2 X_{ij2} + \varepsilon_{ij} \quad (25.7)$$

ويتم بعد ذلك حساب مجاميع المربعات الإضافية ($X_3, X_4 | X_1, X_2$) للقطاعات و ($X_3, X_4 | X_1, X_2$) للقطاعات كالمعتاد. ويقدم الجدول (٢٥-٥) تلك المجاميع الإضافية للمربعات في مثالنا كما نتجت عن تشغيلي حاسب، ومعها، أيضاً، مجموع مربعات الخطأ للنموذج الكامل. ولم يُعط مجموع المربعات الكلي وذلك بسبب غياب خاصية التعامد كنتيجة للملاحظة المفقودة.

ويتم اختبار تأثيرات المعالجات كالمعتاد. ونجد من الجدول (٢٥-٥):

$$F^* = \frac{MRS(X_3, X_4 | X_1, X_2)}{MSE} = \frac{625}{44} = 14.2$$

جدول (٢٥-٤) مصفوفات Y , X , و β لثال الملاحظة المفقودة جدول (٢٥-٣)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \\ Y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 11 \\ 10 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{..} \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

جدول (٢٥-٥) جدول تباين ومُخرجات الانحدار الأخرى لكامل الملاحظة المفقودة.

مصدر التباين	SS	df	MS
القطاعات	53.83	2	26.92
تباين	12.50	2	6.25
خطأ	1.33	3	.44

(ب) معامل الانحدار المقدرة للنموذج التام (25.6)

معامل الانحدار	معامل الانحدار المقدّر
$\mu_{..}$	$\hat{\mu}_{..} = 8.000$
ρ_1	$\hat{\rho}_1 = 2.333$
ρ_2	$\hat{\rho}_2 = 1.333$
τ_1	$\hat{\tau}_1 = 1.667$
τ_2	$\hat{\tau}_2 = 0.0$

مصفوفة التباين - التغاير المقدرة لمعاملات الانحدار

	$\hat{\mu}_{..}$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$
$\mu_{..}$.06173				
ρ_1	.02469	.14815			
ρ_2	-.01235	-.07407	.11111		
τ_1	.02469	.04938	-.02469	.14815	
τ_2	-.01235	-.02469	.01235	-.07407	.11111

ومن أجل $\alpha = 0.05$ ، نحتاج إلى $F(95;2,3) = 9.55$ وبما أن $14.2 > 9.55$ ، F^* ، فنستنتج وجود تأثيرات معالجات متفاوتة. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.03. ويمكن إجراء اختبار تأثيرات القطاع، حينما يكون مطلوباً، بالطريقة نفسها تماماً. ولاتواجهنا أية مشاكل جديدة باستخدام أسلوب الانحدار لتحليل تأثيرات مثبته للمعالجات عندما تكون هناك مشاهدات مفقودة. وفي مثالنا، لتقدير المقارنة النهائية

$D = \mu_1 - \mu_3 = \tau_1 + \tau_2$ ، على سبيل المثال، نستفيد من حقيقة أن $\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2$ لنحدد:

$$D = \mu_1 - \mu_3 = \tau_1 - \tau_3 = \tau_1 - (-\tau_1 - \tau_2) = 2\tau_1 + \tau_2 \quad (25.9)$$

والتقدير غير المنحاز لـ (25.9) هو:

$$D = 2\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2$$

وتباينه المقدر، باستخدام (1.27b) هو:

$$s^2\{\hat{D}\} = 4s^2\{\hat{\tau}_1\} + s^2\{\hat{\tau}_2\} + 4s\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\} \quad (25.11)$$

ويحتوي الجدول (٢٥-٥) ب معاملات الانحدار المقترنة للنموذج التام، ويحتوي

الجدول (٢٥-٥) ج مصفوفة التباين - التغاير المقترنة لمعاملات الانحدار وبذلك نحصل

على التقديرات التالية:

$$\{\hat{D}\} = 2(1.667) + 0.0 = 3.334$$

$$s^2\{\hat{D}\} = 4(.14815) + .11111 + 4(-.07407) = .4074$$

وبالتالي يكون الانحراف المعياري للمقدر $s\{\hat{D}\} = .638$. ولفرة ثقة 95% لـ D

نحتاج إلى $3.182 = t(975; 3)$ ، مما يؤدي إلى حدي الثقة $(3.182)(.638) \pm 3.334$ ، وفترة

الثقة هي:

$$1.3 \leq \mu_1 - \mu_3 \leq 5.4$$

ملاحظة

يُستخدم أحياناً أسلوب حساسي بلوي بديل يعود إلى ياتس (*Yates*) عندما تكون هناك واحدة أو اثنتان من المشاهدات المفقودة. ويتم الحصول على مشاهدات كاذبة للقيم المفقودة، ثم تجري حسابات التحاين العادية كما لو كانت لدينا كل المشاهدات. وتجري في النهاية تعديلات لحسابات التحاين. انظر مرجع (25.2) لتفصيلات كاملة لتلك الطريقة. ومع الانتشار الأوسع لحزم حاسوب جاهزة للانحدار، تضاءلت الحاجة بصفة عامة لاستخدام أسلوب الحساب البلوي لياتس.

(٢٥-٤) تأثيرات قطاع عشوائي

يمكن اعتبار القطاعات في بعض الأحيان عينة عشوائية من مجتمع، ولذا ينبغي

اعتبار تأثيرات القطاع في نموذج القطاع العشوائي متغيرات عشوائية.

١- درس أحد الباحثين التحسن في تعلم شعب الصف الثالث الناتج عن إضافة واحد أو اثنين من مساعدي التدريس إلى المدرس. وقد تم اختيار عشر مدارس عشوائية ، وتم استخدام ثلاثة فصول من الصف الثالث في كل مدرسة من المدارس. وفي كل مدرسة، تم اختيار فصل واحد عشوائياً لكي يكون بدون مساعدي تدريس، وتم اختيار شعبة واحدة عشوائياً لكي تكون بمساعد تدريس واحد، وتم تخصيص اثنين من مساعدي التدريس للشعبة الثالثة. وكانت كمية التعلم للفصل، والمقاسة بعناية في نهاية العام الدراسي، هي المتغير التابع.

وتشكل المدارس هنا القطاعات، والتي يمكن النظر إليها كعينة عشوائية من جميع المدارس للوهلة للدراسة.

٢- في دراسة فعالية أربع جرعات مختلفة للدواء ما، تم استخدام 20 حظيرة من الفئران، كل منها تتكون من أربع فئران. ويمكن النظر إلى الحظائر العشرين (قطاعات) على أنها عينة عشوائية من مجتمع جميع الحظائر التي كان يمكن استخدامها في الدراسة. وعندما يمكن اعتبار القطاعات عينة عشوائية من مجتمع من القطاعات، يمكن استخدام إما النموذج التجميعي (لاتفاعل) أو اللاتجميعي (تفاعل). ويمكن المساعدة في الاختبار باستخدام التشخيصات التي نوقشت في الفصل ٢٤. وبصفة خاصة، يمكن للرسم البيانية للاستجابات Y_{ij} لكل قطاع، كالتالي في الشكل (٢٤-١) المساعدة في فحص ما إذا كانت القطاعات والمعالجات تتفاعل.

وبشكل القصور الشديد في التوازي في ذلك الرسم البياني مؤشراً واضحاً إلى أن نموذج التفاعل يمكن أن يكون النموذج المفضل. ويمكن استخدام احصاءة اختبار توكي للتفاعلات في (21.13) مع التوضيح هنا أن الاختبار يُطبق على القطاعات المعطاة التي اختبرت.

عندما يكون الاهتمام الرئيس للتحليل هو اختبار وتقدير تأثيرات المعالجات، وهي الحالة المعتادة، لا يكون الاختبار بين النموذجين مسألة حرجية، ذلك لأن طرق الاستقراء حول التأثيرات المثبتة للمعالجات، كما سنرى، سيقي نفسه بالضبط

للمنودجين.

وسنشرح أولا النموذج التجميعي، نموذج اللاتفاعل، لتصاميم قطاع عشوائي مع تأثيرات قطاع عشوائية، ثم نتابع بعدئذ مناقشة النموذج اللاتجميعي. وسنستطلع بصفة خاصة، طبيعة الارتباط الذي نفترضه في كل نموذج بين الوحدات التجريبية داخل القطاع، ذلك لأنه يمكن في الغالب الحكم على فائدة النموذج من زاوية تلك الارتباطات المفترضة.

وفي حالة خاصة من القطاعات العشوائية عندما تكون القطاعات وحدات تجريبية مثل أشخاص، عائلات، أو مدن، تتلقى كل منها جميع المعالجات عبر الزمن أو يتم تقويم تأثيرات معالجات عند نقاط زمن مختلفة (الدعائية مثلا). تسمى تلك التصاميم تصاميم قياسات متكررة وسوف نناقشها في الفصل ٢٨.

النموذج التجميعي

النموذج التجميعي لتأثيرات عشوائية للقطاعات، وتأثيرات مثبتة للمعالجات،

هو نموذج مشابه لنموذج التأثيرات المثبتة (25.12):

$$Y_{ij} = \mu. + \rho_j + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad (25.12)$$

حيث:

$\mu.$ ثابت

ρ_j مستقلة و $(0, \sigma_\rho^2)$

τ_j ثوابت خاضعة للقيود $\sum \tau_j = 0$

ε_{ij} مستقلة و $(0, \sigma^2)$ ومستقلة عن ρ_j

$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$

خواص النموذج

تكون المشاهدات Y_{ij} للنموذج التجميعي (25.12) موزعة توزيعا طبيعيا لأن

كلا منها عبارة عن تركيب خطي من متغيرات طبيعية مستقلة. ويكون المتوسط والتباين لـ

Y_{ij} :

$$E\{Y_{ij}\} = \mu. + \tau_j \quad (25.13a)$$

$$\sigma^2\{Y_j\} = \sigma_r^2 = \sigma_p^2 + \sigma^2 \quad (25.13b)$$

ولذا يكون تباين Y_j ونرمز له بـ σ_r^2 ثابتا لجميع المشاهدات، ولكنه هنا مؤلف من مركبتين : (١) التشتت بين القطاعات σ_p^2 و (٢) تباين الخطأ σ^2 .

و يفترض النموذج التجميعي (25.12) أن المشاهدات من قطاعات مختلفة مستقلة، ومع ذلك، فإن أي مشاهدين من القطاع نفسه Y_j و $Y_{j'}$ تكونان مرتبطتين في هذا النموذج. ويمكن أن نبين أن تغايرهما هو:

$$\sigma\{Y_j, Y_{j'}\} = \sigma_p^2 \quad j \neq j' \quad (25.14)$$

وهكذا يمكن القول مقدما أن لأي مشاهدين من القطاع نفسه ارتباط موجب، ويبقى التغاير نفسه لجميع القطاعات. وسبب الارتباط هو أنه لأي مشاهدين من القطاع نفسه المركبة p نفسها، مما يؤدي إلى جعل المشاهدين أكثر شبها . و يكون هذا التغاير الموجب معقولا في كثير من التطبيقات. وعلى سبيل المثال، سيتجه تعلم فصل من الفصول المختلفة في المدرسة نفسها لأن يكون أكثر مماثلا مما هو لفصول من مدارس مختلفة وذلك بسبب مماثل التسهيلات، و مماثل نوعية المدرسي، وماشابه.

ويكون معامل الارتباط بين أي مشاهدين من القطاع نفسه للنموذج (25.12) ثابتا لجميع القطاعات وسنرمز له بالرمز.

$$\omega = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_r \sigma_r} = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_r^2} \quad (25.15)$$

ويتبع ذلك من تعريف معامل الارتباط في (13.7) وحقيقة أن $\sigma_r = \sigma\{Y_j\} = \sigma\{Y_{j'}\}$ لاحظ أنه يمكن التعبير عن التغاير في (25.14) كما يلي مستخدمين (25.15):

$$\sigma\{Y_j, Y_{j'}\} = \omega \sigma_r^2 \quad j \neq j' \quad (25.16)$$

وإحدى الخواص المهمة للنموذج التجميعي (25.12)، كما توضحها العلاقتان (25.14) و (25.15)، هي أن ارتباط أي مشاهدين Y_j داخل قطاع ما معطى، وقبل المحاولات العشوائية، هو ارتباط من النمط نفسه. ولذا يكون لمصفوفة التباين - التغاير للملاحظات في قطاع معطى شكلها الخاص. ونوضح مصفوفة التباين - التغاير للملاحظات في قطاع من أجل دراسة قطاع عشوائي حيث $r = 3$ معالجات، وذلك

باستخدام عبارة التباير في (25.16):

$$\sigma^2 \{Y\} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \omega\sigma_r^2 & \omega\sigma_r^2 \\ \omega\sigma_r^2 & \sigma_r^2 & \omega\sigma_r^2 \\ \omega\sigma_r^2 & \omega\sigma_r^2 & \sigma_r^2 \end{bmatrix} = \sigma_r^2 \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega \\ \omega & 1 & \omega \\ \omega & \omega & 1 \end{bmatrix} \quad (25.17)$$

حيث:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{13} \end{bmatrix}$$

لاحظ أن القطر الرئيس للمصفوفة يحتوي على تباينات Y_{ij} وتساوي σ_r^2 والتغايرات، $\omega\sigma_r^2$ ، فيما عدا ذلك.

ويسمى النمط الخاص لمصفوفة التباين - التباير في (25.17) التناظر المركب.

وبينما تكون أي مشاهدتين في قطاع معطى مرتبعتين قبل المحاولات العشوائية، يفترض النموذج التجميعي (25.12) حال اختيار قطاع ما، أن للمشاهدات في ذلك القطاع مستقلة. ولهذا يكون التغير العشوائي الوحيد الباقي لأي مشاهدة Y_{ij} هو حد الخطأ e_{ij} ويفترض النموذج التجميعي (25.12) أنها مستقلة. وهكذا يفترض النموذج (25.12)، في دراسة مساعد المدرس، أنه طالما يتم اختيار المدارس، فإن أداء فصل ما يكون مستقلا عن أداء أي فصل آخر وذلك في كل سنة مختارة، مفترضين أن كل الشروط المشتركة للفصول في تلك المدرسة هي كما يعكسها تأثير القطاع ρ .

تعليقات.

١- يمكن التعبير عن تباين Y_{ij} في (25.13b) مستخدمين (25.15) كالآتي:

$$\sigma_r^2 = \omega\sigma_r^2 + \sigma^2$$

و بالتالي نحصل على:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{1-\omega} \quad (25.18)$$

٢- يضع افراض التناظر المركب في النموذج التجميعي (25.12) أكثر مما ينبغي من القيود، فبينما يكفي هذا الافتراض لتكون الاحصاءات الخاصة باختبار تأثيرات

المعاملات خاضعة لتوزيع F تحت H_0 أي، عندما لا توجد تأثيرات معاملات، إلا أن هذا الافتراض غير ضروري وسيكفي لهذا الغرض، تحقق شرط الدائرية. ويتطلب هذا الشرط أن يكون تباين الفرق بين أي اثنين من تقديرات متوسطات المعاملات ثابتاً، أي أن :

$$\sigma^2\{\bar{Y}_j, \bar{Y}_r\} = \sigma^2 \quad j \neq r \quad (25.19)$$

ويمكن مواجهة هذا الشرط دون الحاجة إلى التناظر المركب. اعتبر على سبيل المثال، مصفوفة التباين - التباين الآتية للمشاهدات Y_{ij} ضمن أي قطاع في دراسة قطاع عشوائي تام، حيث $r = 3$ معاملات:

$$\sigma^2\{Y\} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

وإذا استوفينا هذه المصفوفة شرط التناظر المركب، إلا أنها تحقق متطلب الدائرية في (25.19)، ولدينا $\sigma^2\{\bar{Y}_j - \bar{Y}_r\} = 2/n$ دائماً. وعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_3\} = \frac{2}{n} + \frac{8}{n} - 2\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

تحليل التباين. يحتوي جدول (٦-٢٥) تحليل التباين لنموذج تجميعي (25.12). وبجميع المربعات هي نفسها كما في (24.6) لنموذج التأثيرات المثبتة.

جدول (٦-٢٥) تحليل تصميم قطاع عشوائي تام - تأثيرات عشوائية للقطاعات

مصدر التباين	SS	df	MS	نموذج تجميعي (25.12)	نموذج تفاعل (25.20)	$E(MS)$
قطاعات	SSBL	$n - 1$	MSBL	$\sigma^2 + r\sigma_p^2$	$\sigma^2 + r\sigma_p^2$	
معالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR	$\sigma^2 + \frac{n}{r-1} \sum \tau_j^2$	$\sigma^2 + \frac{n}{r-1} \sum \tau_j^2$	
خطأ	SSBL.TR	$(n-1)(r-1)$	MSBL.TR	σ^2	$\sigma^2 + \sigma_p^2$	
المجموع	SSTO	$nr - 1$				

ويحتوي الجدول (٦-٢٥) توقع متوسط المربعات للنموذج (25.12)، أيضاً.

وإحصاءة اختبار تأثيرات المعالجات هي $TR.F^* = MSTR / MSBL$ ، كما يتضح من عمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٥-٦). وهكذا، فإن إحصاءة الاختبار تبقى نفسها سواء كانت تأثيرات القطاع مثبتة أو عشوائية. كما أن فترات الثقة لتضادات المعالجات لا تقدّم أية مشاكل جديدة. ونستخدم $MSBL.TR$ ، مرة أخرى، كمتوسط مربعات في التباين المقدّر للمتضادة.

نموذج تفاعل

عندما نشير التشخيصات التي نوقشت في فصل ٢٤ إلى وجود تفاعل بين القطاع والمعالجة في حالة كون القطاعات عينة عشوائية من مجتمع من القطاعات، يمكن استخدام نموذج القطاع العشوائي التالي، وهو يسمح بالتفاعل بين القطاعات والمعالجات:

$$Y_{ij} = \mu. + \rho_i + \tau_j + (\rho\tau)_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (25.20)$$

حيث:

$\mu.$ ثابت

ρ_i مستقلة و $N(0, \sigma_\rho^2)$

τ_j ثوابت وخاضعة للقيود $\sum \tau_j = 0$

$(\rho\tau)_{ij}$ تتوزع وفق $N(0, \frac{r-1}{r} \sigma_{\rho\tau}^2)$ وخاضعة للقيود $\sum (\rho\tau)_{ij} = 0$ مهما تكن i .

$$\sigma\{(\rho\tau)_{ij}, (\rho\tau)_{ij'}\} = \frac{1}{r} \sigma_{\rho\tau}^2 \quad \text{من أجل } j \neq j'$$

$(\rho\tau)_{ij}$ مستقلة عن ρ_i ؛ ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ومستقلة عن ρ_i وعن $(\rho\tau)_{ij}$.

$$j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, n$$

خواص النموذج. تتوزع المشاهدات Y_{ij} لنموذج التفاعل (25.20) توزيعاً طبيعياً،

بالتباين والقيم المتوقعة التالية:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu. + \tau_j \quad (25.21a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma_\rho^2 + \frac{r-1}{r} \sigma_{\rho\tau}^2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (25.21b)$$

ومرة أخرى هنا، Y_{ij} لها تباين ثابت، ولكن يتألف التباين الآن من ثلاث مركبات.

نفترض، كما في نموذج اللافاعل (25.12)، أن المشاهدات من قطاعات مختلفة مستقلة

طبقا للنموذج (25.20) وبالمثل، تكون أي مشاهدين Y_{ij} ، $Y_{i'j}$ من القطاع نفسه مرتبطين في حالة نموذج التفاعل (25.20)، ويمكن تبين أن التباير هو:

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{i'j}\} = \sigma_p^2 - \frac{1}{r} \sigma_{pr}^2 \quad j \neq j' \quad (25.22)$$

وهكذا يكون لأي مشاهدين من القطاع نفسه في نموذج التفاعل (25.20) تباير ثابت، ويصح ذلك في جميع القطاعات. ويكون معامل الارتباط بين أي مشاهدين في القطاع نفسه وسمز له بـ w^* كما يلي:

$$w^* = \frac{\sigma_p^2 - \frac{1}{r} \sigma_{pr}^2}{\sigma_r^2} \quad (25.23)$$

تعليقات

١- السبب في أننا نعر عن تباين حدود التفاعل في نموذج التفاعل (25.20) بالشكل σ_p^2 / r بدلا $\sigma_{pr}^2 (r-1)$ من هو أن عبارة توقع متوسط المربعات ستكون عندئذ بسيطة نسبيا .

٢- نتج صفة التباير في (25.22) من حقيقة أنه يمكن في حالة نموذج التفاعل (25.12)، تبين أن:

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{i'j}\} = \sigma\{\mu_i, \mu_{i'}\} + \sigma\{(\mu\tau)_{ij}, (\mu\tau)_{i'j}\} \quad (25.24)$$

والحد الأول على اليمين هو تباين μ_i أي σ_p^2 طبقا للنموذج، والحد الثاني على اليمين هو تباير حدي تفاعل من القطاع نفسه، والمعطى من النموذج على أنه σ_{pr}^2 / r .

٣- يفرض نموذج التفاعل (25.20) تماما كما في حالة نموذج اللاتفاعل (25.12) أنه حالما يتم اختيار القطاعات، فإن أي مشاهدين من قطاع ما تكونان غير مرتبطتين.

تفصيل التباين. تبقى مجاميع المربعات ودرجات الحرية لنموذج التفاعل (25.20) كذلك الخاصة بنموذج اللاتفاعل (25.12). ويظهر الفرق الرئيس في استخدام النموذجين في توقع متوسط المربعات، كما هو مبين في جدول (٢٥-٦). ويكون الاختبار المضبوط

لتأثيرات القطاع غير ممكن في حالة نموذج التفاعل، بينما يكون الاختبار المضبوط ممكنا في نموذج اللاتفاعل. ويقي هذا التمييز غر مهم حيثما كانت القطاعات مستخدمة من الأساس لتخفيض تشتت الخطأ التجريبي وليست لها أهمية جوهرية في ذاتها. وتبقى إحصاءة الاختبار F^* الخاصة بتأثيرات المعالجات نفسها للنموذجين، ونعني $F^* = MSTR / MSBL.TR$ التي تساوي بالضبط إحصاءة الاختبار (24.76) لنموذج قطاع عشوائي بتأثيرات قطاع مثبتة. وبالمثل يمكن في حالة تأثيرات عشوائية للقطاعات تقدير تأثيرات المعالجات المثبتة لكل من النموذجين بالأسلوب نفسه الموصوف في فصل 24 في حالة تأثيرات مثبتة للقطاعات.

بعض التعليقات النهائية

١- يشير الجملول (٢٥-٦) إلى أنه عندما تكون تأثيرات القطاع عشوائية، فإن $MSBL.TR$ تُقدّر للنموذج التجميعي (25.12). إلا أن $MSBL.TR$ تُقدّر بمجموع تباين حد الخطأ، وتباين التفاعل σ_m^2 للنموذج اللاتجميعي (25.20). ومن غير الممكن إيجاد تقديرات منفصلة لهاتين المركبتين من النموذج الأخير، ويقال إن المركبتين عتلتان.

٢- عندما لا يتحقق فرض التناظر المركب، والذي يشكل أساسا لكل من نموذج اللاتفاعل (25.12) ونموذج التفاعل (25.20) أو عندما لا يتحقق متطلب الدائرية الأقل قيذا، يصبح اختبار F المعتاد متحازا. وتقدم بعض حزم الحاسب للمستعمل اختيار القيام باختبار رسمي للتناظر المركب أو الدائرية.

وعندما لا تتحقق هذه الشروط، فهناك طريقة لاختبار محافظ وتقريبي تلخص فيما يلي:

أ - قم باختبار F العادي. وإذا أدى هذا الاختبار إلى استنتاج H_0 ، فاقبل هذا الاستنتاج.

ب- وإذا أدى اختبار F العادي إلى H_0 ، ضع $F(1-\alpha, 1, n-1)$ في قاعدة القرار (24.7c) بدلا من $F[1-\alpha, n-1, (n-1)]$. وإذا أدت قاعدة القرار المعلّكة هذه إلى H_0 ، فاقبل

هذا الاستنتاج.

جـ- إذا أدت قاعدة القرار المعدلة إلى H_0 أعد النظر في درجات الحرية في قاعدة القرار المعدلة مستخدماً أحد أساليب ايسلون للتعديل، كما هي موصوفة في المراجع [25.3] و [25.4].

وكبدل، يمكن استخدام أساليب تحليل التباين متعدد المتغيرات شريطة أن يكون $n > r$. انظر مرجع [25.5] لمزيد من المناقشة لهذه المسائل.

٣- اقترحت، أيضاً، نماذج مختلطة مبنية على افتراضات أقل تقييداً فيما يتعلق بمصفوفة التباين- التغاير والمعلم في نموذج التحاين. انظر مرجع [25.6] لمناقشة تلك النماذج.

(٥.٢٥) تصميم قطاع عشوائي معمم

عندما تكون تأثيرات القطاع مثبتة، فإن استخدام نموذج اللاتفاعل في حالة وجود التفاعل بين القطاعات والمعالجات له أثره في تقليل قوة الاختبار وزيادة عرض تقديرات الفترة لتأثيرات المعالجات، مما يجعل التجربة أقل حساسية. وبالإضافة إلى ذلك، هناك حالات يهتم فيها البعض بطبيعة التفاعلات بين القطاعات والمعالجات ويريد أن يحصل على تقديرات لها. ومن الممكن استخدام تصميم يسمح بتفاعل في النموذج حتى عندما تكون تأثيرات القطاع مثبتة، وذلك يسمح بدراسة طبيعة تأثيرات التفاعل. ويسمى هذا التصميم تصميم قطاع عشوائي معمم، وهذا التصميم هو نفس تصميم القطاع العشوائي ماعدا تخصيص d وحدة تجريبية لكل معالجة داخل القطاع. ويزيد التصميم حجم القطاع من r وحدة في حالة تصميم قطاع عشوائي إلى dr وحدة. ويكون لهذه الزيادة في حجم القطاع غالباً تأثير في زيادة تشتت الخطأ التجريبي وذلك عندما يكون عدد الوحدات التجريبية مثبتاً. وفي العلوم الاجتماعية، على أي حال، قد تسبب زيادة حجم القطاع، زيادة معتدلة، حساسية طفيفة في الفعالية. وعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا قطاع واحد من 10 أشخاص من فئة العمر 20-29 بدلا من قطاعين من خمسة أشخاص من فئتي العمر 20-24 و 25-29، على

الترتيب، فسينطوي ذلك، في أنواع عديدة من التجارب، على خسارة طفيفة في الفعالية.

وكما ستوضح بمثال، يتم تحليل تصميم قطاع عشوائي معمم كتحليل دراسة عادية متعددة العوامل بحيث تشكل القطاعات أحد العوامل. وبالتالي لاتواجه أية مشاكل جديدة مع تصميم القطاع العشوائي المعمم فيما يتعلق باختبار تأثيرات المعالجة أو بتقديرها. وسنكون الآن قادرين، بصفة خاصة، على حساب MSE واستخدامه كمقدّر لثبات الخطأ.

مثال

يحتوي الجدول (٧-٢٥) بيانات لتجربة ذات عاملين حيث تُدرس تأثيرات الحافز (عامل A : مستوى عالي، مستوى منخفض، واللهو (عامل B : مستوى عال، مستوى منخفض) على الوقت المطلوب لاستكمال مهمة. مستخدمين ثمانية رجال ولثلاث نساء. وتمّ تخصيص رجلين عشوائيا لكل معالجة، كما تمّ، بصورة مستقلة تخصيص امرأتين عشوائيا لكل معالجة. ومتغير التجميع في قطاعات هنا هو الجنس.

جدول (٧-٢٥) دراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي معمم المشاهدات هي الأوقات اللازمة لاستكمال مهمة

القطاع (الجنس)		
أنثى	ذكر	
		حافز مرتفع:
3	12	لر مرتفع
9	8	
5	7	لر منخفض
9	5	
		حافز منخفض:
11	14	لر مرتفع
9	16	
10	15	لر منخفض
14	13	

ويحتوي كل قطاع ثمانية أشخاص، وقد خصص اثنان عشوائيا لكل معالجة ضمن القطاع. ويتفق المخطط في الجدول (٧-٢٥) مع المخطط في الجدول (٢-٢٢)أ) لدراسة ثلاثية العامل، وللتذكير بهذا الاتفاق، وضعنا القطاعات في أعمدة بدلا من أن تكون كالمعاد في صفوف. وحيث تم اعتبار القطاعات، ومستويات الحافز ومستويات اللهو مثبتة. ونستخدم النموذج ثلاثي العامل بتأثيرات مثبتة (22.14)، برموز معدلة لتلائم السياق الحالي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\rho\beta)_{ik} + (\alpha\beta)_{jk} + (\rho\alpha\beta)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

$$\sum \rho_i = \sum \alpha_j = \sum \beta_k = 0 \text{ ثوابت خاضعة للقيود}$$

$(\rho\alpha)_{ij}$ ، $(\rho\beta)_{ik}$ ، $(\alpha\beta)_{jk}$ و $(\rho\alpha\beta)_{ijk}$ ثوابت خاضعة لقيود أن المجموع فوق أي دليل يساوي الصفر.

ε_{ijk} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$.

$$i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q, k = 1, \dots, r$$

ويكون تحليل التباين لنموذج القطاع العشوائي المعمم (25.25) هو التحاين ثلاثي العامل للمعاد في الجدول (٣-٢٢)، مع تعديل طفيف في الرموز. وقد استخدمت حزمة حاسب للحصول على تحليل التباين في الجدول (٧-٢٥)، ويبين الجدول (٨-٢٥) النتائج. وكما نعلم من الجدول (٤-٢٢)، فإن جميع الإحصاءات تستخدم MSE في المقام. وهذه الإحصاءات F^* مبنية في الجدول (٨-٢٥). ومن أجل $\alpha = 0.01$ ، نحتاج إلى $F(99; 1, 8) = 11.3$ لكل من تلك الاختبارات. ويتضح من نتائج الجدول (٨-٢٥) (انظر القيم p -المعطاة هناك، أيضا) أن القطاعات لا تتفاعل مع المعالجات العاملية وأنه من بين العاملين، يؤثر الحافز، فقط، على الوقت المطلوب لاستكمال المهمة. وعند هذه النقطة يصبح المزيد من التحليل لتأثيرات الحافز مطلوباً.

جدول (٥-٨) تحليل التباين لثقل استكمال مهنة الممثل في جدول (٥-٧)
 $(d=2, b=2, a=2, n=2)$

جدول (٥-٨) تحليل التباين لثقل استكمال مهنة الممثل في جدول (٥-٧) $(d=2, b=2, a=2, n=2)$

P-value	F*	MS	df	SS	مصدر التغير
.08	4.00	$MSBL = 25.00$	$n-1=1$	$SSBL = 25.00$	قطاعات (الجنس)
.002	19.36	$MSA = 121.00$	$a-1=1$	$SSA = 121.00$	عائل A (الجنس)
.70	.16	$MSB = 1.00$	$b-1=1$	$SSB = 1.00$	عائل B (الجنس)
.45	.64	$MSBLA = 4.00$	$(n-1)(a-1)=1$	$SSBLA = 4.00$	التفاعلات BL,A
.15	2.56	$MSBLB = 16.00$	$(n-1)(b-1)=1$	$SSBLB = 16.00$	التفاعلات BL,B
.45	.64	$MSAB = 4.00$	$(a-1)(b-1)=1$	$SSAB = 4.00$	التفاعلات AB
.70	.16	$MSBLAB = 1.00$	$(n-1)(a-1)(b-1)=1$	$SSBLAB = 1.00$	التفاعلات BL,AB
		$MSE = 6.25$	$(d-1)ab=8$	$SSE = 50.00$	أخطاء
			$dnab-1=15$	$SSTO = 222.00$	المجموع
			$F(.99,1,8) = 11.3$		

(٢٠-٢١) استخدام أكثر من متغير تجميعي في قطاعات

أحيانا ، لا يمكن الحصول على انخفاض كبير في تشتت الخطأ التحريسي إلا باستخدام أكثر من متغير واحد لتحديد القطاعات. وعلى سبيل المثال، قد تدعو الحاجة لاستخدام كل من العمر والجنس لتصميم قطاعات.

القطاع	خصائص الوحدات التحريسية
2	عمر 20 - 29 ذكر
2	عمر 20 - 29 أنثى
3	عمر 30 - 39 ذكر
الح	الح

وكمثال آخر، قد يكون كل من الملاحظ ويوم تطبيق المعالجة مفيد كمتغيرات للتجميع في قطاعات:

قطاع	خصائص الوحدات التحريسية
1	مشاهد 1 يوم 1
2	مشاهد 2 يوم 1
3	مشاهد 1 يوم 2
الح	الح

وما لم نرغب في دراسة التأثيرات المنفصلة لكل من متغيرات التجميع في قطاعات، لا تظهر أية مشاكل جديدة عندما نعرف القطاعات بمتغيرين أو أكثر، ونعامل القطاعات ببساطة كقطاعات عادية، ونحسب مجموع مربعات القطاع كالتعاد.

وإذا كنا نريد فصل تأثير كل من متغيرات التجميع في قطاعات، وكانت القطاعات معرفة بطريقة عاملية تماما (مثلا استخدمت تسعة قطاعات عندما تم توظيف ثلاثة ملاحظين وثلاثة أيام للتجميع في قطاعات) فيتعامل التحليل ببساطة مع كل من متغيرات التجميع على أنه عامل ويستخدم الطرق المقدمة في الفصل ٢٢.

وإحدى المشاكل التي تظهر عند استخدام اثنين أو أكثر من متغيرات التجميع في قطاعات هو ما يتطلبه ذلك من عدد كبير من القطاعات. افترض القيام بتجربة، حيث الوحدات التحريسية محلات. ولتخفيض تشتت الخطأ التحريسي إلى مستوى معقول، فقد

يكون من المرغوب تجميع المحلات في ستة صفوف وفقا لحجم المبيعات وستة صفوف وفقا للموقع (مركزي في ضاحية، في ضاحية أخرى، الخ) مما ينتج ستة وثلاثون قطاعا من تركيب متفوري التجميع هذين. وإذا كان المطلوب دراسة ست معالجات، فسنحتاج إلى 216 محلا لهذه التجربة. وفي الغالب يكون استخدام مثل هذا العدد من المحلات مكلفا جدا. وتسمح تصاميم المربع اللاتيني، التي نناقشها في الفصل ٢٩. باستخدام عدد أقل بكثير من التكرارات في هذا النوع من الدراسة. بينما تظل محتفظة بفوائد تخفيض تباين الخطأ كاملة، وذلك من خلال استخدام متفوري التجميع كليهما وبسته فصول لكل منهما.

مراجع ورد ذكرها

- [25.1] Owen, D.B. *Handbook of Statistical Tables*. Reading. Mass.: Addison-Wesley Publishing., 1962.
- [25.2] Cochran, W.G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957, pp. 110-12.
- [25.3] Greenhouse, S.W., and S. Geisser. "On Methods in the Analysis of Profile Data." *Psychometrika* 24 (1959), pp. 95-112.
- [25.4] Huynh, H., and L. Feldt. "Estimation of the Box Correction for Degrees of Freedom from Sample Data in the Randomized Block and Split-Plot Designs" *Journal of Educational Statistics* 1 (1976), pp. 69-82.
- [25.5] Winer, B.J. *Statistical Principles in Experimental Design*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1971.
- [25.6] Hocking, R.R. "A Discussion of the Two-way Mixed Model." *The American Statistician* 27 (1973), pp. 148-52.

مسائل

(١-٢٥) العلاج المضاد للغيثان يعاني مرضى السرطان الذين هم تحت العلاج الكيماوي، عادة، من نوبات غثيان غير مسيطر عليها بالعقاقير التقليدية المعتادة للغيثان. ولتقويم التأثير المقارن لعقارين تجريبيين من العقاقير المضادة للغيثان، تم تجميع 36 من مرضى السرطان في مجموعات من ثلاثة على أساس تاريخهم السابق في تعرضهم لنوبات غثيان حادة وتم تخصيصهم عشوائيا لواحدة من المعالجات الثلاثة في دراسة (مضاعفة التعمية) بينما هم تحت العلاج الكيماوي. كانت المعالجة الأولى عقارا تقليديا مضادا للغيثان، بينما كانت المعالجتان 2 و 3 العقاقير التجريبية. وتم تقويم تأثيرات كل عقار من تقارير المرضى، مرمزة 1 للتحسن و 0 لعدم التحسن وفيما يلي

البيانات:

معالجة (i)				معالجة (j)			
3	2	1	تطاع i	3	2	1	تطاع i
1	0	1	7	1	1	0	1
1	1	0	8	1	1	0	2
1	1	0	9	1	1	1	3
1	0	0	10	1	0	0	4
1	0	1	11	0	1	0	5
1	0	0	12	0	0	0	6

أ - استخدم اختبار كوكران لتحديد ما إذا كانت متوسطات فعاليات العقاقير الثلاثة تختلف أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

ب - قم باختبارات ثنائية متعددة لتصنيف العقاقير الثلاثة وفقا لمتوسط الفعالية، استخدم مستوى معنوية عالى $\alpha = 0.10$. صف استنتاجاتك.

(٢-٢٥) قسائم مُنتج. صممت إحدى وكالات الإعلان تجربة لتقويم فعالية أربع قسائم مجانية مختلفة لأحد المنتجات المنزلية، اشتركت اثنتان وخمسون أسرة. وتمّ تخصيص الأسر في مجموعات حجمها أربع وفقا لمستوى الدخل، وتمّ تخصيصهم عشوائيا لأحد القسائم. و تبين البيانات التالية ما إذا كانت كل أسرة قد استخدمت القسيمة لشراء المنتج في الشهر التالي أم لا (1 : استخدمت القسيمة، 0 : لم تُستخدم القسيمة).

قسمة مجانية (i)					قسمة مجانية (j)				
4	3	2	1	تطاع i	4	3	2	1	تطاع i
0	0	0	0	8	1	1	1	0	1
1	1	1	1	9	1	0	1	0	2
1	1	1	1	10	1	1	1	1	3
1	1	1	1	11	0	0	0	0	4
1	1	0	0	12	1	1	0	0	5
1	1	0	0	13	1	0	0	1	6
					1	1	0	0	7

أ - استخدم اختبار كوكران لتحديد ما إذا كان متوسط استخدام القسيمة مختلفًا بين القسائم الأربع أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل؟ قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار ؟

ب- قم باختبارات ثنائية متعددة لتصنيف القسائم وفقًا لمتوسط استخدامها، استخدم مستوى معنوية عاظمي $\alpha = 0.10$. اكتب استنتاجاتك.

(٣-٢٥) بالعودة إلى مسألتي لتدريب مراجعي الحسابات (٨-٢٤)، (٩-٢٤)، فقد اقترح أنه ينبغي هنا استخدام اختبار فريدمان اللاعلمي.

أ - رتب البيانات ضمن كل قطاع وقم باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة- ماهي القيمة P - للاختبار ؟ هل تتفق نتيجتك مع ما حصلت عليه في المسألة (٩-٢٤)؟.

ب- استخدم أسلوب الاختبار الثنائي المتعدد (٥-٢٥) لتصنيف طرق التدريب الثلاث وفقًا لمتوسط المهارة، استخدم مستوى معنوية عاظمي $\alpha = 0.10$. لخص استنتاجاتك.

(٤-٢٥) بالإشارة إلى مسألة ألم الأسنان (١٢-٢٤) تجاهل البنية العاملية للمعالجات. كان أحد المستشارين قلقًا حول مصداقية فروض النموذج واقترح تحليل الدراسة بواسطة اختبار فريدمان.

أ - رتب البيانات داخل كل قطاع وقم باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = 0.025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة- ماهي القيمة P - للاختبار ؟ ب- استخدم طريقة الاختبارات الثنائية المتعددة (٥-٢٥) لتصنيف المعالجات الأربع وفقًا لمتوسط إسعاف الألم، استخدم مستوى معنوية عاظمي $\alpha = 0.05$. اكتب استنتاجاتك.

(٥-٢٥) بالإشارة إلى مسألة لتدريب مراجعي الحسابات (٨-٢٤) افترض أن الملاحظة $Y_{23} = 89$ مفقودة بسبب مرض المراجع وانسحابه من الدراسة.

أ - أكتب نموذج تخمين لهذه الحالة. أكتب، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ، استخدم 1, - 0, كمتغيرات مؤشرة.

ب - أكتب نموذج الانحدار المنخفض لاختبار الفروق في متوسط درجات المهارة لطرق التدريب الثلاث.

ج - اختر ما إذا كانت متوسطات درجات المهارة لطرق التدريب الثلاث مختلفة أم لا و ذلك بتوفيق النموذجين التام والمنخفض، استخدم $\alpha = 0.05$.
اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د - قارن متوسطي درجتى للمهارة لطريقتى التدريب 2 و 3 باستخدام أسلوب الانحدار، استخدم 95% فترة ثقة.

(٦-٢٥) بالإشارة إلى مسألة الدهن في الحمية الغذائية (٢٤-١٠)، افترض أن المشاهدين 15. $Y_{31} =$ و $Y_{21} = 1.62$ مفقودتان بسبب عدم متابعة الأشخاص المعنيين للحمية الموصوفة.

أ - أكتب نموذج تخمين لهذه الحالة. أكتب نموذج الانحدار المكافئ واستخدم 1, - 0, كمتغيرات مؤشرة.

ب - أكتب نموذج الانحدار المنخفض لاختبار الفروق في متوسط الخفض في مستوى الدهن للحميات الثلاث.

ج - اختر ما إذا كان متوسط الخفض في مستوى الدهن للحميات الثلاث مختلفا أم لا بتوفيق النموذجين التام والمنخفض، استخدم $\alpha = 0.05$.
اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د - قارن متوسط الخفض في مستوى الدهن للحميتين 1 و 3 باستخدام أسلوب الانحدار واستخدم 98% فترة ثقة.

(٧-٢٥) اهراء دهان الطرق. درس قسم الطرق السريعة في إحدى الولايات مميزات الأجزاء لحصة دهانات مختلفة من ثمانية مواقع من الولاية اشتملت الدراسة على الدهان القياسي، المستخدم حاليا، (دهان 1) وأربعة دهانات تجريبية

(دهانات 2, 3, 4, 5) وقد تم اختبار المواقع الثمانية عشوائيا ، مما يعكس التشتت في كثافة المرور عبر الولاية. وفي كل موقع، تم استخدام ترتيب عشوائي للدهانات لسطح الطريق المختار. وبعد فترة مناسبة من التعرض لآثار الطقس والمروء، تم الحصول على مقياس مركب للاهتراء معتبرين كلا من التحمل والرؤية. وفيما يلي بيانات التحمل (الدرجة الأعلى تقابل الصفة الأفضل للتحميل).

الدهان (i)						الدهان (j)					
5	4	3	2	1	قطاع i	5	4	3	2	1	قطاع j
16	22	13	16	14	5	15	18	10	13	11	1
25	33	26	27	25	6	18	30	15	28	20	2
42	55	41	46	43	7	12	16	8	10	8	3
13	20	12	14	13	8	28	41	27	35	20	4

- أ - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) وارسمها بيانيا في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، برسم احتمال طبيعي للرواسب. لخص استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (25.12).
- ب - ارسم بيانيا الاستجابات في مقابل الموقع كما في الشكل (٢٤-١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افتراض اللاتفاعل هنا؟
- ج - قم باختبار توكي لتجميعية تأثيرات الموقع والمعالجة مشروطة على المواقع المختارة، استخدم $\alpha = 0.005$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٥-٨) بالإشارة إلى مسألة اهتراء دهان الطرق (٢٥-٧)، افترض أن نموذج

القطاع العشوائي التجميعي (25.12) ملائم.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختر ما إذا كان متوسط التحمل يختلف للدهانات الخمسة، استخدم

مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما

هي القيمة p - للاختبار؟

ج- قارن متوسط التحمل لكل دهان تجريبي في مقابل الدهان القياسي، استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة، بمعامل ثقة عائلتي 90%. لخص استنتاجاتك.

د - كانت الدهانات 1, 3, 5، يبيض اللون بينما الدهانات 2 و 4 صفراء. قدر الفرق بين متوسطي التحمل لمجموعتي الدهان بفترة ثقة 95%. فسر استنتاجاتك.

(٢٥-٩) نسيج العضلة. درس أحد علماء وظائف الأعضاء تأثيرات ثلاثة كواشف على نسيج العضلة في الكلاب. تم اختبار عشر حظائر في كل منها ثلاثة كلاب عشوائيا وتم تخصيص الكواشف الثلاثة عشوائيا على الكلاب الثلاثة في كل حظيرة، وفيما يلي بيانات تأثير الكواشف (القيمة الأعلى تقابل مستوى النشاط الأعلى)

كاشف (i)				كاشف (j)			
3	2	1	متوسط i	3	2	1	متوسط j
10	9	7	6	14	15	10	1
27	30	24	7	13	12	8	2
20	18	16	8	25	27	21	3
32	29	23	9	17	17	14	4
21	22	18	10	16	18	12	5

أ - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12). ثم ارمها بيانيا في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. لخص استنتاجاتك.

ب- ارم الاستجابات في مقابل الحظائر كما في الشكل (٢٤-١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية فرض اللاتفاعل هنا ؟

ج - قم باختبار توكي لتجميعية تأثيرات الحظائر ولكواشف مشروطة على الحظائر المختارة، استخدم 0.025. α . اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د - بناء على نتائج الجزئين (ب) و(ج)، هل يبدو نموذج القطاع العشوائي مع تفاعل (25.20) أكثر ملاءمة هنا؟ ماهي الفروق العملية في استخدام النموذج (25.12) والنموذج (25.20)؟

(٢٥-١٠) بالإشارة إلى مسألة نسيج العضلة (٢٥-٩). افترض إمكانية تطبيق نموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12).

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختر ما إذا كان متوسط مستوى النشاط مختلفا للكواشف الثلاثة أم لا، استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P - للاختبار؟

ج- نتوقع أن يتشابه الكاشفان 2 و 3 ولكنهما يختلفان عن الكاشف 1. استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بمعامل ثقة عائلي 95% لتقدير:

$$D_1 = \mu_2 - \mu_3$$

$$L_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1$$

ولخص نتائجك.

د - اختر ما إذا كان σ^2 يساوي الصفر، استخدم $\alpha = 0.025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

(٢٥-١١) سأل أحد علماء الاجتماع، بعد معرفته لتصاميم القطاع العشوائي المعممة. لماذا يستخدم أي باحث تصميم قطاع عشوائي تام، يتطلب افتراض عدم تفاعل القطاع والمعالجة في الوقت الذي يمكن فيه تجنب ذلك الفرض في تصميم قطاع عشوائي معمم؟ علق.

(٢٥-١٢) بالإشارة إلى مثال استكمال مهمة في صفحة...

أ - تحقق من تحليل التباين في الجدول (٢٥-٨)، مستخدما بيانات الجدول (٢٥-٧).

ب- قدر الفرق في متوسطات التأثيرات لمستويي الحافزين مستخدما 99% فترة ثقة.

(٢٥-١٣) بالإشارة إلى مسألة لتدريب مراجعي الحسابات (٢٤-٨)، أعادت شركة المحاسبة التجربة مع مجموعة أخرى من 30 مراجعاً، ولكن تمّ تجميعهم هذه المرة في خمسة قطاعات، في كل منها ستة مراجعين. وفي كل قطاع، تمّ تخصيص كل معالجة عشوائية لاثنتين من المراجعين، وكانت النتائج كما يلي:

طريقة تدريب (ج)				طريقة تدريب (ز)			
3	2	1	قطاع	3	2	1	قطاع
84	73	65	4	91	84	74	1
87	78	70		95	78	71	
81	71	64	5	93	75	73	2
74	74	61		98	83	69	
				89	81	75	3
				86	74	67	

افترض أن نموذج القطاع العشوائي المعمم (25.25)، معدلاً من أجل دراسة وحيدة العامل هو نموذج ملائم.

أ - اكتب نموذج قطاع عشوائي معمم لهذا التطبيق.

ب - اكتب جدول تحليل التباين.

ج - اختر ما إذا كانت درجات متوسط المهارة لطرق التدريب الثلاث

مختلفة أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار

والنتيجة. ما هي القيمة P -للاختبار ؟

د - قم بجميع المقارنات الثنائية بين طرق التدريب الثلاث، استخدم

أسلوب توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. لخص استنتاجاتك.

هـ - أوجد الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضاً، برسم

احتمال طبيعي للرواسب. لخص استنتاجاتك.

و - اختر ما إذا كانت القطاعات تتفاعل مع المعالجات أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$.

اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P -للاختبار ؟

تمارين

(٢٥-١٤) استنبط (25.2a) من (25.2).

(٢٥-١٥) استنبط (25.4a) من (25.4) عندما لا يكون هناك قيم متساوية من المشاهدات.

(٢٥-١٦) اعتبر دراسة تصميم قطاع عشوائي تام فيها $r = 2$, $n = 4$, وينطبق عليها نموذج القطاع العشوائي (24.2) مع مفقودة.

استخدم طرق المصفوفة في الفقرة ٨-٦ للحصول على مقدر لـ θ_1 .
(تلميح : اعتبر الدراسة المعطاة في الفقرة (٢١-١).

(٢٥-١٧) بالإشارة إلى مسألة ألم الأسنان (٢٤-١٢). افترض أن الأشخاص الذين استخدموا في الدراسة تم اختيارهم من 8 مدن (قطاعات)، وأن المدن تم اختيارها من مجتمع من المدن. افترض أن نموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) قابل للتطبيق، باستثناء أننا نحتاج لأخذ البناء العامل لتأثيرات المعالجات المثبتة في الاعتبار.

أ - اكتب نموذج قطاع عشوائي لهذه الحالة.

ب - ما هي إحصاءة الاختبار الملائمة لاختبار ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا؟ ماهي إحصاءة الاختبار المناسبة لاختبار التأثيرات الرئيسية؟

(إرشاد: اعتبر اختبار تأثيرات المعالجات للنموذج (25.12).

(٢٥-١٨) استنبط (25.14).

مشاريع

(٢٥-١٩) بالإشارة إلى مسألة اهراء دهان الطريق (٢٥-٧).

أ - قَدِّر مصفوفة التباين - التغاير لمشاهدات المعالجات في قطاع. استخدم (28.8) للحصول على عناصر المصفوفة.

ب- هل تبدو خاصية التناظر المركب (25.17) مناسبة هنا ؟ اشرح.

جـ- هل تبدو خاصية الدائرية (25.19) مناسبة هنا ؟ اشرح.

(٢٠-٢٥) بالإشارة إلى مسألة لسيح العضلة (٩-٢٥).

أ - قَدِّر مصفوفة التباين - التغاير لمشاهدات المعالجات في قطاع.

استخدم (28.8) للحصول على عناصر المصفوفة.

ب- هل تبدو خاصية التناظر المركب (25.17) مناسبة هنا ؟ اشرح.

جـ- هل تبدو خاصية الدائرية (25.19) مناسبة هنا ؟ اشرح.

التصاميم الخاصة والمعينة الجزئية

تتابع في هذا الفصل العناصر الأساسية للتصاميم الخاصة ويشمل ذلك استخدام المعينة الجزئية. وسنبدأ هذا الفصل بدراسة المفهوم العام للتصاميم الخاصة ونصف كيفية اختلاف هذه التصاميم عن التصاميم المتصلبة- وستعرض بالتفصيل للتصاميم الخاصة ثنائية العامل وتحليلها. ونختتم الفصل بدراسة تصاميم المعينة الجزئية.

(٢٦-١) التمييز بين العوامل المتحاذية والمتصلبة

في الدراسات العاملية التي قُدمت حتى الآن، حيث يظهر كل مستوى لعامل واحد مع كل مستوى من مستويات كل عامل آخر، تسمى هذه العوامل متصلبة، وتظهر حالة أخرى عندما تكون العوامل متحاذية، وستوضح الآن التمييز بين العوامل المتحاذية والعوامل المتصلبة ببعض الأمثلة التي تتضمن دراسات ثنائية العامل.

مثال (١)

تدير شركة صناعية كبرى ثلاث مدارس تدريبية إقليمية للميكانيكا، واحدة في كل منطقة من مناطق نشاطها. في كل مدرسة اثنان من المدرسين يدرّس كل منهم فصلا من 15 دارسا (ميكانيكا) في دورة مدتها ثلاثة أسابيع. واهتمت الشركة بتأثير كل من المدرسة (عامل A) والمدرّب (عامل B) على التحصيل الدراسي. ولدراسة تلك التأثيرات، شكّلت الفصول في كل منطقة بالطريقة العادية وتم تخصيصها عشوائيا لأحد المدرسين في المدرسة. وقد جرى ذلك لدورتين وفي نهاية كل دورة تم الحصول على مقياس مناسب للتحصيل الدراسي لكل فصل. ويوضح الجدول (٢٦-١)

النتائج.

ويبدو مخطط الجدول (٢٦-١) مطابقا للدراسة عادية ثنائية العامل بمشاهدين في كل خلية (انظر على سبيل المثال الجدول (١٨-٧). والدراسة في الحقيقة ليست دراسة ثنائية العامل بالمعنى المعتاد.

جدول (٢٦-١) بيانات عينة لدراسة حاضنة ثنائية العامل. - مثال مدرسة التدريب (درجات التحصيل الدراسي للفصل مرفقة)

المجموع	العامل ب (المدرسون)		العامل أ (المدرسة)
	2	1	
	14	25	أتلانتا
	11	29	
$Y_{1.} = 79$	$Y_{12} = 25$	$Y_{11} = 54$	المجموع
	22	11	شيكاجو
	18	6	
$Y_{2.} = 57$	$Y_{22} = 40$	$Y_{21} = 17$	المجموع
	5	17	سان فرانسيسكو
	2	20	
$Y_{3.} = 44$	$Y_{32} = 7$	Y_{21}	المجموع
$Y_{..} = 180$	المجموع		

والسبب في ذلك أن المدرسين في مدرسة أتلانتا لم يدرّسوا، أيضا، في المدرستين الأخريتين وبالمثل بالنسبة لباقي المدرسين ولهذا شملت الدراسة ستة مدرسين. وكانت دراسة عادية ثنائية العامل بستة مدرسين مختلفين تتألف من 18 معالجة كما هو مبين في الجدول (٢٦-٢)، إلا أنه في مثال مدرسة التدريب شملت الدراسة ستة عوامل، فقط، كما يظهر في الجدول (٢٦-٢)ب، حيث تمثل الخلايا الملقاة، معالجات غير

مدروسة. ويحتوي الشكل (٢٦-١) على رسم توضيحي للتصميم الحاضن في مثال مدرسة التدريب شاملا تكرارين اثنين للدراسة.

ويبدو واضحا من الجدول (٢٦-٢) ب أن تصميم التجربة لشال مدرسة التدريب يتضمن ترتيبا عامليا غير كامل من نوع خاص، حيث يظهر كل مستوى من العامل B (المدرّب) مع مستوى واحد، فقط، من مستويات العامل A (المدرسة). وعلى وجه التحديد، يدرّس كل مدرّب هنا في مدرسة واحدة، فقط. ويقال لذلك إن العامل B محضّن ضمن العامل A . وكما ذكر سابقا ففي دراسة عاملية عادية، حيث يظهر كل مستوى من العامل A مع كل مستوى من العامل B يُقال إن A و B متصالبان.

وهناك طريقة أخرى للنظر في التمييز بين التصاميم الحاضنة والمتصالبة، فلنرمز بالرمز، μ_{yz} مثلا، لمتوسط الاستجابة عندما يكون العامل A عند المستوى z والعامل B عند المستوى y . إذا كانت العوامل متصالبة يبقى المستوى z للعامل B نفسه لكل مستويات العامل A . وفي المقابل، إذا كان العامل B محضنا ضمن العامل A ، فليس هناك ما هو مشترك بين المستوى z للعامل B مع كون العامل A عند المستوى 1 وبين المستوى z للعامل B مع كونه العامل A عند المستوى 2، وهلم جرا. وفي دراسة عاملية متصالبة لتأثيرات السعر (\$2.49 - \$1.99) ومستوى الدعاية (عالي - متخصص). - على سبيل المثال - فإن مستوى دعاية معين يكون هو نفسه بغض النظر عن السعر الذي يظهر معه، وبالمثل بالنسبة لمستويات السعر. وعلى الوجه الآخر نرى في التصميم الحاضن في مثال مدرسة التدريب أن المدرّب الأول في المدرسة ليس هو نفسه المدرّب الأول في المدرسة ٢، وهكذا.

جدول (٢٦-٢) توضيح للعوامل المتصالبة والمتحاذية - مثال مدرسة التدريب

(أ) العوامل المتصالبة						
المدرّب العامل (ب)						
المدرسة (العامل أ)	1	2	3	4	5	6
أتلانتا						
شيكاغو						
سان فرانسيسكو						

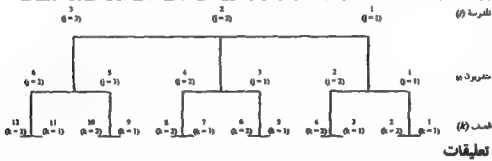
(ب) العوامل المتحاذية

المترب العامل (ب)						
6	5	4	3	2	1	المدرسة (العامل أ)
						أبلانا
						شيكافو
						سان فرانسيسكو

مثال (٢)

اهتم أحد المحللين بتأثيرات المنطقة (عامل A) والقسم (عامل B) على انتشار المعلومات حول مُنتج جديد. وقد تمَّ الحصول على المعلومات من عينات من أسر في أقسام مختلفة داخل مناطق مختارة. وحيث أن القسم المسمى 1 في منطقة ما يختلف عن القسم المسمى 1 في مناطق أخرى، وكذلك الأمر بالنسبة للأقسام الأخرى، فإن الأقسام تكون هنا محضنة داخل المناطق.

شكل (٢٦-١) تمثيل بياني لتصميم حاحن ثنائي العامل - مثال مدرسة التدريب



- ١- يكون التمييز بين التصميمات الحاضنة والمتصلية في الغالب دقيقاً، ففي المثال،
- ٢ إذا مُثلت أقسام كل منطقة بمستويات متوسط دخل محددة وبحيث يكون الدخل المتوسط للقسم الأول في كل منطقة \$9000 - \$5000 مثلاً والدخل المتوسط للقسم الثاني \$19,999 - \$10,000 وهكذا لبقية الأقسام. فيمكن النظر للتصميم على أنه متصلاب. وتكون العوامل هي المنطقة، والمستوى الاقتصادي للقسم، وهي عوامل متصلة باعتبار أن مستوى اقتصادياً معيناً يبقى نفسه في جميع المناطق والعكس

بالعكس.

٢- تظهر العوامل للمتقاضنة في الدراسات التي تعتمد على الملاحظة حيث لاحيلة للباحث في واقع العوامل قيد الدراسة، أو في تجارب يمكن للباحث فيها أن يتدبر، فقط، بعض العوامل. وكما نذكر، فإن العوامل التي لا حيلة لنا فيها تسمى عوامل تصنيف، تميزا لها عن عوامل تجريبية يمكن تخصيصها للوحدات التجريبية كما نريد. ويشكل المثال ٢ دراسة تعتمد على الملاحظة حيث كل من المنطقة والقسم هي عوامل تصنيف لأن الأسر (وحدات الدراسة) لم تُخصص عشوائيا لأي من المنطقة أو القسم. وتشكل المدرسة في المثال 1 عامل تصنيف لأن فصول المدرسة (وهي الوحدات التجريبية) قد تم تشكيلها من ميكانيكيين من المنطقة التي تقع فيها المدرسة. والمدرسون في هذا المثال هم عامل تجريبي باعتبارهم خُصِّصوا عشوائيا لفصل ما، ولكن النتائج كان تصميمها حاضنا لأن العشبية اقتضرت على الفصول داخل مدرسة واحدة.

(٢٦-٢) تصاميم حاضنة ثنائية العامل

سنعتبر الآن تصاميم حاضنة تتضمن عاملين حيث يحتضن أحدهما الآخر، وحرصا على الاتساق، سنعتبر دائما الحالة التي يحتضن فيها العامل A العامل B. وسنفرض بداية أن تأثيري العاملين كليهما مثبت، ولكننا سنعتبر فيما بعد، أيضا، حالة تأثيرات عشوائية. وسنفرض عبر المناقشة بكاملها أن جميع متوسطات المعالجات متساوية الأهمية.

تطوير عناصر نموذج

سنستخدم الرموز المعتادة للدراسة ثنائية العامل، إفتراض أن μ_i ترمز لمتوسط الاستجابة عندما يكون العامل A عند المستوى i ($i = 1, \dots, a$) ويكون العامل B عند المستوى j ($j = 1, \dots, b$) وكالعادة، عندما تكون كل متوسطات الاستجابة متساوية الأهمية، نعرف:

$$\mu_i = \frac{\sum_j \mu_{ij}}{b} \quad (26.1)$$

ويعمل μ_i ، في مثال مدرسة التدريب، متوسط درجة التعليم في مدرسة أتلانتا مأخوذاً فوق المدرسين في تلك المدرسة. ويُفسر μ_2 ، μ_3 بصورة مشابهة. لاحظ مرة أخرى أن μ_i يمثل متوسط درجات التعلم وهو متوسط محسوب فوق المدرسين المختلفين. نعرف كالعادة التأثير الرئيس للمستوى i للعامل A على الشكل:

حيث:

$$\alpha_i = \mu_i - \mu \quad (26.2)$$

$$\mu = \frac{\sum_i \sum_j \mu_{ij}}{ab} = \frac{\sum_i \mu_i}{a} \quad (26.3)$$

هو المتوسط العام للاستجابة. ويتبع من (26.3) أن:

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

وفي التصميم الحاضن لامتني لاستخدام مركبة نموذج للتأثير الرئيس للمستوى z للعامل B . ولإدراك السبب اعتبر مرة أخرى مثال مدرسة التدريب. فيما أن كل مدرسة تستخدم مدرّبين مختلفين، فالمدرّبون z في المدارس المختلفة ليسوا المدرّبين أنفسهم. ولا يكون هناك معنى لاعتبار التأثير المتوسط للمدرّب فوق جميع المدارس. ولتحتاج، بدلاً من ذلك، لاعتبار التأثيرات المفردة لكل مدرّب في كل مدرسة. ونرمز لتلك التأثيرات المفردة بالرمز $\beta_{z(i)}$ ، حيث يشير الدليل $z(i)$ إلى أن المستوى z للعامل B محض داخل المستوى i للعامل A . ونعرف $\beta_{z(i)}$ كما يلي:

$$\beta_{z(i)} = \mu_{iz} - \mu_i \quad (26.4)$$

ويمكن إعادة كتابتها باستخدام (26.2) لتصبح:

$$\beta_{z(i)} = \mu_{iz} - \alpha_i - \mu \quad (26.5a)$$

ويتبع من (26.5) و(26.1)، أن:

$$\sum_j \beta_{z(i)} = 0 \quad i = 1, \dots, a \quad (26.6)$$

ويمكن بوضوح رؤية معنى $\beta_{z(i)}$ من (26.5). وبالإشارة إلى مثال مدرسة التدريب يكون $\beta_{z(i)}$ ببساطة الفرق بين متوسط درجة التعلم للمدرّب z من المدرسة i والمتوسط الإجمالي لمتوسطات درجة التعلم مأخوذاً فوق جميع المدرّبين في تلك المدرسة. وهكذا يُقاس تأثير المدرّب z من المدرسة i بالنسبة إلى المتوسط الإجمالي لدرجة التعلم الخاص

بالمدرسة التي يدرس فيها. وسنسمي التأثير النوعي للمستوى z للعامل B محضنا ضمن المستوى i للعامل A .

لقد عبرنا الآن عن متوسط الاستجابة μ_{ij} بدلالة المتوسط الإجمالي، والتأثير الرئيس للمستوى i للعامل A ، والتأثير النوعي للمستوى z للعامل B محضنا ضمن المستوى i للعامل A ، الأمر الذي يمكن رؤيته من (26.5a):

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{z(j)} = \mu_{..} + (\mu_{i.} - \mu_{..}) + (\mu_{ij} - \mu_{i.}) \quad (26.7)$$

وفي مثال مدرسة التدريب جرى التعبير عن متوسط درجة التعلم للمدرّب i في المدرسة i بدلالة المتوسط الإجمالي والتأثير الرئيس للمدرسة i والتأثير النوعي للمدرّب z ضمن المدرسة i .

ولاستكمال النموذج نحتاج، فقط، إلى إضافة حد خطأ عشوائي. وسنرمز لهذا الحد بالرمز ϵ_{ijk} حيث يمثل الدليل الأول التكرار k ويحدد تركيبة العوامل في التكرار k . وسنستخدم الآن الدليل (i, j) إذ يمكن النظر إلى التكرارات الخاصة بأي مركب من العوامل (i, j) ، على أنها محضنة ضمن ذلك المركب (i, j) . وفي مثالنا عن مدرسة التدريب، كانت التكرارات هي الفصول المختلفة من الميكانيكيين الذين تم تدريبهم بواسطة المدرّب نفسه في مدرسة معينة - وبما أن الفصل الأول للمدرّب z من المدرسة i يختلف عن الفصل الأول لأي مركب مدرسة - مدرّب، وكذلك الأمر بالنسبة للفصل الثاني، فيمكن اعتبار الفصول محضنة ضمن تراكيب المدرسة - المدرّب. ويوضح الشكل (٢٦-١) هذا التحضين.

لم نشر حتى الآن لتحضين التكرارات ضمن تراكيب العوامل لأنه لم يكن ضرورياً. ومع ذلك، وفي ظل الاعتبارات الراهنة للعوامل المحضنة، سيكون مفيداً التعرف على تحضين متغير التكرارات ضمن تراكيب العوامل.

نموذج تصميم حاضن

لنرمز بالرمز Y_{ijk} للملاحظة k عندما يكون العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى z . وسنفترض أن هناك n تكراراً لكل تركيب من العوامل، أي k

$n, 1, \dots, a$ و $i = 1, \dots, b$ و $j = 1, \dots, b$. وعندما تكون تأثيرات العاملين A ، B ، مثبتة، يكون نموذج التصميم الحاضن المناسب:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad (26.8)$$

حيث:

$\mu_{..}$ مقدار ثابت

α_i مقادير ثابتة خاضعة للقيود $\sum \alpha_i = 0$

β_{jk} مقادير ثابتة خاضعة للقيود $\sum_j \beta_{jk} = 0$ من أجل كل i .

ϵ_{ijk} متغيرات مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$

وتكون القيمة المتوقعة والتباين للملاحظات Y_{ijk} في نموذج التصميم الحاضن:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{jk} \quad (26.8a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2 \quad (26.8b)$$

وهكذا يكون لجميع الملاحظات تباين ثابت. وفضلا عن ذلك، ففي هذا النموذج

تكون الملاحظات Y_{ijk} مستقلة وتوزع توزيعاً طبيعياً .

تعليقات

١- ليس ضرورياً مانراه في (26.8) من تساوي عدد التكرارات لجميع تراكيب العوامل، ولا بقاء عدد مستويات العامل المحضن B (عدد المدرسين في مثال مدرسة التدريب) نفسه لكل مستوى من العامل A (المدرسة في هذا المثال). وسنتناقش فيما بعد إزالة بعض هذه القيود. ونكتفي الآن بالإشارة، فقط، إلى أن الحسابات تصبح أكثر تعقيداً عند التخلص من تلك القيود.

٢- لا يوجد حد تفاعل في نموذج التصميم الحاضن (26.8)، وليس هناك حاجة له، ذلك لأن العامل B محضن ضمن العامل A وليس متصالياً معه، وللتعبير عن ذلك بصورة مختلفة إلى حد ما نقول إنه بالنسبة للمدرسة للتدريب لا يمكن تقدير تفاعل بين المدرس والمدرسة في الوقت الذي يدرس فيه كل مدرّس في مدرسة واحدة، فقط. ويستوعب تأثير المدرس β_{jk} ، حيث أنه عدد للمدرسة معطاة i ، تأثير التفاعل بين ذلك المدرس j بالذات (في المدرسة i) والمدرسة i ، ولكن لا يمكن فصل تأثير التفاعل هذا

في تصميم حاضن.

٣- بصفة عامة لا تكون متوسطات مستويات العوامل μ_i في تصميم حاضن نفسها كالتوسطات المقابلة في تصميم متصالب. ونذكر أنه في تصميم حاضن تُحسب المتوسطات μ_i بأخذ المتوسط فوق بعض المستويات المميزة للعامل B ، فقط. وبالإشارة إلى مثال مدرسة التدريب، حصلنا على μ_i بأخذ المتوسط فوق أولئك المدرسين الذين يدرسون في المدرسة i ، فقط. وفي المقابل، نحصل على المتوسط μ_i في تصميم متصالب، بأخذ المتوسط فوق جميع المدرسين الذين شملتهم الدراسة.

تأثيرات العامل العشوائي

إذا كان لكل من A و B مستويات عامل عشوائية نعدّل نموذج التصميم الحاضن (26.8) بحيث تصبح α_i و β_{jk} متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بتوقعات 0 وتباينات σ_α^2 و σ_β^2 و σ_ϵ^2 على الترتيب. وهكذا يُفرض أن جميع β_{jk} لها التباين نفسه σ_β^2 ويتم افتراض أن جميع β_{jk} لها التباين نفسه، أيضاً، إذا كان العامل B ، فقط، عشوائياً. ومن المهم التحقق مما إذا كان هذا الافتراض مناسباً، فمن الممكن جداً أن تكون متوسطات الاستجابة $\mu_{11}, \mu_{12}, \dots$ في أحد مستويات العامل A (نبات - مدرسة - مدينة - الخ) مختلفة في قشورها عما هو في المستويات الأخرى للعامل A (نباتات أخرى، مدرّس ومدن، الخ). وقد نوقشت اختبارات تساوي التباين في الفقرة ١٦-٢.

(٢٦-٣) تحليل التباين لتصميم حاضنة ثنائية العامل

توليف نموذج. يتم الحصول على تقديرات المربعات الصغرى للمعالم في نموذج التصميم الحاضن (26.8) بالطريقة العادية. وتكون تقديرات المربعات الصغرى، مستخدمين رموزنا المعتادة لبيانات العينة في دراسات عاملية، كما يلي:

المعلمة	المقدّر	
$\mu_{..}$	$\bar{y}_{...}$	(26.9a)
α_i	$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$	(26.9b)
β_{jk}	$\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{..}$	(26.9c)

وتكون القيم المتوقعة:

$$\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.l} - \bar{Y}_{..}) = \bar{Y}_{.j} \quad (26.10)$$

وتكون الرواسب:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{.j} \quad (26.11)$$

مجموع المربعات

نحصل على تحليل التباين لنموذج التصميم الحاضن (26.8) بتفكيك الانحراف الكلي كما يلي:

$$\underbrace{Y_{ijk} - \bar{Y}_{..}}_{\text{الانحراف الكلي}} = \underbrace{\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}}_{\text{التأثير الرئيس}} + \underbrace{\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}}_{\text{التأثير الفرعي لـ } B} + \underbrace{Y_{ijk} - \bar{Y}_{.j}}_{\text{الراسب}} \quad (26.12)$$

عندما يكون A
عند المستوى i

وعند تربيع (26.12) والجمع فوق جميع المشاهدات، تسقط جميع الحدود الجذائية ونحصل على:

$$SSTO = SSA + SSB(A) + SSE$$

حيث:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (26.13a)$$

$$SSA = bn \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (26.13b)$$

$$SSB(A) = n \sum_j \sum_i (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (26.13c)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{.j})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}^2 \quad (26.13d)$$

ويكون $SSTO$ مجموع المربعات الكلي للمتداد، SSA مجموع مربعات العامل A المتداد وهو يعكس تشتت متوسطات مستويات العامل المقدر $\bar{Y}_{i.}$.

ويكون $SSB(A)$ مجموع مربعات العامل B ، وتعكس الرموز حقيقة أن العامل B محضن ضمن العامل A . ويتكون $SSB(A)$ من حدود مثل:

$$n \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (26.14)$$

وهي ببساطة مجموع مربعات العامل B المعتاد، عندما يكون العامل A عند المستوى i ، وتُجمع تلك الحدود عندئذ فوق جميع مستويات العامل A .

وأخيراً، فإن مجموع مربعات الخطأ SSE هو، كالعادة، مجموع مربعات الرواسب، وهو يعكس تشتت كل مشاهدة Y_{ij} حول متوسط المعالجة المقدّر المقابل لها $\bar{Y}_{i.}$. وبصورة بديلة يمكن النظر إلى SSE على أنه مكون من حدود مثل:

$$\sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i.})^2 \quad (26.15)$$

وهي ببساطة مجموع مربعات الخطأ العادية ضمن المستوى i للعامل A ، ثم تُجمع هذه الحدود فوق جميع مستويات العامل A .

وهكذا يمكن النظر إلى تصميم حاضن ذي عاملين على أنه سلسلة من دراسات وحيدة العامل عند المستويات المتتابعة للعامل الآخر. ووفقاً لمثال مدرسة التدريب، تؤدي دراسة تأثيرات المدرسين (B) داخل أي مدرسة معطاة (A_i) إلى مجاميع المربعات المعتادة للمدرسين وإلى أخطاء، وذلك في تحليل تباین أحادي العامل ضمن المدرسة (A_i)، ونرمز لها بـ $SSB(A_i)$ و $SSE(A_i)$.

$$SSB(A_i) = \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i.})^2 \quad SSE(A_i) = n \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

وتجميع هذه المقادير يُنتج $SSB(A)$ و SSE على الترتيب. ويكون مجموع مربعات ما بين المدارس SSA ، فقط، هو الذي يُفصح عن العامل الآخر. ويوضح الجدول (٢٦-٣) هذه العلاقة بين تحليل التباين أحادي العامل لكل مدرسة وتحليل التباين ثنائي العامل للتصميم الحافض.

صيغ حسابية. يمكن استخدام الصيغ الآتية للحساب اليدوي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{abn} \quad (26.16a)$$

$$SSA = \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn} - \frac{Y^2}{abn} \quad (26.16b)$$

$$SSB(A) = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} - \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn} \quad (26.16c)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} \quad (26.16d)$$

جدول ٢ (٣-٢) تحليل التباين بين تباين عاملين متفاعلين وتباينات عامل واحد - مثال مدرسة الفدرسية.

تباين عاملين متفاعلين	تباينات عامل واحد				مصدر التغير
	مدرسة ٣	مدرسة ٢	مدرسة ١		
df SS	df SS	df SS	df SS	df SS	مصدر التغير
3(2 - 1) $SSB(A)$	2 - 1 $SSB(A_1)$	2 - 1 $SSB(A_2)$	2 - 1 $SSB(A_3)$	2 - 1 $SSB(A_1)$	ما بين المدرسين
3(2)(2 - 1) SSE	2(2 - 1) $SSE(A_1)$	2(2 - 1) $SSE(A_2)$	2(2 - 1) $SSE(A_3)$	2(2 - 1) $SSE(A_1)$	(ضمن المدرسين) المعلمين
2(2) - 1 $SSTO(A_1)$	2(2) - 1 $SSTO(A_1)$	2(2) - 1 $SSTO(A_2)$	2(2) - 1 $SSTO(A_3)$	2(2) - 1 $SSTO(A_1)$	المجموع ضمن المدرسين
3 - 1 SSA					ما بين المدرسين
3(2)(2) - 1 $SSTO$					المجموع

درجات الحرية

يمكن استنتاج درجات الحرية المصاحبة لمجموع المربعات المختلفة مباشرة من العلاقات المعروفة آنفة الذكر، وحيث أن هناك abn مشاهدة فتكون درجات الحرية المصاحبة لـ $SSTO$ هي $abn-1$. ولأي مستوى للعامل A يوجد $b(n-1)$ درجة حرية مصاحبة لمجموع مربعات الخطأ، وبالمجموع فوق جميع مستويات العامل A لابد من وجود $ab(n-1)$ درجة حرية مصاحبة لـ SSE . وبالمثل، لأي مستوى للعامل A ، لدينا $b-1$ درجة حرية مصاحبة لمجموع مربعات العامل B . وبالتجميع فوق كل مستويات العامل A نجد بالمثال أنه لابد من وجود $a(b-1)$ درجة حرية مصاحبة لـ $SSB(A)$. وأخيرا، بما أنه يوجد a مستوى للعامل A فلا بد من وجود $a-1$ درجة حرية مصاحبة لـ SSA .

ويوضح الجدول (٢٦-٣) هذا التجميع لدرجات الحرية لمثال مدرسة التدريب، ويقدم الجدول (٢٦-٤) جدول تحليل التباين العام لنموذج التصميم الحافض ثنائي العامل (26.8) حيث العامل B محض ضمن العامل A .

جدول (٢٦-٤) جدول تحليل لنموذج محض ذي عاملين مع تأثيرات مثبتة (B محض ضمن A)					
مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$	
العامل A	$SSA = bn\sum(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$	$a-1$	MSA	$\sigma^2 + bn\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$	
العامل B (ضمن A)	$SSB(A) = n\sum\sum(\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$	$a(b-1)$	$MSB(A)$	$\sigma^2 + n\frac{\sum\sum\beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$	
الخطأ	$SSE = \sum\sum\sum(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$	$ab(n-1)$	MSE	σ^2	
المجموع	$SSTO = \sum\sum\sum(Y_{ijk} - \bar{Y})^2$	$abn-1$			

مثال

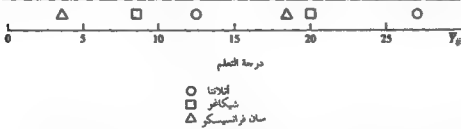
اعتبرت كل من المدارس والمدرسين في مثال مدرسة التدريب جدول (٢٦-١) عوامل ذات تأثيرات مثبتة، ولذا يعتبر النموذج (26.8) مناسباً. يوضح شكل (٢٦-٢) ربما خطياً لتوسطات المعالجات المقترنة \bar{Y}_{ij} لمثال مدرسة التدريب. لاحظ أن

هذا الرسم ليس في هيئة دراسة متصلة ثنائية العامل بسبب استخدام مدرّبين مختلفين في المدارس المختلفة. ويقترح الشكل (٢٦-٧) اختلافات قوية بين المدرّبين ضمن مدرسة، وأيضاً، إمكانية فروق في متوسطات التعلم بين المدارس.

ولتحليل تلك التأثيرات رسمياً، سنبدأ بالحصول على تحليل التباين. ونحصل على مجاميع المربعات باستخدام الصيغ الحسابية (26.6) كما يلي:

$$\begin{aligned} SSTO &= (25)^2 + (29)^2 + (14)^2 + \dots + (2)^2 - \frac{(180)^2}{12} \\ &= 3,466 - 2,700 = 766 \\ SSA &= \frac{1}{3} [(79)^2 + (57)^2 + (44)^2] - 2,700 \\ &= 2,856.5 - 2,700 = 156.5 \end{aligned}$$

شكل (٢٦-٧) رسم خط لمتوسطات المعالجات المقطرة - مثال لمدرسة التدريب



$$\begin{aligned} SSB(A) &= \frac{1}{2} [(54)^2 + (25)^2 + \dots + (7)^2] - 2,856.5 \\ &= 3,424 - 2,856.5 = 567.5 \\ SSE &= 3,466 - 3,424 = 42 \end{aligned}$$

ويحتوي الجدول (٢٦-٥) على تحليل التباين.

العلاقة بين مجاميع المربعات المحضنة والمتصلة

إذا لم يتوفر برنامج حاسب لتحليل التباين لتصاميم حاضنة وكان لدينا برنامج لعوامل متصلة، فيمكن، وبمَشَقَّة بسيطة، استخدام هذا الأخير عندما يكون عدد مستويات العامل المحضن B نفسه لكل مستوى للعامل A ، ويكون عدد التكرارات نفسه لجميع تراكيب العوامل. يسمى هذا النوع من التصاميم الحاضنة بالتوازن. ويحتوي الجدول (٢٦-٦) على تحليل التباين (الحظائي) من دورة تشغيل حاسب لمثال مدرسة التدريب في الجدول (٢٦-١) عاجلت العاملين على أنهما متصلين.

وعندما نقارن تحليل التباين الخطأىء هذا بالتحليل الصحيح في جدول (٢٦-٥)، نلاحظ أن $SSTO$ ، SSA و SSE تبقى نفسها في كلى الحالتين. وكذلك درجات الحرية المصاحبة، ويكون الفرق بين تحليلي التباين هو أن التحليل المحضّن لا يتضمن مجموع مربعات تفاعل. ومع هذا لو استعملنا العلاقة:

$$\underbrace{SSB(A)}_{\text{محصن}} = \underbrace{SSB}_{\text{متصلب}} + \underbrace{SSAB}_{\text{محصن}} \quad (26.17)$$

وقمنا بالشئء نفسه بالنسبة لدرجات الحرية فسنحصل على مجموع المربعات الصحيح للعامل المحضّن B ، ولدرجات الحرية الخاصة به:

$$SSB(A) = 108.0 + 459.5 = 567.5$$

$$df = 1 + 2 = 3$$

جدول (٢٦-٥) تخمين تصميم حافض ذي عاملين - مثال مدرسة التهرب

(أ) جدول التباين			
مصدر التغير	SS	df	MS
المدارس (A)	$SSA = 156.5$	2	78.25
متدربون ضمن المدارس [B(A)]	$SSB(A) = 567.5$	3	189.17
الخطأ [E]	$SSE = 42.0$	6	7.00
المجموع	$SSTO = 42.0$	11	
(ب) تفكيك $SSB(A)$			
مصدر التغير	$SSB(A_i)$	df	$MSB(A_i)$
المدرّبون، أتلاتنا	$SSA = 156.5$	1	210.25
المدرّبون، شيكاغو	$SSB(A) = 567.5$	1	132.25
المدرّبون، سان فرانسيسكو	$SSE = 42.0$	1	225.00
المجموع	$SSTO = 42.0$	3	

الجدول (٢٦-٦) تحاين عامل متصالب غير تصميم محضين ذي عاملين - مثال مدرسة التدريب			
مصدر التغير	SS	df	MS
للمدارس (A)	SSA = 156.5	2	78.25
المدرّبون (B)	SSB = 108.0	1	108.00
تفاعلات المدرسة-المدرّب (AB)	SSAB = 459.5	2	229.75
الخطأ (E)	SSE = 42.0	6	7.00
المجموع	SSTO = 42.0	11	

وباستخدام العلاقة (26.17)، يمكن أن نحصل بسهولة على مجاميع المربعات ودرجات الحرية المناسبة لتصميم حاضن متوازن ذي عاملين من حزمة حاسب خاصة بعوامل متصالبة.

اختبارات تأثيرات عامل

اختبارات تأثيرات عامل في دراسة محضنة ثنائية العامل هي اختبارات لا صعوبة فيها. وتحدد إحصاء الاختبار المناسبة، كما في دراسة ثنائية العامل متصالبة، بمقارنة قيم التوقع لمتوسطات المربعات في جدول التحاين. وتوقع متوسط المربعات في نموذج التأثيرات المحضنة (26.8) مبيّنة في الجدول (٢٦-٤). ويمكن الحصول عليها بعمليات شاقة إلى حد ما.

ولا نوضح هذه العمليات، لأننا سنقدم في الفصل ٢٧ طريقة بسيطة نسبياً لإيجاد توقع متوسط المربعات لأي تصميم حاضن متوازن.

ويشير العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٦-٤) إلى أن الاختبار الخاص بالتأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التأثيرات المثلثة (26.8) وهو الاختبار:

$$H_0: \text{جميع الـ } \alpha \text{ مساوية للصفر} \quad (26.18a)$$

$$\text{ليست جميع الـ } \alpha \text{ مساوية للصفر} \quad H_a:$$

مبني على إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSA}{MSE} \quad (26.18b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط مستوى الأهمية عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha; a - 1, (n - 1)ab] \quad (26.18c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* > F[1 - \alpha; a - 1, (n - 1)ab]$$

وبصورة مشابهة لاختبار تأثيرات العامل B:

$$H_0: \text{جميع الـ } \beta_{X0} \text{ مساوية للصفر} \quad (26.19a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \beta_{X0} \text{ مساوية للصفر}$$

فإن احصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSB(A)}{MSE} \quad (26.19b)$$

وقاعدة القرار المناسبة هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha; a(b-1), (n-1)ab] \quad (26.19c)$$

$$H_a: \text{استتج } F^* > F[1 - \alpha; a(b-1), (n-1)ab]$$

مثال. نعود إلى مثال مدرسة التدريب، فبناء على تحليل التباين في الجدول (٢٦-٥)،

كان أول اختبار قمنا به هو لتحديد ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للمدرسة موجودة

أم لا. والبدائل معطاة في (26.18a)، وإحصاءة الاختبار (26.18b) هنا هي:

$$F^* = \frac{78.25}{7.00} = 11.2$$

وإذا ضبط مستوى الأهمية عند $\alpha = .05$ ، ونحتاج بالتالي إلى $F(.95; 2, 6) = 5.14$.

وبما أن $11.2 > 5.14$ ، فقد استنتجنا أن المدارس الثلاث تختلف في متوسطات

تأثيرات التعلم والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.0094.

وبعد ذلك قمنا باختبار الفروق في متوسطات تأثيرات التعلم بين المدرسين ضمن

كل مدرسة. والبدائل معطاة في (26.19a) أو إحصاءة الاختبار (26.19a) هي هنا:

$$F^* = \frac{189.17}{7.00} = 27.0$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F(.95; 3, 6) = 4.76$ ، وبما أن $27.0 > 4.76$ ، فقد

استنتجنا أن المدرسين ضمن كل مدرسة يختلفون فيما يتعلق بمتوسطات تأثيرات التعلم والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.0007.

تعليقات

١- التعبير البديل للفرضية H_0 في (26.19a) بدلالة متوسطات المعالجات μ_{ij} هو:

$$H_0: \mu_{11} = \mu_{12} = \dots = \mu_{1b}; \mu_{21} = \mu_{22} = \dots = \mu_{2b}; \dots \quad (26.20)$$

وهكذا تعرض H_0 لمثال مدرسة التدريب أن متوسطات درجات التعلم لجميع المدرسين في أتلانتا هي نفسها، وبصورة مماثلة بالنسبة لبقية المدارس، وهي لا تعرض أن متوسطات درجات التعلم لجميع المدرسين في المدارس المختلفة تبقى نفسها.

٢- إذا استنتجنا أن تأثيرات العامل B موجودة، فسنرغب في الغالب التعرف على ما إذا كانت موجودة بالنسبة لجميع مستويات العامل A أم أنها موجودة في بعض منها، فقط.

(في بعض الحالات، قد نرغب في الحقيقة الولوج مباشرة إلى هذا التحليل) وبالإشارة إلى مثال مدرسة التدريب، ستكون المسألة هي ما إذا كانت تأثيرات المدرسين مختلفة في جميع المدارس أم في بعض منها، فقط. وكما لاحظنا سابقاً، يتألف $SSB(A)$ في الجدول (26.5) من مجاميع مربعات للمدرسين ضمن المدارس كل بمفردها، ويمكن استخدام مركبة مجاميع المربعات هذه لاختبار تأثيرات المدرسين ضمن كل مدرسة. ويتضمن الجدول (26.5) مركبة مجاميع المربعات المناسبة. واختبار وجود فروق بين مدرسي مدرسة أتلانتا، مثلاً، نستخدم إحصاءة الاختبار $30.0 = MSB(A) / MSE = 210.25 / 7.00$ وعند مستوى الأهمية $\alpha = 0.025$ ، نحتاج إلى $F(95; 1, 6) = 5.99$. وبما أن $30.0 > 5.99$ ، فقد استنتجنا وجود فرق بين المدرسين في أتلانتا فيما يتعلق بمتوسطي تأثيرات التعلم. وباستخدام مستوى الأهمية نفسه في كل مرة، ثم الوصول إلى نتائج مماثلة بالنسبة للمدرستين الأخريتين. ومستوى الأهمية العالمي للاختبارات الثلاثة وفقاً لتباينة بونفرونوني هو 0.15.

٣- إذا احتل فرض ثبات تباين الخطأ في مثال مدرسة التدريب وكانت التباينات غير متساوية بالنسبة للمدارس الثلاث، فلا يزال من الممكن دراسة الفروق بين تأثيرات

المدرسين ضمن كل مدرسة من خلال تحليلات تباين منفصلة لكل مدرسة.

تأثيرات عامل عشوائية

لا تعود إحصاءة الاختبار (26.18b) الخاصة بتأثيرات العامل A الرئيسة إحصاءة اختبار مناسبة إذا كانت أي من تأثيري العامل أو كلاهما عشوائيا . ويعطى الجدول (٧-٢٦) متوسطات المربعات لهذه الحالات وكذلك إحصاءات الاختبار المناسبة.

(٧-٢٦) تقويم مصداقية نموذج تصميم حاضن

الاجراءات التشخيصية الموصوفة سابقا قابلة للتطبيق تماما لفحص ما إذا كان نموذج التصميم الحاضن (26.8) مناسباً . فالرواسب في (26.11):

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{Y}_{..} \quad (26.21)$$

يمكن فحصها كالمعاد - من أجل الطبيعية، ثبات تباين الخطأ واستقلال حدود الخطأ. وعلى وجه الخصوص، فإن الرسوم النقطية المصطفة للرواسب من أجل كل مستوى من مستويات العامل A قد يكون مساعدا لفحص ما إذا كان تباين حدود الخطأ ثابتا من أجل مستويات العامل A المختلفة، التي احتضنت العامل B .

جدول (٧-٢٦) توقع متوسطات المربعات لتصميم حاشنة ثنائية العامل مع تأثيرات عشوائية للعوامل (A محض ضمن B).

توقع متوسط مربعات عشوائي		
متوسط المربعات	A مثبت، B عشوائي	A مثبت، B عشوائي
MSA	$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1} \Sigma \sigma_i^2 + n\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + bn\sigma_\alpha^2 + n\sigma_\beta^2$
$MSB(A)$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$
MSA	σ^2	σ^2
إحصاءة الاختبار المناسبة		
اختبار	A مثبت، B عشوائي	A مثبت، B عشوائي
العامل A	$MSA / MSB(A)$	$MSA / MSB(A)$
العامل $B(A)$	$MSB(A) / MSE$	$MSB(A) / MSE$

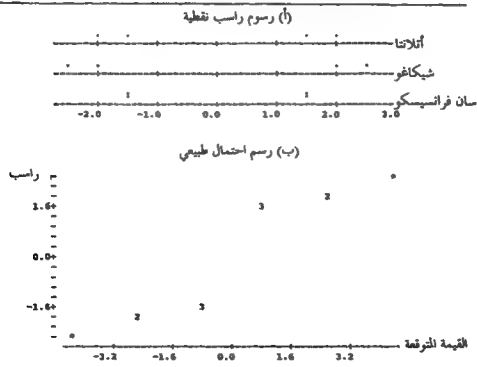
مثال

يحتوي الشكل (٢٦-٣) رسوماً نقطية مصطفة للرواسب في كل مدرسة من مثال مدرسة التدريب. وقد تأثرت تلك الرسوم بالطبيعة التقريبية للبيانات، ولكنها تدعم ملاحة افتراض ثبات تباين الخطأ ويقدم الشكل (٢٦-٣) ب رسم احتمال طبيعي للرواسب. وقد تأثر هذا الرسم، أيضاً، بالطبيعة التقريبية للملاحظات ولكنه لا يشير إلى حيلان كبير عن الطبيعة. وهذه النتيجة مدعومة بمعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعة فقد بلغت قيمته 0.927. هذه النتائج، بالإضافة إلى بعض التشخيصات الأخرى (لم تذكر هنا)، تدعم صلاحية نموذج التصميم الخاص (26.8) لمثال مدرسة التدريب.

ملاحظة

في رسوم احتمال طبيعي سابقة رسمنا رواسب لها القيم نفسها في مقابل قيمها المتوقعة، التي حصلنا عليها من (4.6)، كما لو كان للرواسب قيم مختلفة. ويوردنا الشكل 4.2d مثال عن رسم كهذا.

شكل (٢٦-٣) رسوم تشخيصية للرواسب - مثال مدرسة التدريب (مينياب، مرجع [26.1])، رسوم نقطية للرواسب، رسم احتمال طبيعي.



وعند وجود قيم كثيرة متساوية للرواسب، كما في مثال مدرسة التدريب، يمكن الحصول على رسم احتمال طبيعي أكثر دقة برسم كل من الرواسب متساوية القيم في مقابل القيمة المتوقعة لتوسط مراتب مواضع القيم المتساوية. وعندئذ ينبغي أن يوضح الرسم عدد الرواسب متساوية القيم لكل حالة. وقد تم هذا في الشكل (٢٦-٣) ب.

(٢٦-٥) تحليل تأثيرات العوامل في تصميم حافضة ثنائية العامل

عندما تشير الاختبارات إلى وجود تأثيرات مهمة للعوامل في تصميم حافض، يكون من المرغوب، عادة، الحصول على تقديرات لهذه التأثيرات أو إجراء مقارنات بينها.

تقدير متوسطات مستويات العوامل

عندما يكون التأثير الرئيس لعامل (عامل ذو تأثير ثابت) معنوياً، فمن المتواتر الاهتمام بتقدير متوسطات مستويات العوامل μ_i . وتكون متوسطات مستويات العوامل المقدر \bar{Y}_i مقدرات نقطية غير منحازة لـ μ_i . ويكون التباين المقدر لـ \bar{Y}_i ، كما هي العادة للعوامل الثابتة، مبني على متوسط المربعات في مقام الإحصاء المستعملة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A ، وعلى عدد المشاهدات في \bar{Y}_i وتكون حدود الثقة للمعالم μ_i في شكلها المعتاد:

$$\bar{Y}_i \pm t(1-\alpha/2; df) s\{\bar{Y}_i\} \quad (26.22)$$

حيث:

$$s^2\{Y_i\} = \frac{MSE}{bn} \quad df = ab(n-1) \quad A \text{ و } B \text{ مثبت} \quad (26.22a)$$

$$s^2\{Y_i\} = \frac{MSB(A)}{bn} \quad df = a(b-1) \quad A \text{ مثبت و } B \text{ عشوائي} \quad (26.22b)$$

وتوضع حدود الثقة للفروق $D = \mu_i - \mu_j$ بالطريقة العادية مستخدمين المقدرات النقطية $D = \bar{Y}_i - \bar{Y}_j$ وتوزع t بدرجات الحرية المصاحبة لتوسطات المربعات للعلام:

$$\hat{D} \pm t(1-\alpha; df) s\{\hat{D}\} \quad (26.23)$$

حيث:

$$s^2\{\hat{D}\} = s^2\{\bar{Y}_1\} + s^2\{\bar{Y}_2\} \quad (26.23a) \quad \text{كما أعطيت بواسطة (26.22a) أو (26.22b)}$$

ويمكن، بالطريقة المعتادة، استخدام أساليب توكي وبونفيروني للمقارنة المتزامنة للقيام بأزواج من المقارنات بمعامل ثقة عائلي $1-\alpha$.

وأخيراً، لا تظهر أية مشاكل جديدة في تقدير مقارنات بين متوسطات مستويات العوامل. ويمكن استخدام أساليب شيفيه أو بونفيروني عند تقدير عدة مقارنات.

مثال نرغب في مثال مدرسة التدريب جدول (٢٦-١) بتقدير متوسط درجة التعلم لمدارس أتلانتا بمعامل ثقة 95 بالمائة، وباستخدام النتائج السابقة في الجدولين (٢٦-١) و (٢٦-٥) نجد، من أجل نموذج تأثيرات مثبتة:

$$\bar{Y}_1 = \frac{79}{4} = 19.75$$

$$s^2\{\bar{Y}_1\} = \frac{MSE}{bn} = \frac{7.00}{4} = 1.75$$

$$s\{\bar{Y}_1\} = 1.32$$

$$t(975;6) = 2.447$$

$$16.5 = 19.75 - 2.447(1.32) \leq \mu_1 \leq 19.75 + 2.447(1.32) = 23.0$$

وبالإضافة إلى ذلك نريد القيام بأزواج من المقارنات بين المدارس الثلاث، بمعامل ثقة عائلي 0.90. وسنستخدم طريقة توكي وهي نحتاج إلى:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; a, ab(n-1)] = q \frac{1}{\sqrt{2}} (90; 3, 6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (2.56) = 2.52$$

ويبقى التباين المقدر نفسه لجميع أزواج المقارنات:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{MSE}{bn} + \frac{MSE}{bn} = \frac{2(7.00)}{4} = 3.5$$

وهكذا، فإن الانحراف المعياري المقدر $s\{\hat{D}\} = 1.87$ ويكون حدّ الثقة = 2.52(1.87) = 4.71.

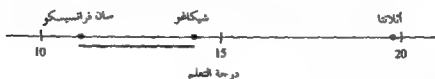
ونجد باستخدام النتائج في جدول (٢٦-١):

$$\bar{Y}_1 = 19.75 \quad \bar{Y}_2 = 14.25 \quad \bar{Y}_3 = 11$$

وتكون عائلة فترات الثقة بمعامل 90 بالمائة كما يلي:

$$\begin{aligned} 8 &= (19.72 - 14.75) - 4.71 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (19.75 - 14.25) + 4.71 = 10.2 \\ 4.0 &= (19.75 - 11) - 4.71 \leq \mu_1 - \mu_3 \leq (19.75 - 11) + 4.71 = 13.5 \\ -1.5 &= (14.25 - 11) - 4.71 \leq \mu_2 - \mu_3 \leq (14.25 - 11) + 4.71 = 8.0 \end{aligned}$$

ونستنتج، بمعامل ثقة عاظمي 90 بالمائة أن متوسط درجة التعلم هو الأعلى في أتلانتا وأن الفرق بين متوسطي درجة التعلم للملحوظين في شيكاغو وسان فرانسيسكو هو فرق غير معنوي إحصائياً . ويلخص الرسم التالي تلك النتائج:



تقدير متوسطات المعالجات μ_{ij}

وتوضع حدود الثقة لـ μ_{ij} بالطريقة المعتادة، مستخدمين توزيع t ، عندما تكون تأثيرات كل من العاملين A ، B مثبته:

$$\bar{Y}_{ij} \pm t[1 - \alpha/2; (n-1)ab]s\{\bar{Y}_{ij}\} \quad (26.24)$$

حيث:

$$s^2\{\bar{Y}_{ij}\} = \frac{MSE}{n} \quad (26.24a)$$

وللقيام بمقارنة ثنائية ضمن مستوى من مستويات العامل A ، نقدر الفرق $\mu_{ij} - \mu_{i'j'}$

μ_{ij}

بالمقدر النقطي ونستخدم حدي الثقة:

$$\hat{D} \pm t[1 - \alpha/2; (n-1)ab]s\{\hat{D}\} \quad (26.25)$$

حيث:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSE}{n} \quad (26.25a)$$

ويمكن استخدام أسلوب بونفيروني عندما نرغب القيام بعدة مقارنات، مع ضبط مستوي الثقة العاظمي. ويمكن، أيضاً، تطبيق أسلوب توكي، ولكنه، في الغالب، سوف لا يكون كفواً حيث يتسبب الاهتمام عادة على مقارنات ضمن كل مستوى من مستويات عامل ، فقط ، بينما تُؤسّس عائلة توكي على جميع المقارنات الممكنة بين

للمعالجات كافة وعدتها ab .

مثال. من المرغوب في مثال مدرسة التدريب مقارنة متوسط الدرجات للمدرسين ضمن كل مدرسة، مستخدمين طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عاظمي 90 بالمائة. ومن أجل $g=3$ مقارنات نحتاج إلى $t(983;6) = t(1-10/2(3); 6) = B$ ويكون التباين المقدر في كل حالة هو:

$$s^2 \{\bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12}\} = \frac{2(7.00)}{2} = 7.0$$

وبالتالي يكون حد الدقة في كل مقارنة \bar{Y}_H هو $7.27 = 2.748\sqrt{7.0}$ ونجد، وبعد الحصول على المتوسطات المقترنة من الجدول (٢٦-١):

$$\begin{aligned} 7.2 &= (27 - 12.5) - 7.27 \leq \mu_{11} - \mu_{12} \leq (27 - 12.5) + 7.27 = 21.8 \\ -18.8 &= (8.5 - 20) - 7.27 \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq (8.5 - 20) + 7.27 = -4.2 \\ 7.7 &= (18.5 - 3.5) - 7.27 \leq \mu_{31} - \mu_{32} \leq (18.5 - 3.5) + 7.27 = 22.3 \end{aligned}$$

ومن الواضح وجود فروق كبيرة بين المدرسين ضمن كل مدرسة.

تقدير المتوسط العام μ

هناك في بعض الأحيان اهتمام بتقدير المتوسط العام μ . ولمثال مدرسة التدريب، هو متوسط درجة التعلم لجميع مدارس التدريب وجميع المدرسين في تلك المدارس. والمقدر النقطي هو $\bar{Y}_.$ ويتم وضع حدود الثقة باستخدام التوزيع t كالتالي:

$$\bar{Y}_. \pm t(1-\alpha/2; df) s\{\bar{Y}_. \} \quad (26.26)$$

حيث:

$$df = ab(n-1) \quad \text{و } A \text{ و } B \text{ مثبت} \quad s^2\{\bar{Y}_.\} = \frac{MSE}{abn} \quad (26.26a)$$

$$df = a-1 \quad \text{و } A \text{ عشوائي و } B \text{ مثبت} \quad s^2\{\bar{Y}_.\} = \frac{MSA}{abn} \quad (26.26b)$$

$$df = a(b-1) \quad \text{و } A \text{ مثبت و } B \text{ عشوائي} \quad s^2\{\bar{Y}_.\} = \frac{MSB(A)}{abn} \quad (26.26c)$$

مثال. في مثال مدرسة التدريب، نرغب في تقدير المتوسط العام μ . بـ 95 بالمائة فترة ثقة. والتباين المقدر (26.26a) ملائم هنا لأن النموذج يتضمن تأثيرات مثبتة. وبالتالي نحصل على:

$$s^2\{\bar{Y}_{..}\} = \frac{7.00}{12} = 583 \quad s\{\bar{Y}_{..}\} = .764$$

ولعامل ثقة 95. نحتاج $t(975;6) = 2.447$ ومن الجدول (٢٦-١) نجد \bar{Y} ، ولنا تكون فترة الثقة المطلوبة:

$$13.1 = 15 - 2.447(.764) \leq \mu \leq 15 + 2.447(.764) = 16.9$$

تقدير مركبات التباين

في حالة تأثيرات عامل عشوائية، قد نرغب في تقدير مركبات التباين. ولانظهر أية مشاكل جديدة في التصميم الحاضنة. وعلى سبيل المثال عندما يكون لكل من A و B تأثيرات عشوائية فإن تقديراً غير منحاز لـ σ_e^2 يكون (جدول ٢٦-٧):

$$s_e^2 = \frac{MSA - MSB(A)}{bn} \quad (26.27)$$

(٢٦-٦) التحضين غير المتساوي والتكرارات في تصميم حاضنة ثنائية العامل

لقد افترضنا حتى الآن أن عدد مستويات العامل B المحضنة داخل كل من مستويات العامل A تبقى نفسها ولدينا العدد نفسه من التكرارات لكل تركيبة من العوامل. إلا أن هناك ظروفًا قد يختلف فيها عدد مستويات العوامل المحضنة B باختلاف مستويات العامل A . وكذلك لا يتساوى عدد التكرارات لتراكيب عوامل مختلفة. وعلى سبيل المثال، وفي مثالنا السابق، حيث نتعامل مع تأثيرات المدرسة (عامل A) والمدرّب (عامل B) على التحصيل الدراسي لفصول الميكانيكا، فقد يكون هناك b_i مدرّبين في المدرسة i ويتم تعليم n_{ij} فصلاً من المدرسة i بواسطة المدرّب j .

وستكون الصيغ السابقة لجميع مربعات التباين غير ملائمة لتحضين وتكرارات غير متساوية. ومن الأفضل، عادةً، استخدام أسلوب الانحدار لهذه الحالة، إلا أنه يمكن، أيضاً، استخدام أسلوب المصفوفات العام الموصوف في الفقرة (٨-٦) ومع عدم وجود أية مبادئ جديدة مع تأثيرات عامل مثبتة فيمكن المضي مباشرة إلى مثال.

مثال

قررت الشركة الصناعية التي نفذت دراسة مدرسة التدريب أن تقوم لاحقاً بدراسة متابعة تشمل شيكاغو وأتلانتا. فقط. وقد استخدم ثلاثة مدرّبين في أتلانتا

واثنين في شيكاغو وكان مقررا أن يدرب كل مدرب فصلين، ولكن ظروفًا قاهرة أدت إلى إلغاء أحد الفصول لأحد المدربين في أتلانتا. ويقدم جدول (٢٦-٨) بيانات هذه الدراسة. ونفرض مرة أخرى أن نموذج التصميم الحاضن ذا التأثيرات المثبتة (26.8)، هو النموذج المناسب:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{k(ij)} \quad (26.28)$$

$$i = 1, 2; j = 1, \dots, b_{i.}; k = 1, \dots, n_{ij}$$

$$b_1 = 3, b_2 = 2$$

$$n_{11} = n_{13} = 2, n_{12} = 1, n_{21} = n_{22} = 2$$

جدول (٢٦-٨) دراسة حاجة ثمانية العامل بتحتين غير متساو وتكرارات غير متساوية - دراسة متابعة للدراسة التدريب.

(أ) بيانات					
شيكاغو (A ₂)		أتلانتا (A ₁)			تكرار k
B ₂	B ₁	B ₃	B ₂	B ₁	
16	4	9	8	20	1
20	8	13		22	2

(ب) Y و X مصفوفات من أجل النموذج التام (26.31)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(ج) نموذج تام

$$\hat{Y} = 12.667 + .667X_1 + 7.667X_2 - 5.333X_3 - 6.0X_4$$

ولتطوير نموذج الانحدار المكافئ لابد أن نتعرف على القيود في (26.8):

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0 \quad \sum_{j=1}^3 \beta_{j(1)} = 0 \quad \sum_{j=1}^2 \beta_{j(2)} = 0 \quad (26.29)$$

وبالمضي كالمعتاد سنستوعب للمعالم α_1 ، $\beta_{1(1)}$ ، $\beta_{2(1)}$ ، $\beta_{1(2)}$ في نموذج الانحدار. ولا نحتاج للمعالم الأخرى إذ لدينا وقتاً للقيود (26.29):

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \quad \beta_{2(1)} = -\beta_{1(1)} - \beta_{2(1)} \quad \beta_{2(2)} = -\beta_{1(2)} \quad (26.30)$$

وهكذا نحتاج في مثالنا لأربع متغيرات مؤثرة تأخذ كل منها القيم 1، -1 أو 0. وبالتالي يكون نموذج الانحدار المكافئ:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i X_{ijk1} \quad (26.31)$$

تأثير رئيس للمدرسة

نموذج تام

$$+ \beta_{1(1)} X_{ijk2} + \beta_{2(1)} X_{ijk3} + \beta_{1(2)} X_{ijk4} + \epsilon_{ijk}$$

تأثير مدرّب بعينه ضمن مدرسة

حيث:

1 إذا كان الفصل من المدرسة 1

$$= Y_{ijk1}$$

-1 إذا كان الفصل من المدرسة 2

1 إذا كان الفصل للمدرّب 1 من المدرسة 1

-1 إذا كان الفصل للمدرّب 3 من المدرسة 1

$$= Y_{ijk2}$$

0 فيما عدا ذلك

1 إذا كان الفصل للمدرّب 2 من المدرسة 1

-1 إذا كان الفصل للمدرّب 3 من المدرسة 1

$$= Y_{ijk3}$$

0 فيما عدا ذلك

1 إذا كان الفصل للمدرّب 1 من المدرسة 1

-1 إذا كان الفصل للمدرّب 2 من المدرسة 1

$$= Y_{ijk4}$$

0 فيما عدا ذلك

ويبين الجدول (٢٦-٨) المتحة Y والمصفوفة X لمثالنا. ولاختبار التأثيرات الرئيسية

للمدرسة، نقوم أولاً بتفريق النموذج التام (26.31). ويوضح الجدول (٢٦-٨) جـ

النموذج التوفيقي. ثم نقوم بعد ذلك بتوفيق النموذج المخفض للفرضية: $H_0: \alpha_1 = 0$:
جدول (٢٦-٩) جدول لتحليل لدراسة حادثة ثالثة العامل بتحصين غير متساو وتكرارات غير متساوية. دراسة متابعة لمدرسة التدريب.

مصدر التغير	SS	df	MS	F [*]
المدارس (A)	3.76	1	3.67	$3.76/6.5 = .58$
المدرسون [B(A)]	295.20	3	98.4	$98.4/6.5 = 15.1$
الخطأ (E)	26.00	4	6.5	

(26.32) $Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_{1(1)}X_{ijk2} + \beta_{2(1)}X_{ijk3} + \beta_{3(2)}X_{ijk4} + \varepsilon_{ijk}$ نموذج منخفض
ويمكن الحصول على إحصاء الاختبار بالطريقة المعتادة، واختبار تأثيرات مدرب بالذات نستخدم النموذج المخفض للفرضية.

وهذا النموذج هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} + \varepsilon_{ijk} \quad (26.33)$$

والفرق $SSE(R) - SSE(F)$ يساوي $SSB(A)$.

ويتضمن الجدول (٢٦-٩) جدول التحاليل لمثال دراسة المتابعة لمدرسة التدريب.
ولا يوجد مجموع مربعات كلي لأن مركبات بجميع المربعات غير متعامدة.
وتتم اختبارات تأثير المدرسة والمدرّب كما سبق. كما يجري تقدير تأثيرات العامل بواسطة معالم الانحدار. وعلى سبيل المثال، تتضمن مقارنة بين متوسطي المدرستين:

$$\mu_1 - \mu_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

وعما أن $\alpha_2 = -\alpha_1$ كما نعلم من (26.30) فنحتاج لتقدير:

$$\mu_1 - \mu_2 = \alpha_1 - (-\alpha_1) = 2\alpha_1$$

ويكون المقدّر التقضي $2\hat{\alpha}_1$. ونحصل على التقديرات المرغوبة الأخرى بالطريقة نفسها.

(٢٦-٧) الماينة الجزئية في دراسة أحادية العامل بتصميم تام العشوائية

في مناقشتنا للتصاميم التحريية حتى الآن استعرضنا، فقط، تصاميم تتم فيها مشاهدة واحدة، فقط، للمتغير التابع في وحدة تجريبية، إلا أن هناك حالات يُستحسن

فيها الحصول على أكثر من مشاهدة. فلتعتبر تجربة لدراسة تأثير درجة حرارة فرن على قساوة الخبز. استُخدمت ثلاث درجات حرارة وخصّصت وحدتان تجريبتان (عينات من خلطة طحين) عشوائيا لكل معالجة. ولم يكن استخدام العينة كلها لخبز الخبز اقتصاديا كما لم يكن من المجدي تقنيا استخدام العينة كقطاع. وبالتالي اختبرت ثلاث عينات جزئية من كل عينة لصنع ثلاثة أرغفة يتم خبزها تحت درجة حرارة معينة. ولدينا هنا ثلاث مشاهدات (عينات جزئية) من كل وحدة تجريبية (عينة).

ومن الأمثلة الأخرى على تعدد المشاهدات التي تؤخذ للمتغير التابع من كل وحدة تجريبية ذلك الذي حدث في تجربة عن فعالية ثلاث طرق مختلفة للتدريب. كانت الوحدات التجريبية هنا أشخاصا، وابتغت التجربة قياس طول الفترة الزمنية المطلوبة لإتمام عملية تجميع محرك معين بعد استكمال برنامج التدريب المعطى. وقد تم قياس الزمن اللازم إثر عمليات تجميع متتابعة وهي تشكل المعاينة الجزئية للوحدة التجريبية (شخص).

ورسما نجد أن المعاينة الجزئية (مشاهدات متكررة على الوحدة التجريبية نفسها) مشابهة تماما للعوامل المحضنة، وسوف نبين ذلك في حالة تصميم تام العشوائية.

نموذج

اعتبر مرة أخرى تجربة دراسة تأثير درجة حرارة الفرن على قساوة الخبز، فيمكن

كتابة النموذج لهذه الدراسة كالتالي:

$$Y_{ijk} = \mu.. + \tau_i + \varepsilon_{(ij)} + \eta_{(ijk)} \quad (26.34)$$

ومعاني الرموز هي كالتالي:

١- $\mu..$ ثابت إجمالي

٢- τ_i تأثير درجة الحرارة (أي تأثير المعالجة وهو هنا تأثير مثبت)

٣- $\varepsilon_{(ij)}$ الخطأ التجريبي المصاحب لعينة بالذات (هنا تأثير عشوائي). والخطأ التجريبي هو كالعادة محضّن ضمن المعالجة، فالعينة المستعملة للمعالجة i لم تُستخدم لأي معالجة أخرى.

٤- $\eta_{(ijk)}$ الخطأ المصاحب للعينة الجزئية أو المشاهدة من الوحدة التجريبية للمعالجة (هنا تأثير عشوائي). وخطأ المشاهدة هذا محضّن ضمن الوحدة التجريبية وبالتالي ضمن

المعالجة، أيضا .

ويلاحظ أن نموذج المعالجة الجزئية (26.34) يبدو ممثلا تماما لنموذج التصميم الحاضن (26.8) الخاص بتصميم حاضن ثنائي العامل، باستثناء مايتعلق بتغيرات في الرموز تعكس حقيقة أن نموذج المعالجة الجزئية (26.34) هو نموذج أحادي العامل، ويحتوي الخطأ التحريبي وخطأ الملاحظة كليهما. وبالتحديد، فإن تأثير المعالجة τ_i هنا يقابل α_i في نموذج تحضين ثنائي العامل، وتأثير المعينة ϵ_{ijk} يقابل β_{ijk} وحد خطأ الملاحظة $\eta_{u(j)}$ يقابل ϵ_{ijk} . ونتيجة لذلك يتوازي تحليل التباين في حالة المعالجة الجزئية في الدراسة أحادية العامل بتصميم تام العشوائية مع دراسة تحضين ثنائية العامل.

وبصورة عامة، يكون النموذج لمعالجة جزئية، في دراسة أحادية العامل وتصميم تام العشوائية مع تأثيرات معالجة مثبتة وأعداد متساوية من التكرارات والعينات الجزئية، كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu.. + \tau_i + \epsilon_{ijk} + \eta_{u(j)} \quad (26.35)$$

حيث:

$\mu..$ ثابت

τ_i ثوابت خاضعة للقيود $\sum \tau_i = 0$

ϵ_{ijk} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$\eta_{u(j)}$ مستقلة و $N(0, \sigma_u^2)$

ϵ_{ijk} و $\eta_{u(j)}$ مستقلة.

$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$

ويكون المتوسط والتباين للملاحظة Y_{ijk} في هذا النموذج.

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu.. + \tau_i \quad (26.35a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_r^2 = \sigma^2 + \sigma_u^2 \quad (26.35b)$$

وفضلا عن ذلك، فإن للملاحظات Y_{ijk} لهذا النموذج توزيع توزيعا طبيعيا . وتكون الملاحظات من تكرارات مختلفة (عينات جزئية مختلفة) مستقلة. إلا أننا نعلم سلفا أن أية مشاهدتين من التكرار نفسه مرتبطتان، لأنهما تتضمنان الحد العشوائي ϵ_{ijk} نفسه:

$$\sigma\{Y_{ijk}, Y_{ijk'}\} = \sigma^2 \text{ و } k \neq k' \quad (26.35c)$$

تحليل التباين واختبارات التأثيرات

تكون بمجموع مربعات تحليل التباين الموافقة لنموذج معانة جزئية كما يلي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{nm} \quad (26.36a)$$

$$SSTR = nm \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{nm} - \frac{Y^2}{nm} \quad (26.36b)$$

$$SSEE = m \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.})^2 = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{m} - \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{nm} \quad (26.36c)$$

$$SSOE = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{m} \quad (26.36d)$$

يمثل هنا $SSEE$ مجموع مربعات الخطأ التحريبي ويمثل $SSOE$ مجموع مربعات خطأ المشاهدة. لاحظ تقابل الصيغ (26.36) للصيغ (26.13) و (26.16). في حالة تصميم حاضنة ثنائية العامل. والفرق الوحيد أن لدينا الآن $n, j = 1, \dots, n$ و $i = 1, \dots, m$ و $k = 1, \dots, m$ وفي السابق i, j و k تأخذ القيم إلى a, b و n على الترتيب.

ويحتوي الجدول (٢٦-١٠) التحاين لتحربة تامة العشوائية أحادية العامل بمعانة جزئية. ويوضح الجدول، أيضاً، توقع متوسط المربعات لكل من التأثيرات المثبتة والعشوائية للمعالجات، ويلاحظ، وبصرف النظر عما إذا كانت تأثيرات المعالجات مثبتة أو عشوائية، أن الإحصاء الملائمة لاختبار تأثيرات المعالجات هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSEE} \quad (26.37a)$$

ويستخدم اختبار لوجود تأثيرات خطأ تجريبي، أي $\sigma^2 > 0$ ، إحصاء الاختبار نفسها لكل من تأثيرات المعالجات المثبتة والعشوائية.

$$F^* = \frac{MSEE}{MSOE}$$

مثال. يحتوي جدول (٢٦-١١) على بيانات دراسة تأثير درجة حرارة الخبز على قساوة الخبز. البيانات هي درجات على سلم قياس من ١ إلى 20. حصلنا على تحليل التباين المناسب باستخدام تشغيل حاسب وهو مبين في الجدول (٢٦-١٢) ولاختبار

تأثير درجة الحرارة:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

ليست كل τ_i تساوي الصفر H_a :

جدول (١٠-٢٦) التحاليل لتجربة تامة العشوائية أحادية العامل بمعينة جزئية

$E\{MS\}$					
عشوائي τ_i	مثبت τ_i	MS	df	SS	مصدر التغير
$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2 + nm\sigma_\tau^2$	$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2 + nm\frac{\sum \tau_i^2}{r-1}$	MSTR	$r-1$	SSTR	المعالجات
$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2$	$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2$	MSEE	$r(n-1)$	SSEE	الخطأ التحريبي
σ_η^2	σ_η^2	MSE	$rn(m-1)$	SSE	خطأ الملاحظة
			$nm-1$	SSTO	المجموع

جدول (١١-٢٦) بيانات تجربة تامة العشوائية أحادية العامل بمعينة جزئية - مثال لساواة الحيز.

درجة الحرارة						وحدة المشاهدة
عالية ($i = 2$)		متوسطة ($i = 2$)		منخفضة ($i = 1$)		
عينة ٦	عينة ٥	عينة ٤	عينة ٣	عينة ٢	عينة ١	الوحدة k
$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	
16	14	9	14	12	4	1
19	17	10	13	8	7	2
18	15	12	11	10	5	3
$Y_{32} = 53$	$Y_{31} = 46$	$Y_{22} = 31$	$Y_{21} = 38$	$Y_{12} = 30$	$Y_{11} = 16$	
$Y_{2.} = 69$						
$Y_{.} = 214$						

ونستخدم إحصاءة الاختبار (26.37a):

$$F^* = \frac{117.72}{16.33} = 7.21$$

جدول (٢٦-١٢) تحاين لنثال قساوة الخبز

مصدر التغير	SS	df	MS
درجة الحرارة (TR)	235.44	2	117.72
خلطة الطحين (EE)	49.00	3	16.33
وحدات المشاهدة (OE)	31.33	12	2.61
المجموع	315.78	17	

لاحظ أن مركبات جميع المربعات لا تجمع إلى SS_{70} وذلك بسبب تدوير فرق العشري الأخير.

وحدد مستوى للمعوية $\alpha = 0.10$ ، ولذا نحتاج إلى $F(90;2,3) = 5.46$ ، وبما أن $F^* = 7.21 > 5.46$ فنستنتج H_0 ، أي أن درجة حرارة الخبز تؤثر على قساوة الخبز. والقيمة P - للاختبار هي 0.07.

ولاختبار الفروق بين المعينات:

$$H_0: \sigma^2 = 0$$

$$H_a: \sigma^2 > 0$$

نستخدم إحصاءة الاختبار (26.37a) :

$$F^* = \frac{16.33}{2.61} = 6.26$$

ولمستوى معنوية $\alpha = 0.10$ ، نحتاج إلى $F(90;3,12) = 2.61$ ، وبما أن $F^* = 6.26 > 2.61$

نستنتج H_0 ، أي أن هناك تأثيرات للمعينة على قساوة الخبز. والقيمة P - للاختبار هي 0.01 ولذلك يكون لكل من المعينة المعينة من خلطة طحين، ودرجة الحرارة التي تم بها الخبز، تأثيره على قساوة الزغيف.

تقدير تأثيرات المعالجات

عندما تكون تأثيرات المعالجات مثبتة، نهتم عادة بمحدود ثقة لمتوسطات المعالجات، $\mu_i = \mu. + \tau_i$ ، كما نهتم بمقارنات ثنائية ومتضادات بين متوسطات المعالجات. ويمكن الحصول عليها بالطريقة المعتادة باستخدام $MSEE$ كباين خطأ باعتبارها الكمية الواردة في مقام إحصاءة الاختبار لتأثيرات مثبتة للمعالجات. وتكون

درجات الحرية هي تلك المصاحبة لـ $MSEE$ أي $r(n-1)$. وتكون حدود الثقة لمتوسط المعالجة μ_i على سبيل المثال:

$$\bar{Y}_i \pm t[1 - \alpha/2; (n-1)r]s\{\bar{Y}_i\} \quad (26.38)$$

حيث:

$$s^2\{\bar{Y}_i\} = \frac{MSEE}{rm} \quad (26.38a)$$

وبالمثل، يمكن الحصول على حدي ثقة لمقارنة ثنائية بين متوسطي معالجتين، $D = \mu_k - \mu_i$ كما يلي:

$$\hat{D} \pm t[1 - \alpha/2; (n-1)r]s\{\hat{D}\} \quad (26.39)$$

حيث:

$$D = \bar{Y}_k - \bar{Y}_i \quad (26.39a)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSEE}{rm} \quad (26.39b)$$

ويمكن استخدام طرق المقارنة المتزامنة لـ توكي وبونفرونو كالمعتاد. مثال. لتقدير متوسط قساوة الخبز الذي تم خبزه تحت درجة حرارة منخفضة وبمعامل ثقة 0.95، نحتاج إلى:

$$\bar{Y}_L = 7.67$$

$$S^2\{\bar{Y}_L\} = \frac{1633}{6} = 2.722 \quad s\{\bar{Y}_L\} = 1.65$$

$$t(.975; 3) = 3.182$$

وبالتالي فإن 95 بالمائة فترة ثقة هي:

$$2.4 = 7.67 - 3.182(1.65) \leq \mu_L \leq 7.67 + 3.182(1.65) = 12.9$$

وكان مرغوبا، أيضا، تقدير الفرق في متوسط قساوة الرغبة المحبوز تحت درجتي حرارة عالية ومنخفضة بفترة ثقة 95 بالمائة. وباستخدام (26.39)، نحتاج إلى:

$$\bar{Y}_L = 7.67 \quad \bar{Y}_H = 16.5$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_H - \bar{Y}_L = 16.5 - 7.67 = 8.83$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(1633)}{6} = 5.443 \quad s\{\hat{D}\} = 2.33$$

وتكون فترة الثقة المرغوبة:

$$1.4 = 8.83 - 3.182(2.33) \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 8.83 + 3.182(2.33) = 16.2$$

تقدير تباينات

نهتم، أحيانا ، بتقدير σ^2 تباين الوحدات التحريية و σ_p^2 تباين وحدات المشاهدة. ويتضح، من أي من أعمدة $E(MS)$ في جدول (٢٦-١٠) أن ما يلي يشكل مقدرات غير منحازة:

$$\begin{array}{cc} \text{معلمة} & \text{مقدر غير منحاز} \\ \sigma^2 & s^2 = \frac{(MSE - MSOE)}{m} \end{array} \quad (26.40a)$$

$$\sigma_p^2 & s_p^2 = MOSE \quad (26.40b)$$

مثال. نحصل من جدول (٢٦-١٢) على التقديرات الآتية لكل من التباينين في مثال قساوة الخبز:

$$s^2 = \frac{16.33 - 2.61}{3} = 4.57$$

$$s_p^2 = 2.61$$

وهكذا يكون التشتت المقدر بين العينات أكبر، إلى حد ما، منها بين المشاهدات ضمن عينة.

تعليقات

١- من الشائع تسمية وحدات المعاينة الجزئية "وحدات مشاهدة"، وذلك تمييزا لها عن الوحدات التحريية. وهكذا، ففي مثال قساوة الخبز، تكون الوحدات التحريية هي العينات من خلطة طحين، بينما وحدات المشاهدة هي الأجزاء المختارة من تلك العينات لصنع أرغفة الخبز.

٢- قد يكون لوحات المشاهدة ماهية فيزيائية مختلفة كما في مثال قساوة الخبز، حيث كانت أجزاء من عينة من خلطة طحين. وقد تشير وحدات المشاهدة، أيضا، إلى مشاهدات متكررة على كامل الوحدة التحريية. وكمثال على ذلك نذكر المثال المبكر حيث تم قياس زمن عملية التجميع لشخص 10 مرات متتالية بعد حصوله على نوع معين من التدريب.

٣- لاحظ أن نموذج المعاينة الجزئية (26.35) لا يحتوي على حدود تفاعل، ذلك لأن حدود الخطأ التجريبي $\sigma_{\mu\mu}$ محصورة ضمن المعالجات، وحدود خطأ الملاحظة محصورة ضمن الوحدات التجريبية. وكما سبق أن رأينا، فإن حدود التفاعل لا تنطبق عندما يكون أحد المتغيرات محصورة ضمن الآخر.

٤- اعتدنا، فقط، حالة عدد متساو من الوحدات التجريبية (n) مطبقة لكل معالجة، والقيام بعدد ثابت من المشاهدات (m) لكل وحدة تجريبية. ونواجه تعقيدات جدية في حال عدم التوازن، ولا يتوفر أي اختبار دقيق لتأثيرات المعالجات. ولناقشة هذا الموضوع أنظر كتابا متقدما مثل المرجع [26.2].

اعتبارات في مجال التصميم

المشكلة التي تظهر في تصميم تجربة بمشاهدات مكررة هي اختيار عدد الوحدات التجريبية وعدد وحدات الملاحظة. افترض أننا نريد تقدير متوسطات المعالجات μ_i في دراسة متوازنة بتأثيرات معالجة مثبتة. فيمكن تبين أن:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \frac{\sigma_g^2 + m\sigma^2}{nm} \quad (26.41)$$

ويبدو واضحا من الصيغة (26.41) أنه إذا كان nm مثبتا (عدد الأرغفة التي تم خبزها في التجربة في مثال فساوة الخبز)، فإن $\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\}$ تكون أصغر ما يمكن إذا جعلنا m أصغر ما يمكن، أي $m = 1$. وهكذا، عندما يكون nm مثبتا، يتطلب التقدير الأمثل لمتوسطات المعالجات اختيار وحدة مشاهدة واحدة، فقط، لكل وحدة تجريبية، ولهذا تنتشر العينة الكلية بين أكبر عدد ممكن من الوحدات التجريبية.

ويمكن تبرير المعاينة الجزئية في اعتبارات التكلفة. افترض أن تكلفة استخدام وحدة تجريبية في الدراسة هو C_1 ، وأن التكلفة C_2 للحصول على مشاهدة من الوحدة التجريبية. افترض أن التكلفة الكلية C معطاة بالعلاقة:

$$C = c_1n + c_2nm \quad (26.42)$$

فيمكن عندئذ إثبات أنه لأي تكلفة كلية C_0 يصبح التباين $\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\}$ أقل ما يمكن عندما يكون:

$$m_{app} = \frac{\sigma_y}{\sigma} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \quad (26.43a)$$

$$n_{app} = \frac{C_0}{c_1 + c_2 m_{app}} \quad (26.43b)$$

مثال. بالإشارة إلى مثال قساوة الخيز. افترض أن $c_1 = \$30$ و $c_2 = \$5$ ، وأن تكلفة المشاهدات الكلية في التجربة محددة بـ $C_0 = \$400$. وتشير تقديرات مسبقة إلى أن $\sigma = 2.2$ ، $\sigma_y = 1.5$ على وجه التقريب. فنعندئذ نكون الأحجام المثلى للعينة كما يلي:

$$m_{app} = \frac{1.5}{2.2} \sqrt{\frac{30}{5}} = 1.67$$

$$n_{app} = \frac{400}{30 + 5(1.67)} = 10.4$$

وهكذا يمكن استخدام 10 عينات لكل معالجة بمشاهدين لكل عينة.

تعليقات

- ١- لاحظ عدم تأثير العدد الأمثل لوحدة المشاهدات (m_{app}) بالتكلفة الكلية المسموحة C_0 ، ويتأثر العدد الأمثل للوحدات التحريبية، فقط، بقيمة C_0 .
- ٢- يمكن الحصول على النتيجة (26.43) بحساب القيمة الصغرى لـ:

$$\sigma^2 \{Y_i\} = \frac{\sigma_y^2 + m\sigma^2}{nm}$$

خاضعة للقيود:

$$c_1 n + c_2 nm - C_0 = 0$$

وبكتابة دالة لاغرانج:

$$L = \frac{\sigma_y^2 + m\sigma^2}{nm} + \lambda(c_1 n + c_2 nm - C_0)$$

نشتق L بالنسبة إلى m ، n و λ ونضع المشتقات الجزئية مساوية للصفر. وبعد حل المعادلات الثلاثة آنياً. نحصل على النتيجة (26.43).

(٨-٢٦) المعاينة الجزئية البحتة في ثلاث مراحل

قد لا تتضمن الدراسة في بعض الأحيان مقارنات بين المعالجات، ولكن تتضمن، فقط، معاينة جزئية عند عدة مستويات، اعتبر، على سبيل المثال، مهتمس ضبط جودة

يرغب في دراسة مواصفة نوعية معينة لجمّعات حاسب. ويتم إنتاج تلك المجمعات بدفعات تتضمن كل دفعة منها 2,000 مجمعة. وسيختار المهندس عينة عشوائية من دفعة، ثم سيختار من كل دفعة n مجمعة، وسيحصل في النهاية على m مشاهدة حول المواصفة النوعية لكل مجمعة.

نموذج

افترض أن جميع المتغيرات العشوائية متوزعة طبيعياً وأننا أخذنا عينات متساوية عند كل مرحلة، فسيكون النموذج للمعانة الجزئية في ثلاث مراحل كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \tau_i + \epsilon_{ij} + \eta_{k(ij)} \quad (26.44)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

τ_i ، ϵ_{ij} و $\eta_{k(ij)}$ متغيرات عشوائية مستقلة طبيعية يتوقع 0 لكل منها وتباينات σ_{τ}^2 على الترتيب.

$$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, m$$

وفي توضيحنا هنا يمثل τ_i تأثير الدفعة، ويمثل ϵ_{ij} تأثير المجموعة المحضنة ضمن الدفعة، ويمثل $\eta_{k(ij)}$ تأثير المشاهدة المحضنة ضمن المجموعة، وبالتالي ضمن الدفعة.

تتوزع المشاهدات Y_{ijk} لنموذج المعانة الجزئية (26.44) توزيعاً طبيعياً بمتوسط

وتباين:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} \quad (26.44a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_{\tau}^2 + \sigma_{\epsilon}^2 + \sigma_{\eta}^2 \quad (26.44b)$$

وتوجد ارتباطات مختلفة بين مشاهدتين من الدفعة نفسها.

وهناك تقابل بين نموذج المعانة الجزئية (26.44) ونموذج المعانة الجزئية (26.35)

لدراسة أحادية العامل τ_i ، باستثناء أننا نفرض هنا أن τ_i مستقلة وتتوزع $N(0, \sigma_{\tau}^2)$ وأنها مستقلة عن ϵ_{ij} و $\eta_{k(ij)}$. ويكون الاختلاف الوحيد، رسمياً ، بين النموذجين (26.44) و (26.8) هو أن τ_i مثبتة في أحدهما وعشوائية في الآخر. وهناك تقابل، أيضاً، بين نموذج المعانة الجزئية والنموذج الحاضن حيث تكون تأثيرات كل من

العامل A والعامل B عشوائية.

تحليل التباين

يستخدم تحليل التباين لنموذج المعاينة الجزئية البحتة (26.44) بجميع المربعات نفسها كما سبق، وتعني تلك الموجودة في (26.36). وجدول التحاين هنا هو نفسه كما في الجدول (٢٦-١٠)، ويكون توقع متوسط المربعات القابل للتطبيق هنا هو ذلك الخاص بتأثيرات τ عشوائية.

تقدير μ

غالباً ما نهتم بتقدير المتوسط الإجمالي μ في حالة المعاينة الفرعية البحتة. متوسط العملية للمواصفة النوعية لمجموعة حاسب (في مثالنا آف الذكر) والمقدر التقطي لـ μ في النموذج (26.44) هو \bar{Y}_- ويمكن تبيان أن التباين هو:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_-\} = \frac{\sigma_e^2}{r} + \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma_g^2}{nm} = \frac{nm\sigma_e^2 + m\sigma^2 + \sigma_g^2}{nm} \quad (26.45)$$

وكمقدر غير منحاز لهذا التباين نجد:

$$s^2\{\bar{Y}_-\} = \frac{MSTR}{nm} \quad (26.46)$$

ويكون $(1-\alpha)$ حدي ثقة لـ μ :

$$\bar{Y}_- \pm (1-\alpha/2; r-1)s\{\bar{Y}_-\} \quad (26.47)$$

توزيعات المعاينة الجزئية

اقتصرت مناقشتنا للمعاينة الجزئية على تصميمات تامة العشوائية وثلاث مراحل معاينة في حالة المعاينة الجزئية البحتة. ومن الواضح أنه يمكن استخدام المشاهدات المكررة في أي تصميم تجريبي، وأنه يمكن تنفيذ للمعاينة الجزئية بأي عدد من المراحل. وستابع في الفصل القادم طرقاً ميسرة لمعالجة مثل هذه الحالات الأكثر تعقيداً.

مراجع ورد ذكرها

- [26.1] MINITAB Refrence Manual, Release 7, State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.
- [26.2] Searle, S.R. *Linear Models for Unbalanced Data*. New York: John Wiley & Sons, 1987.

مسائل

(٢٦-١) تساءل أحد الطلاب "ما هو الفرق الحاصل سواء افترضنا أن العوامل مثبتة أم أنها عشوائية طالما أن متوسط المربعات في جدول تحليل التباين لتصميم حاضن أحادي العامل يبقى نفسه في الحالتين؟" علّق.

(٢٦-٢) صرّح باحث أنه يفضل تحليل دراسة حاضنة ثنائية العامل كدراسة متصالبة لأنه يستطيع بذلك عزل المزيد من مصادر التغير. علّق على استراتيج الباحث هذا.

(٢٦-٣) اعتبر دراسة ثلاثية العامل، حيث العامل C محض ضمن عامل B ، والعامل B كان بدوره محض ضمن عامل A ، و $a = b = c = 2$ وضع في هيئة الجدول (٢٦-٤) الاختلاف بين التصميم الحاضن هذا والتصميم المتصالب المقابل.

(٢٦-٤) إنتاج مصنع القوارير. درس مهندس انتاج تأثيرات طراز الآلة (عامل A) وعامل التشغيل (عامل B) على الناتج في مصنع للقوارير. وقد تم استخدام ثلاث آلات لإنتاج القوارير مختلفة الطراز. كما استخدم إثني عشر عامل تشغيل. وخصّص أربعة عمال تشغيل لكل آلة واشتغل كل منهم وردية من ست ساعات. وقد تمّ تجميع البيانات عن عدد القطع التي أنتجتها كل آلة وعامل ولمدة أسبوع. وتمثل البيانات التالية عدد القطع المنتجة في الساعة وذلك لكل يوم من أيام العمل في أسبوع:

الآلة ١				٢				٣			
عامل تشغيل /	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤	١	٢	٣
اليوم: $k=1$	65	68	56	45	74	69	52	73	69	63	81
$k=2$	58	62	65	56	81	76	56	78	83	70	72
$k=3$	63	75	58	54	76	80	62	83	74	72	73
$k=4$	57	64	70	48	80	78	58	75	78	68	76
$k=5$	66	70	64	60	68	73	51	67	80	75	70

أ - أوجد الرواسب لنموذج التصميم الحاضن (26.8) بتأثيرات عوامل مثبتة وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضاً، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي نتائجك حول صلاحية النموذج (26.8)؟

ب - قم بإعداد رسم تقطي مصطف للرواسب لكل آلة. هل تؤيد هذه الرسوم فرضية ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

(٢٦-٥) بالإشارة إلى إنتاج مصنع القوارير مسألة (٢٦-٤)، افترض أن نموذج التصميم الحاضن (26.8) بتأثيرات عوامل مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - هل يمكن تمييز تأثيرات عامل التشغيل عن تأثيرات الوردية في هذه الدراسة؟ ناقش.

ب - أرسم متوسطات المعالجات المقننة \bar{y} في هيئة الشكل (٢٦-٢). هل يبدو أن هناك تأثيرات لأي من العوامل؟

ج - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كان متوسط الناتج لطرز الآلات الثلاث مختلفاً أم لا.

استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

هـ - اختبر ما إذا كان متوسط الإنتاج للعمال المخصصين لكل آلة مختلفاً أم لا. استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟ ماذا يتضمن استنتاجك حول متوسط الإنتاج للعمال الأربعة المخصصين للآلة؟ إشرح.

و - لكل آلة قم باختبار منفصل حول ما إذا كانت متوسطات الإنتاج للعمال الأربعة مختلفة أم لا. ولكل اختبار، استخدم $\alpha = 0.01$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

ز - مستخدماً متباينة بونفيرونو، ماهو مستوى المعنوية العائلي

للاختبارات المذكورة في د، هـ، و، عندما نعتبرها معا ؟ لخص مجموعة النتائج التي توصلت إليها في اختباراتك تلك.

(٦-٢٦) بالاشارة إلى إنتاج مصنع القوارير المسائلين (٤-٢٦) ، (٥-٢٦).

- أ - قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الإنتاج للآلات الثلاث. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عايلي 0.95. أعرض نتائجك.
- ب - قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الإنتاج للعمال الأربعة المخصصين للآلة 1 استخدم طريقة بونفروني بمعامل ثقة عايلي 0.95. أعرض نتائجك.

ج- خيرة العامل رقم 4 المخصص للآلة رقم 1 أقل نسبيا من خيرة العمال الثلاثة الآخرين. قَدِّر المقارنة:

$$L = \frac{\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13}}{3} - \mu_{14}$$

مستخدما 0.99 فترة ثقة. فسر تقديرك بفترة.

(٧-٢٦) بالاشارة إلى إنتاج مصنع القوارير مسألة (٤-٢٦)، افترض أنه تم اختيار العمال الأربعة المخصصين لكل آلة من عدد كبير من عمال التشغيل.

- أ - كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليتلاءم مع هذه الحالة؟.

ب - أوجد التقدير النقطي لتباين العامل المشغل σ_M^2 .

ج - اختر ما إذا كان $\sigma_M^2 = 0$ أم لا. استخدم $\alpha = 0.10$. أعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

د - اختر ما إذا كانت متوسطات الإنتاج لطرز الآلات الثلاث مختلفة أم لا. استخدم $\alpha = 0.10$. أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟

هـ- قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الإنتاج للآلات الثلاث. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عايلي 0.90. أعرض نتائجك.

و - اختبر الفرض بأن β_{00} لجميع الآلات لها التباين نفسه. استخدم اختبار هارتلي (فقرة ١٦-٢) بمستوى معنوية 0.01. α أعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة.

(٨-٢٦) بالإشارة إلى إنتاج مصنع القوارير مسألة (٢٦-٤) افترض أن العمال الأربعة المخصصين لكل آلة تم اختيارهم عشوائيا من عدد كبير من عمال التشغيل، وأن الآلات الثلاث، أيضا، قد تم اختيارها من عدد كبير من الآلات.

أ - كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليوافق هذه الحالة؟
ب - أوجد تقديرا نقطيا لكل من تباين العامل σ^2_{θ} وتباين الآلة σ^2_{ϵ} على الترتيب.

ج - اختبر ما إذا كان σ^2_{θ} يساوي صفرا . استخدم 0.05. α . اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟
د - يهتم مهندس الإنتاج بتقدير المتوسط العام μ بـ 95 بالمائة فترة ثقة أوجد فترة الثقة المرغوبة، واعط تفسيرها لها.

(٩-٢٦) الوعي الصحي. شاركت ثلاث ولايات (عامل 1) في دراسة للوعي الصحي، ابتكرت كل ولاية، وبصورة مستقلة، برنامجا للوعي الصحي. اختبرت ثلاث مدن (عامل) داخل كل ولاية للمشاركة واعتبر عشوائيا خمس أسر من كل مدينة لتقوم فعالية البرنامج. وقد تمت متابعة جميع أفراد الأسرة المختارة قبل وبعد المشاركة في البرنامج وشُكِّل دليل مركب لكل أسرة يقيس أثر برنامج الوعي الصحي. وفيما يلي بيانات عن الوعي الصحي (كلما كبرت قيمة الدليل كلما كان الوعي أكبر).

أ - أوجد الرواسب لنموذج التصميم الحاضن (26.31) بتأثيرات مثبتة للعوامل وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم أيضا بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.8)؟

ب- قم بإعداد رسوم نقطية مصطفة لكل ولاية. هل تويد تلك الرسوم

افترض ثبات تباين الخطأ ؟ ناقش.

الولاية ١			الولاية ٢			الولاية ٣		
١	٢	٣	١	٢	٣	١	٢	٣
٤٢	٢٦	٣٤	٤٧	٥٦	٦٨	١٩	١٨	١٦
٥٦	٣٨	٥١	٥٨	٤٣	٥١	٣٦	٤٠	٢٨
٣٥	٤٢	٦٠	٣٩	٦٥	٤٩	٢٤	٢٧	٤٥
٤٠	٣٥	٢٩	٦٢	٧٠	٧١	١٢	٣١	٣٠
٢٨	٥٣	٤٤	٦٥	٥٩	٥٧	٣٣	٢٣	٢١

(٢٦-١٠) بالإشارة إلى الوعي الصحي مسألة (٢٦-٩) افترض أن نموذج التصميم

الحاضن (٢٦-٩) بتأثيرات مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - ارسم بيانيا متوسطات المعالجات للمقدرة \bar{Y} في هيئة الشكل (٢٦-٢٦)

٢٠) هل يبدو أن هناك أية تأثيرات عوامل موجودة؟

ب- أكتب جدول تحليل التباين.

ج- اختبر ما إذا كانت متوسطات الوعي، في الولايات الثلاث مختلفة أم

لا. استخدم $\alpha = 0.05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي

القيمة p - للاختبار؟.

د - اختبر ما إذا كانت متوسطات الوعي في المدن الثلاث ضمن كل

ولاية مختلفة أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار

والنتيجة. ماهي القيمة p - للاختبار؟ ماذا يتضمن استنتاجك حول

متوسطات الوعي في المدن الثلاث في الولاية؟ اشرح.

هـ - باستخدام متباينة بونفرونوني ماهو مستوى المعنوية العائلي

للاختبارات في الأجزاء ج، د عندما نعتبرها معا ؟ لخص مجموعة

الاستنتاجات التي توصلت إليها في اختباراتك.

(٢٦-١١) بالإشارة إلى الوعي الصحي المسائل (٢٦-٩)، (٢٦-١٠)

- أ - قتر μ_{11} بـ 0.95 قوة ثقة. فسر تقدير ك بقوة.
- ب- أحصل على فترات ثقة منفصلة لكل من μ_1 , μ_2 و μ_3 كل منها معامل 0.99 اعط تفسيراً لهذه التقديرات.
- ج- أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الولايات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 0.90. لخص نتائجك.
- د - من المرغوب الحصول على 0.95 قوة ثقة لـ $D = \mu_{11} - \mu_{32}$ باعتبار أن هاتين المدينتين حجمين متقاربين، اعط تفسيراً للتقدير بقوة.
- (١٢-٢٦) بالإشارة إلى الوعي الصحي مسألة (٩-٢٦) افترض أن المدن الثلاث ضمن كل ولاية قد اختبرت عشوائياً من بين كل المدن في الولايات،
- أ - كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليلائم هذه الحالة؟
- ب- أوجد تقديراً نقطياً لتباين المدينة σ^2_{μ} . هل هناك أي شيء غير مألوف هنا حول ذلك التقدير؟
- ج- اختر ما إذا كان σ^2_{μ} يساوي الصفر أم لا. استخدم 10. α . أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟
- د - اختر ما إذا كانت متوسطات الوعي مختلفة في الولايات الثلاث أم لا. استخدم 10. α . أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ما هي القيمة P لهذا الاختبار؟
- هـ - أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الولايات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 90 بالمائة لخص نتائجك.
- و- اختر الفرض بأن β_{00} لجميع الولايات لها التباين نفسه σ^2_{μ} . استخدم اختبار هارتلي (فقرة ٢-٢٦) بمستوى معنوية 05. α . أكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.
- (١٣-٢٦) بالإشارة إلى الوعي الصحي مسألة (٩-٢٦) افترض أن المدن الثلاث داخل كل ولاية وأن الولايات الثلاث قد اختبرت عشوائياً .

- أ - كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليلائم هذه الحالة؟.
- ب - أوجد تقديرا نقطيا لكل من تباين المدينة وتباين الولاية، σ_p^2 و σ_e^2 ، على الترتيب.
- جـ - اختر ما إذا كانت σ_e^2 تساوي صفرا أم لا، استخدم $\alpha = 10$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ملحي القيمة P لهذا الاختبار؟.
- د - قدر المتوسط الإجمالي للليل الوعي الصحي μ مستخدما 99 بالمائة فوة ثقة. فسر تقديرك هذا.

(٢٦-١٤) الرقابة الداخلية. تدير إحدى الشركات الكبيرة للبيع بالمفرق ثلاثة مراكز إقليمية للمخاسبة. (عامل A). ويوظف المركز 1 ثلاثة فرق لمراجعة الحسابات بينما يوظف كل من المركزين الآخرين فريقين للمراجعة، وإحدى مهام كل مركز أن يراجع ما إذا كانت رقابة داخلية معينة تعمل بكفاءة في عملية إخراج جداول المرتبات. وقد طُلبت بيانات عن النسبة المثوية للمعاملات التي وُجد أن الرقابة الداخلية فيها كانت مناسبة وذلك لكل فريق في كل إقليم وعن الشهرين السابقين. وقد وردت بيانات ثلاثة شهور في إحدى الحالات وبيانات شهر واحد، فقط، في حالة أخرى. وقد استخدم تحويل قوس الجيب \sqrt{p} وصولا إلى استقرار تباينات الخطأ. وكانت البيانات بعد التحويل كالتالي:

الاقليم i	1			2		3	
	1	2	3	1	2	1	2
الشهر: k	151.6	143.2	131.4	163.8	151.6	157.0	160.0
	141.2	139.4	136.0	154.2		147.2	151.6
	149.4						

- أ - أكتب نموذج الانحدار لهذه الحالة قياسا على النموذج التام التوضيحي (26.31) مستخدما $-1 < 1$ ، 0 كمتغيرات مؤشرة.
- ب - قم بتوفيق النموذج وأوجد الرواسب. أرسم الرواسب في مقابل القيم

التوفيقية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي

استنتاجاتك حول صلاحية النموذج؟

(٢٦-١٥) بالإشارة إلى الرقابة الداخلية مسألة (٢٦-١٤) افترض أن نموذج

التصميم الحاضن (26.8) بتأثيرات عوامل مثبتة بعد تعديله من أجل

التحسين غير المتساوي والتكرارات غير المتساوية هو النموذج المناسب.

أ - اختر التأثيرات الرئيسة للأقاليم مستخدما إحصاء الاختبار (8.71)

ومستوى معنوية 0.025. α . أعرض البدائل، النموذج المخفض،

قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة-P للاختبار؟

ب- اختر تأثيرات فرق المراجعة ضمن الإقليم مستخدما إحصاء الاختبار

(8.71) ومستوى معنوية 0.025. α . أعرض البدائل، النموذج

المخفض، قاعدة القرار والنتيجة.

ج- قَدِّر $\mu_1 - \mu_2$. $D = \mu_1 - \mu_2$ (بوحلات مابعد التحويل) بـ 98 بالمائة فرة ثقة.

(٢٦-١٦) سأل أحد الطلبة في الفصل، لماذا لا تأخذ جميع التجارب بالملاحظات المتكررة

باعتبار أن جميع أساليب القياس هي، إلى حد ما، غير مضبوطة؟ علق.

(٢٦-١٧) بالإشارة إلى لون الاستبيان مسألة (١٤-١١) افترض أن التجربة قد

نفذت بتوزيع الملصقات على مواقف السيارات المخصصة في أسبوعين

مختلفين مع ملاحظة معدلات الاستجابة لكل أسبوع. وفيما يلي مجموعة

البيانات الكاملة عن معدلات الاستجابة.

اللون i	١- الأزرق	٢- الأخضر	٣- البرتقالي	
موقف j	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	
الأسبوع 1	35 27 31 26 25	29 31 25 29 34	28 29 27 25 31	k=1
الأسبوع 2	37 24 29 23 32	25 34 22 27 33	31 25 25 28 35	k=2

أ - أوجد الرواسب لنموذج المعانة الجزئية (26.35) بتأثيرات معاملات

مثبتة، واسمها، في مقابل القيم التوفيقية. قم أيضا بإعداد رسم

احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.35)؟

ب- اختر الفرض بأن $\rho = 0.5$ لما التباين نفسه σ^2 من أجل جميع الألوان. استخدم اختبار هارتلي (فقرة ١٦-٢) بمستوى معنوية 0.10. α . أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٦-١٨) بالإشارة إلى لون الاستبيان مسألة (٢٦-١٧) افترض أن نموذج المعاينة الجزئية بتأثيرات معالجات (26.35) مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختر ما إذا كانت تأثيرات لون الاستبيان مهمة أم لا؟ استخدم $\alpha = 0.05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة p للاختبار؟

ج- اختر ما إذا كانت هناك فروق بين المواقف ضمن الألوان - أم لا، أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة p للاختبار؟

د - قُدر متوسط معدل الاستجابة للاستبيانات الزرقاء معامل ثقة 95 بالمائة.

هـ - أوجد تقديرات نقطية لكل من σ^2 و σ_p^2 . أي التباين يبدو أكبر هنا؟

(٢٦-١٩) لدى أحد الاقتصاديين مبلغ \$20,000 مخصصة لدراسة مقارنة بين أقساط الديون المستحقة على أسر حضرية تمتلك طفلين أو أقل، وتلك المستحقة على أسر حضرية تمتلك أكثر من طفلين في ولاية. وكانت تكلفة أن تتضمن الدراسة مدينة هي \$1,000، وتكلفة أن تتضمن الدراسة أسرة هي \$50. كما كان عدد الأسر التي تمتلك طفلين أو أقل مساو لعدد الأسر التي تمتلك أكثر من طفلين، افترض أن دالة التكلفة هي كما وردت في (26.24). وكان الهدف الأول للدراسة هو تقدير متوسط الدين لكل من نوعي الأسر بدقة ممكنة.

أ - إذا كانت القيم التقديرية الميدية للانحرافات المعيارية هي $\sigma = 150$ و $\sigma_p = 300$ فما هو عدد المدن والأسر التي ينبغي أن تشملها الدراسة؟

ب- كيف تتغير أحجام العينات إذا كان $\sigma = 400$ و $\alpha = 200$ ؟

(٢٦-٢٠) مستويات حمض في نبات. اختبرت عشوائيا أربع نباتات من الفصيلة نفسها في تجربة لمعرفة تركيز حمض معين. واختبرت ثلاث ورقات من كل فئة عشوائيا. وتم الحصول على ثلاثة قياسات منفصلة لتركيز الحمض من كل ورقة فكانت البيانات كالتالي:

نبات ١			٢			٣			٤		
ورقة ١			٢			٣			٤		
١	٢	٣	١	٢	٣	١	٢	٣	١	٢	٣
قياس التركيز											
11.2	16.5	18.3	14.1	19.0	11.9	15.3	19.5	16.5	7.3	8.9	11.3
11.6	16.8	18.7	13.8	18.5	12.4	15.9	20.1	17.2	7.8	9.4	10.9
12.0	16.1	19.0	14.2	18.2	12.0	16.0	19.3	16.9	7.0	9.3	10.5

أوجد الرواسب لنموذج المعالجة الجزئية ذي ثلاثة مراحل (26.44)، وارسمها في مقابل القيم التوقعية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.44) ؟

(٢٦-٢١) بالإشارة إلى مستويات حمض في نبات مسألة (٢٦-٢٠) افترض أن نموذج المعالجة الجزئية (26.44) ذا المراحل الثلاث هو النموذج المناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ما إذا كانت هناك تغيرات أم لا في متوسطات التركيز من نبتة إلى أخرى. استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة P للاختبار؟

ج- اختبر ما إذا كانت هناك تغيرات في متوسطات مستويات التركيز بين الأوراق من النبتة نفسها. استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة P للاختبار؟

د - قَدِّر المتوسط الإجمالي للتركيز في جميع النباتات من تلك الفصيلة.

استخدم 95 بالمائة قوة ثقة.

هـ - أوجد التقديرات النقطية لـ σ^2 و σ^2_p و σ^2_r . أي مركبات التباين

تبدو أكثر أهمية في التباين الكلي σ^2_p ؟

(٢٦-٢٢) الاتساق الكيميائي. رغبت إحدى الشركات الكيميائية في دراسة اتساق

قوة أحد منتجاتها الكيميائية السائلة. يُعدّ المنتج على شكل عجنات في راقودات ضخمة ثم يوضع بعد ذلك في براميل. تخزن البراميل بعد ذلك لفترة من الزمن في مستودع. واختبار اتساق قوة المنتج الكيميائي، اختار محلل عشوائيا خمس عجنات مختلفة من المنتج من المستودع ثم اختار عندئذ أربعة براميل من كل عينة عشوائيا. ثم أخذ ثلاثة قياسات من كل برميل وفيما يلي بيانات القوة:

أ - أوجد الرواسب لنموذج المعاينة الجزئية (26.44) ذي المراحل الثلاث، وارسمها في مقابل القيم التوقعية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج

(26.44)؟

3				2				1				عينة ١
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	برميل /
3.1	2.9	3.4	3.0	2.4	2.6	2.7	2.8	2.4	2.6	2.5	2.3	قياس التركيز
2.8	3.0	3.3	3.1	2.8	2.6	2.5	2.9	2.6	2.4	2.3	2.1	k=1
3.2	3.2	3.0	2.9	2.6	2.8	2.8	2.6	2.3	2.7	2.5	2.0	k=2
												k=3
5				4				عينة ٢				
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	برميل /
3.9	3.7	3.8	3.6	2.7	3.1	2.8	2.5	قياس التركيز				
3.5	3.5	3.8	3.7	2.9	2.8	3.0	2.8	k=1				
3.7	3.5	3.5	3.4	2.6	2.9	2.7	2.6	k=2				
								k=3				

المعاينة الجزئية ثلاثي المراحل هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختر ما إذا كانت هناك تقورات أم لا في متوسط القوة بين المعينات.

استخدم $\alpha = 0.01$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي

القيمة P للاختبار؟.

ج- اختر ما إذا كانت هناك تقورات أم لا في متوسط القوة بين العراويل

ضمن المعينات، استخدم $\alpha = 0.01$. أكتب البدائل، قاعدة القرار

والنتيجة، ماهي القيمة P للاختبار؟.

د - أوجد 99 بالمائة فترة ثقة للمتوسط الإجمالي لقوة المنتج الكيميائي.

هـ - أوجد تقديرا نقطيا لـ σ^2 ، σ_p^2 و σ_y^2 . أي مركبات التباين تبدو

الأكثر أهمية في التباين الكلي σ_y^2 .

تمارين

(٢٤-٢٦) استنبط (26.23) بزيغ (26.12) ثم الجمع فوق جميع المشاهدات.

(٢٥-٢٦) استنبط (26.16b) من (26.13b).

(٢٦-٢٦) استنبط (26.17) لتصميم حاضن متوازن ثنائي العامل.

(٢٧-٢٦) اعتبر تصميمنا حاضنا متزا ثنائي العامل ، حيث للعامل A تأثيرات مثبتة

وللعامل B (محضن ضمن العامل A) تأثيرات عشوائية.

أ - استنبط $\{\bar{Y}_i\}$ و σ^2 و $\{\bar{Y}_i\}$.

ب- أوجد مقدرا نقطيا غير منحاز لـ σ_p^2 .

(٢٨-٢٦) استنبط تباين (26.41) لنموذج المعاينة الجزئية (26.35) بتأثيرات معالجات مثبتة.

(٢٩-٢٦) (في حاجة لحساب التفاضل والتكامل) استنبط المحصور المثلثي للعينات في

(26.43) (توضيح : انظر التعليق 2 في صفحة).

(٣٠-٢٦) استنبط التباين (26.41) لنموذج المعاينة الجزئية ثلاثي المراحل مستخدما

توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٦-١٠). يبين أن التباين المقسّر

(26.46) هو مقدر غير منحاز للتباين في (26.45).

مشاريع

(٢٦-٣١) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير دواء، اعتبر، فقط، الجزء ١ من الدراسة والمستوى ٤ للحرعة بمعنى، خذ فقط المشاهدات التي يكون المتغير ٢ فيها مساويا 1، والمتغير 0 فيها مساويا 4. افترض أن معدل الضغط الابتدائي للرافعة (عامل A) له تأثيرات مثبتة وأن الفئران تشكل العامل الثاني (عامل D) وله تأثيرات عشوائية.

أ - أكتب النموذج اللامم لهذه الدراسة المحضنة ثنائية العامل.

ب - أوجد الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية، قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج؟.

(٢٦-٣٢) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير دواء وإلى المشروع (٢٦-٣١) افترض أن نموذج التصميم الحاضن (26.8)، حيث $\beta_{(0)}$ و $\beta_{(1)}$ عشوائيان، هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختر ما إذا كان متوسط معدل ضغط الرافعة يختلف باختلاف فئات المعدل الابتدائي الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ ، أكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة ماهي القيمة P - للاختبار.

ج - اختر ما إذا كان متوسط معدل ضغط الرافعة مختلفا للفئران ضمن فئات المعدل الابتدائي، استخدم $\alpha = 0.05$. أكتب البدائل قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة P - للاختبار؟ ماذا تتضمن استنتاجاتك حول الفئران الأربع في فئة المعدل الابتدائي البطيء؟

د - قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات معدل ضغط الرافعة لفئات المعدل الابتدائي الثلاث، استخدم طريقة توكي - بمعامل ثقة عالى 90 بالمائة.

هـ - أوجد تقديرا نقطيا لتباين ما بين الفئران.

(٢٦-٣٣) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير دواء. اعتبر، فقط، الجزء ٢ من الدراسة والمستوى 3 للحرعة، بمعنى، خذ فقط المشاهدات التي يكون

المتغير ٢ فيها مساويا 2 والمتغير ٥ فيها مساويا 3. افترض أن فئات معدل ضغط الرافعة الابتدائي هي المعالجات بتأثيرات مثبتة، وأن الفئران هي الوحدات التجريبية بمشاهدتين من كل وحدة تجريبية.

أ - أكتب النموذج المناسب لهذه الدراسة أحادية العامل بمعاينة جزئية.
ب- أوجد الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوقعية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج؟

ج- اختر الفرض أن $\sigma_{\epsilon} = 0.01$ لها التباين نفسه ثم، وذلك من أجل جميع معدلات ضغط الرافعة. استخدم اختبار هارتلي (فقرة ١٦-٢) بمستوى معنوية 0.01. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٦-٣٤) بالإشارة إلى مجموع بيانات تجربة تأثير دواء والمشروع (٢٦-٣٣) افترض أن نموذج المعاينة الجزئية أحادية العامل (26.23) بتأثيرات معالجات مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.
ب- اختر ما إذا كان متوسط معدل ضغط الرافعة مختلفا في فئات المعدل الابتدائي الثلاث أم لا، استخدم 0.01. $\alpha =$ أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة- p للاختبار؟

ج- اختر ما إذا كانت هناك فروق أم لا في متوسط معدل ضغط الرافعة بين الفئران استخدم 0.01. $\alpha =$ أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة- p للاختبار؟

د - قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات معدلات ضغط الرافعة لفئات المعدل الابتدائي الثلاث - استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. لخص نتائجك.

هـ - أوجد تقديرات نقطية لـ σ^2 و σ^2_{ϵ} .

قواعد تطوير نماذج تحاييد وحساب للخصائص المتوازنة

نقدم ونوضح في هذا الفصل قواعد تطوير نماذج للخصائص العملية الحاضرة و/أو المتصالبة، وقواعد إيجاد مجاميع للمربعات اللازمة ودرجات الحرية لتوسط المربعات الموافقة، وقواعد إيجاد القيم المتوقعة لتوسط المربعات. وتنطبق هذه القواعد على جميع الخصائص المتوازنة بتكرارين أو أكثر مع عدم وجود تفاعلات، أي مع افتراض أن تأثيرات التفاعلات مساوية للصفر.

وكما لوحظ سابقاً، يكون التصميم متوازناً في الحالة الحاضرة عندما (١) يبقى عدد مستويات العامل المحضون نفسه من أجل كل مستوى من مستويات العامل الحاضر (2) يكون عدد التكرارات ثابتاً للتركييب المختلفة من العوامل. ويكون التصميم متوازناً في الحالة المتصالبة عندما يكون عدد التكرارات ثابتاً لجميع تركيب العوامل. ويتطلب الاتزان مع تصميم معانية فرعية أن تبقى حجم العينات الفرعية عند كل مرحلة معانية ثابتة.

وسنبين في الفقرة ٢٧ - ٦ أن تعديلاً طفيفاً للقواعد يجعلها قابلة للتطبيق في تصميم متوازنة بدون تكرارات و/أو مع افتراض بعض حدود التفاعل مساوية للصفر.

(٢٧ - ٦) قاعدة لتطوير نموذج

نبدأ بتقديم قاعدة لتطوير نموذج تصميم عاملي حاضن و/أو متصالب، وهذه القاعدة قابلة للتطبيق عندما لا نفرض أية تفاعلات مساوية للصفر. وسنستخدم ك توضيح مثال مدرسة التدريب في الجدول (٢٦-١)، حيث تمت دراسة تأثيرات ثلاث

مدارس. (عامل A) وتأثيرات مدرسين اثنين ضمن المدرسة (عامل B) مع أخذ تكرارين في كل حالة.

قاعدة (٢٧ - ١)

خطوة ١: ضع ثابتا إجماليا وحدّ تأثير رئيس لكل عامل أخذنا في الاعتبار حالة محضين عامل ضمن عامل آخر.

مثال. لنأخذ مدرسة التدريب نضع في النموذج:

$$(27.1) \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{jk} + \epsilon_{ijk}$$

لاحظ أن العامل B محض ضمن العامل A .

خطوة ٢: ضع جميع حدود التفاعل ماعدا تلك التي تتضمن كلا من العامل الحاضر والعامل المحضون.

مثال. بما أن العامل B محض ضمن العامل A ، فلا يشمل النموذج التفاعل AB (حد التفاعل الممكن الوحيد هنا).

خطوة ٣: التفاعلات بين عامل محض وعامل آخر متصالب معه تكون بلورها محضنة دائما .

مثال. لا تظهر هذه الحالة في مثال مدرسة التدريب.

خطوة ٤: ضع حد الخطأ وهو محض ضمن جميع العوامل.

مثال. لنأخذ مدرسة التدريب، يكون حد الخطأ ϵ_{ijk} ويكون النموذج المناسب هو النموذج التالي:

$$(27.2) \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2; k = 1, 2$$

(٢٧ - ٢) قاعدة إيجاد مجاميع المربعات ودرجة الحرية

بما أن العوامل المحضنة وتصاميم المعاينة الفرعية قد تتطلب مجاميع مربعات لم نناقشها حتى الآن، فسنعتبر الآن قاعدة لإيجاد مجاميع المربعات ودرجات الحرية المصاحبة لها. وهذه القاعدة قابلة للتطبيق في جميع التصاميم المتوازنة بتكرارين أو أكثر، مع عدم وجود حدود تفاعل نفترضها مساوية للصفر.

توضيح

وأحسن طريقة لشرح قاعدة إيجاد مجاميع المربعات ودرجات الحرية المصاحبة لها هي شرحها بمثال. وسنستمر في اعتبار مثال مدرسة التدريب، حيث العامل B محضن ضمن العامل A . ولا يهم في هذه القاعدة ما إذا كانت تأثيرات العوامل مثبتة أو عشوائية.

قاعدة (٢٧ - ٣) خاصة بالصيغ التعريفية لمجاميع المربعات

خطوة ١. اكتب معادلة النموذج.

مثال. أعطيت معادلة النموذج لمثال مدرسة التدريب سابقا - سنين هذا النموذج الآن وصيغته العامة حيث يوجد a مستوى للعامل A ، و b مستوى للعامل B و n تكرارا.

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \mu_i + \beta_{kj} + e_{ijk}$$

$$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$$

خطوة ٢. اكتب لكل حد من حدود النموذج رمز المصاحب فيما عدا الحد العام الثابت.

مثال. نقوم بهذه الخطوة لمثال مدرسة التدريب في العمودين 2,1 من الجدول (٢٧-١) لكل من α_i ، β_{kj} ، e_{ijk} ، ولن يكتمل السطر المتعلق بالمجموع حتى الخطوة ٩.

خطوة ٣. سيكون لكل مجموع مقابل لحد معين في النموذج معامل يساوي جداء القيم العليا للأدلة التي لا تظهر في هذا الحد المعني. وبصبح المعامل 1 لو ظهرت جميع الأدلة في حد النموذج.

مثال. بين العمود 3 من الجدول (٢٧-١) للمعاملات في مثالنا، وعلى سبيل المثال α_i لا يحتوي i, k ، والقيم العليا هذين الدليلين هما b و n على الترتيب. ولذا يكون bn معامل SSA . وبما أن حد النموذج e_{ijk} يحتوي على جميع الأدلة، فالمعامل هنا يؤخذ مساويا للواحد.

خطوة ٤. تجمع كل مجموع مربعات فوق جميع الأدلة الواردة في حد النموذج، سواء كانت الأدلة ضمن أقواس أم لا.

مثال. بين العمود 4 إشارات الجمع لمثالنا. وعلى سبيل المثال، جمعنا حد مجموع المربعات الموافق لـ α_i فوق قيم i ، وهو الدليل الوحيد في حد النموذج هذا.

جدول (١-٧٧) استبعاد الصع الصعبة لجميع المبيعات في تجربة واحدة ذاتية المعامل (٥ معطرين ضمن ٨)

(١) حد النموذج	(٢) SS	(٣) معامل	(٤) \sum	(٥) جلاء ورتبي	(٦) حد بدلي قريبه	(٧) مجموع مربعات	(٨) درجات حرة
α	SSA	bn	\sum_i	$i = 1$	$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$	$bn \sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$a - 1$
β_0	SSB(A)	n	$\sum_i \sum_j$	$k(j-1)$ $= j - 1$	$\bar{y}_{j.} - \bar{y}_{i.}$	$n \sum_j \sum_i (\bar{y}_{j.} - \bar{y}_{i.})^2$	$a(b-1)$
$\alpha\beta_0$	SSE	1	$\sum_i \sum_j \sum_k$	$(k-1)n$ $= j(k-j)$	$y_{ijk} - \bar{y}_{i.}$	$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{i.})^2$	$ab(b-1)$
المجموع	SSTO				$y_{ijk} - \bar{y}_{..}$	$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{..})^2$	$abn - 1$

توزيع احتمالية معطية تطبيقية (٢-١)

وبالمثل جمعنا حد مجموع المربعات الموافق لـ $\beta_{(ij)}$ فوق جميع قيم i ، j ، k حيث تظهر هذه الأدلة كلها في حد النموذج.

خطوة ٥. شكّل جداء رمزيا من أدلة حد النموذج مستخدما الدليل نفسه إذا كان ضمن قوسين ومستخدما الدليل ناقصا 1 إذا لم يكن الدليل ضمن قوسين وانشر الجداء الذي حصلت عليه.

مثال. يبين العمود 5 الجداء في مثالنا. وعلى سبيل المثال، فإن الجداء الرمزي لـ α_i هو 1 - i ، والجداء الرمزي لـ $\beta_{(ij)}$ و $k - ij$ و $ij = ij(k-1)$ هو الجداء الرمزي لـ $\beta_{(ij)}$.
خطوة ٦. يقابل كل حد في مفكوك الجداء الرمزي متوسط للملاحظات تلحقه الأدلة الواردة في ذلك الحد ونقطة عن كل دليل غير وارد فيه. ويقابل الواحد المتوسط الإجمالي. أما إشارة كل متوسط، فهي إشارة الحد المقابل له في الجداء الرمزي. والمباراة الناتجة في المتوسطات هي الحد التقليدي الذي سنريه.

مثال. يبين العمود 6 الحدود المراد تربيعها في مثالنا. لاحظ أن الجداء الرمزي لـ α_i هو 1 - i والحد التقليدي المراد تربيعه هو:

$$\bar{Y}_{..} - \bar{Y}_{..}$$

والجداء الرمزي لـ $\beta_{(ij)}$ و $k - ij$ وبالتالي فإن الحد التقليدي المراد تربيعه هو:

$$\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{..}$$

وبالمثل فإن الجداء الرمزي لـ $\beta_{(ij)}$ هو $k - ij$ ولذا يكون الحد المراد تربيعه:

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij}$$

لاحظ أننا كتبنا الحد الأول Y_{ijk} باعتباره لم يُجمع فوق أي دليل.

خطوة ٧. نحصل على مجاميع المربعات الملائمة بعد ضم خطوات السربيع والتجميع ثم الضرب في العامل المناسب.

مثال. يبين العمود 7 بمجاميع المربعات لمثالنا.

خطوة ٨. نحصل على درجات الحرية بأن نضع في الجداء الرمزي كيدليل عن كل دليل أكبر قيمة ممكنة لهذا الدليل.

مثال. بين العمود 8 درجات الحرية لثالثنا. وعلى سبيل المثال فالجداء الرمزي لـ:
 α هو $i - 1$ وبالتالي يكون $df = a - 1$. وبالمثال، نجد من أجل α أن الجداء الرمزي
 $ijz - k$ وبالتالي يكون $df = abn - ab = ab(n-1)$.

خطوة ٩. يُعرّف مجموع المربعات الكلي عادة بأنه المجموع فوق جميع
الملاحظات لمربع انحراف الملاحظة عن المتوسط الإجمالي. ونعرف العدد الكلي
لدرجات الحرية بأنه يساوي دائما العدد الكلي للملاحظات مطروحا منه الواحد.
والنتائج في الجدول (١-٢٧) هي بالطبع النتائج نفسها التي أعطيت سابقا في
الجدول (٤-٢٦).

قاعدة (٢٧ - ١٣) الخاصة بالصيغ الحسابية لمجموع المربعات.

إذا رغبتا بالصيغ الحسابية لمجموع المربعات، فتعدّل الطريقة كما يلي:

خطوة ١١. احصل على الجداول الرمزية كما سبق.

خطوة ١٢. يقابل كل حد من حدود الجداء الرمزي مجموع للملاحظات تلحقه
الأداة الواردة في ذلك الحد ونقطة عن كل دليل غير وارد فيه. ويقابل 1 المجموع
الكلي للملاحظات.

خطوة ١٣. مربع كل مجموع ويجمع المربع الناتج فوق جميع الأدلة الملحقة فيه.

خطوة ١٤. للمجموع نفس إشارة الحد المقابل له في الجداء الرمزي ويقسم على
جداء القيم العليا للأدلة غير الملحقة فيه.

خطوة ١٥. SSTO يساوي دائما مجموع مربعات الملاحظات مطروحا منه
مربع مجموع كل الملاحظات بعد قسمته على العدد الكلي للملاحظات.
ونحصل على درجات الحرية كما سبق.

جدول (٢-٢٧) استنباط الصيغ الحسابية لمجموع المربعات لتجربة حادثة ذات عاملين (B محققين ضمن A).

درجات الحرية	مجموع المربعات	الجداء الرمزي	حد النموذج
$a - 1$	$SSA = \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{bn} - \frac{Y^2}{abn}$	$i - 1$	α_i
$(b - 1)a = ab - a$	$SSB(A) = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} - \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{bn}$	$(j - 1)a$ $= ij - i$	β_{jn}
$abn - 1$	$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n}$	$(k - 1)ij$ $= ijk - ij$	α_{ijk}
$abn - 1$	$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{abn}$		المجموع

مثال. يحتوي جدول (٢-٢٧) على استنباط الصيغ الحسابية لمثلثنا المحاضن ثنائي العامل. ولتوضيح ذلك اعتمد حد النموذج β_{jn} فالجداء الرمزي لهذا الحد هو $ij - i$. وبالتالي نحدد:

$$\frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} - \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{bn}$$

والنتائج في الجدول (٢-٢٧) هي نفسها كذلك للمطلة سابقا في (١٦ - ٢٦) أو مكافئة لها.

(٢٧ - ٣) قاعدة لإيجاد متوسط المربعات

ستمكننا قاعدة إيجاد توقع متوسط المربعات التي ستقدمها الآن من تخميش الاشتقاق الصعبة. وتطبق القاعدة على كل من العوامل المحضنة والعوامل المتصلبة. وتكون القاعدة قابلة للتطبيق في جميع التصاميم المتوازنة بتكرارين أو أكثر، ومع عدم وجود حدود تفاعل نفترضه مساويا للصفر.

توضيح

سنستخدم مثال مدرسة التدريب جدول (٢٦-١) مرة أخرى. ولدينا هنا العامل A (المدرسة) والعامل B (المدرس) كلاهما مثبتان، والعامل B محضن ضمن العامل A ، وللعامل B ، عدد من المستويات يساوي b ضمن كل مستوى من مستويات العامل A ، ومستويات العامل A عددها a ويوجد n تكرارا.

قاعدة ٢٧ - ٤

قد تبدو قاعدة إيجاد توقع متوسط المربعات التي سنقدمها معقدة قليلا. عند قراءتها للمرة الأولى، ومع ذلك، يمكن الحصول على توقع متوسط المربعات المرغوب بسرعة وبسهولة بعد قليل من التدريب.

خطوة ١. اكتب معادلة النموذج.

مثال. معادلة النموذج هي تلك المذكورة في (27.2a).

$$Y_{ijk} = \mu.. + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{k(ij)}$$

خطوة ٢. اكتب حد تبين التأثيرات العشوائية المصاحب، وذلك لكل حد من

حدود النموذج، ماعدا الثابت الإجمالي.

مثال.

$$\begin{array}{ccc} \alpha_i & \beta_{j(i)} & \epsilon_{k(ij)} \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma^2 \end{array}$$

إذا كانت تأثيرات العوامل مثبتة - كما في هذا المثال - فسنستبدل، في النهاية، بحدود التباين مجموع مربعات التأثيرات مقسوما على درجات الحرية. وهكذا، سنستبدل σ_α^2 في مثال مدرسة التدريب، $\sum \alpha_i^2 / (a-1)$ بالحد، وبالمثل، سنستبدل بالحد σ_β^2 القيمة $\sum \beta_{j(i)}^2 / a(b-1)$. وعلى أي حال، فمن الأسهل مؤقتا كتابة حد التباين بدلا من مجموع مربعات التأثير مقسوما على درجات الحرية.

خطوة ٣. ضع جدولا تشكل صفوفه عناصر النموذج، فيما عدا الثابت العام.

مثال.

$$\begin{array}{c} \alpha_i \\ \beta_{j(i)} \\ \epsilon_{k(ij)} \end{array}$$

خطوة ٤. عناوين الأعمدة في الجدول هي مجموعة الأدلة في النموذج وتحت كل عنوان أكتب F إذا كان العامل المرز بها اللبيل مثبتا ، وأكتب R إذا كان العامل عشوائيا . أكتب، أيضا، عدد المستويات لكل عامل.

مثال:

k	j	i
R	F	F
n	b	a
α_i		
β_{jk}		
σ_{ijk}		

وعلى سبيل المثال، ترمز (i) للمدرسة، وهي عامل مثبت له a من المستويات. لاحظ أن الدليل k يرمز للتكرارات، وهي «عامل» عشوائي له n من المستويات.

خطوة ٥. في كل صف يتضمن دليلا أو أكثر ضمن قوسين، ضع ١ في العمود (الأعمدة) المقابل للدليل (الأدلة) ضمن قوسين.

مثال:

k	j	i
R	F	F
n	b	a
α_i		
β_{jk}		
σ_{ijk}		

وهكذا، ففي الصف β_{jk} سنضع ١ في العمود i وهلم جرا.

خطوة ٦. في كل صف حيث يوجد دليل أو أكثر غير محاط بقوسين ضع في العمود (الأعمدة) المقابل لهذا الدليل (الأدلة) غير المحاط بقوسين ١ إذا كان الدليل يرمز إلى عامل عشوائي و 0 إذا كان يرمز لعامل مثبت.

وهكذا، ففي الصف β_{jk} نضع ١ دليلا غير محاط بقوسين، ويشير إلى عامل مثبت

B. ولذا نضع صفرا في العمود σ .

مثال:

k	j	i	
R	F	F	
n	b	a	
		0	α_i
	0	1	$\beta_{k(i)}$
1	1	1	$\gamma_{k(i)}$

خطوة ٧. إملأ جميع الخلايا الفارغة بعدد المستويات الذي يظهر في رأس العمود.

مثال:

k	j	i	
R	F	F	
n	b	a	
n	b	0	α_i
n	0	1	$\beta_{k(i)}$
1	1	1	$\gamma_{k(i)}$

يتألف كل $E(MS)$ من تركيب خطي في حدود التباين التي وردت في الخطوة ٢. ومعاملات تحصيل عليها من الخطوات الإضافية التي أتمناها لتونا في الجدول. وقد تكون بعض المعاملات صفراً، وهذا يعني أن حد التباين المقابل غير موجود في $E(MS)$.

خطوة ٨. ضع على يمين كل صف في الجدول الذي تم حتى الخطوة ٧ حد تباين الخطأ الموافق للتأثير في ذلك الصف. وأضف عموداً لكل توقع متوسط مربعات تزيد إيجاده. وتحت كل توقع متوسط مربعات ضع جميع الأدلة (كما في ذلك الأقواس) الموافقة لحـد النموذج المقابل.

لاحظ أن جميع الأدلة الموافقة لحـد النموذج المقابل سواء كانت ضمن قوسين أم لا، تظهر تحت توقع متوسط المربعات. وعلى سبيل المثال يتوافق حد النموذج $\beta_{k(i)}$ مع $E\{MSB(A)\}$ ، وبالتالي تظهر الأدلة (i) ، ز. وبالمثل يتوافق حد النموذج $\gamma_{k(i)}$ مع $E(MSE)$ وبالتالي تظهر الأدلة (ij) و k .

خطوة ١٠. ويمكن إيجاد معاملات حدود التباين التي لم يكن معاملها صفراً وفقاً للخطوة ٩ كما يلي:

أ - لكل عمود توقع متوسط مربعات، احذف (معنى احجب أو غطى) العمود (الأعمدة) على اليسار الموافقة لأدلة للتغير التي ليست داخل الأقواس في رأس العمود $E(MS)$.
 ب - أوجد حاصل ضرب مدخلات الأعمدة المتبقية (على اليسار) لكل صف مدروس.
 خطوة ١١. توقع متوسط مربعات يساوي مجموع جملات كل معامل في حد التباين الموافق له، مع وضع مجموع مربعات التأثيرات مقسوماً على درجات حركته بدلاً من حدود التباين، وذلك في حالة التأثيرات المثبة.

مثال.

				k	j	i	
$E\{MSE\}$	$E\{MSB(A)\}$	$E\{MSA\}$	تباين	R	F	F	
$(ij)k$	(ij)	i		n	b	a	
0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	bn	σ_a^2	n	b	0	α_i
0 (خطوة ٩)	n	0	σ_β^2	n	0	1	$\beta_{j(n)}$
1	1	1	σ^2	1	1	1	$\delta_{k(n)}$

ولإيجاد المعاملات للعمود $E(MSA)$ على سبيل المثال، لاحظنا سابقاً أن تخصيص معاملات غير الصفر كان نتيجة للخطوة ٩. ويستدعي تطبيق الخطوة ١٠ (أ) حذف العمود i على اليسار وبالتالي نحصل بضرب الحدود في العمودين k على:

			k	i
$E\{MSB(A)\}$	تباين	R	F	
(ij)		n	a	
0 (خطوة ٩)	σ_a^2	n	0	α_i
n	σ_β^2	n	1	$\beta_{j(n)}$
1	σ^2	1	1	$\delta_{k(n)}$

وهكذا نجد:

$$E\{MSA\} = bn\sigma_a^2 + (0)\sigma_\beta^2 + (1)\sigma^2 = bn\sigma_a^2 + \sigma^2$$

وبما أن للعامل A تأثيرات مثبتة، فإننا نحصل في النهاية على:

$$E\{MSA\} = bn \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + \sigma^2$$

ونحصل على المعاملات المتبقية لـ $E\{MSB(A)\}$ بطريقة مماثلة. نحذف العمود j

على اليسار، وهو الدليل غير الموجود بين قوسين، فنحصل على:

		k	i	
$E\{MSB(A)\}$	تباين	R	F	
(ij)		n	a	
$0(١)$ (خطوة ١)	σ_a^2	n	0	α_i
n	σ_β^2	n	1	$\beta_{R(i)}$
1	σ^2	1	1	$\alpha_{R(i)}$

وهكذا نجد:

$$E\{MSB(A)\} = (0)\sigma_a^2 + n\sigma_\beta^2 + (1)\sigma^2 = n\sigma_\beta^2 + \sigma^2$$

وبما أن للعامل B تأثيرات مثبتة، فإننا نحصل في النهاية على:

$$E\{MSB(A)\} = n \frac{\sum \sum \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)} + \sigma^2$$

ولإيجاد المعاملات المتبقية في العمود $E\{MSE\}$ نحذف العمود k ويكون الجداء

للسطر الخاص بـ σ^2 هو 1×1 وهكذا نجد:

$$E\{MSE\} = (0)\sigma_a^2 + \sigma_\beta^2 + (1)\sigma^2 = \sigma^2$$

وبتجميع النتائج نجد:

$$E\{MSA\} = bn \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + \sigma^2 \quad (27.5a)$$

$$E\{MSB(A)\} = n \frac{\sum \sum \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)} + \sigma^2 \quad (27.5b)$$

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \quad (27.5c)$$

وهذه النتائج مطابقة بالطبع للنتائج التي أعطيت سابقا في الجدول (٤-٢٦).

ملاحظة: تعطى بعض حزم الحاسب توقع متوسط المربعات في مسألة تخمين. ويوضح الشكل (٢-٢٨) مثالا على ذلك.

(٤-٢٧) دراسة متصلة ثنائية العامل - تأثيرات عوامل مختلطة .

قدعنا في الفقرات السابقة من هذا الفصل قواعد تطوير النموذج وإيجاد مجاميع المربعات ودرجات الحرية وتوقع متوسط المربعات. والآن سنتقدم في هذه الفقرة والفقرات اللاحقة توضيحات إضافية لاستخدام تلك القواعد في تصاميم تنطوي على عوامل متصلة وحاضرة.

سنعتبر في هذه الفقرة حالة تجربة ثنائية العامل في تصميم تام (التعشية) حيث يتصلب العاملان B, A ، وللعامل A تأثيرات مثبتة، بينما تأثيرات العامل B عشوائية، ولدينا m تكرارا لكل تركيبة من العوامل. وتكون معادلة النموذج هي تلك المبينة في (21.26):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

بافتراض أننا نتعرف الآن على تخمين حد الخطأ ϵ .

ويحتوي الجدول (٢٧-٣) على استنباط لمجاميع المربعات كما وردت في التعاريف ويحتوي الجدول (٤-٢٧) أ على الجدولة الأولية لإيجاد توقع متوسط المربعات، بينما يوضح الجدول (٤-٢٧) ب نتائج الخطوات ٩ و ١٠ للقاعدة (٢٧ - ٤). وتكون حدود تباين التأثيرات العشوائية المقابلة لحدود النموذج كمايلي:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_i & \beta_j & (\alpha\beta)_{ij} & \epsilon_{ijk} \\ \sigma_{\alpha}^2 & \sigma_{\beta}^2 & \sigma_{\alpha\beta}^2 & \sigma^2 \end{array}$$

والتأثيرات المثبتة هنا هي التأثيرات α_i ، فقط. وبالتالي سنحتاج في النهاية إلى استبدال مجموع مربعات التأثيرات مقسوما على درجات الحرية بـ σ_{ϵ}^2 لاحظ في الجدول (٤-٢٧) ب أن معامل σ_{ϵ}^2 في $E(MSA)$ هو الصفر وذلك كنتيجة للخطوة ٩. إذ أن الأدلة في حد النموذج β_j لا تحتوي على الدليل i في العمود $E(MSA)$. وفي الخطوة ١٠، لإيجاد المعاملات في العمود $E(MSA)$ ، حذفنا العمود i حيث أنه الدليل الوحيد في رأس العمود الذي لا يوجد بين قوسين، ويتم الحصول على معاملات توقع متوسط المربعات الأخرى بالطريقة نفسها ولكل توقع متوسط مربعات، يشير الجدول (٤-٢٧) ب إلى ما إذا كان قد تم الحصول على المعاملات صفر من الخطوة ٩، وأي الأعمدة تم حذفها، أيضا. وفي النتيجة تتطابق بالطبع توقعات المربعات المقدمة في الجدول (٤-٢٧) ج مع تلك المبينة في الجدول (٢١-٤).

جدول (٢٧-٣) استبعاد جميع عناصر المبيعات الشهرية لفترة متساوية فائدة العامل في تصميم ترم الضمنية

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)
عدد المرفوح	SS	معامل	Σ	الخطأ الفردي	الخطأ الزمنية	مجموع مربعات	درجات
							الحرية
a_i	SSA	bn	\sum_i	$i-1$	$\bar{y}_i - \bar{y}_-$	$bn \sum_i (\bar{y}_i - \bar{y}_-)^2$	$a-1$
β_m	SSB	am	\sum_j	$j-1$	$\bar{y}_j - \bar{y}_-$	$am \sum_j (\bar{y}_j - \bar{y}_-)^2$	$b-1$
$(\alpha\beta)_{ij}$	$SSAB$	n	$\sum_i \sum_j$	$(i-1)(j-1)$ $= (ij-1)-1$	$\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y}_-$	$n \sum_i \sum_j (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y}_-)^2$	$(a-1)(b-1)$
α_k	SSE	1	$\sum_i \sum_j \sum_k$	$(k-1)ij$ $= ij(k-1)$	$y_{ijk} - \bar{y}_{ij}$	$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$	$ab(n-1)$
المجموع	$SSTO$				$y_{ab} - \bar{y}_-$	$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_-)^2$	$abn-1$

قواعد تطوير نماذج تحليل وجدول التصميم المتوازنة

جدول (٤-٢٧) استنباط $E\{MS\}$ لتجربة متصالية ثلاثية العامل (A مثبت، B عشوائي)

(أ) جدول

k	j	i	
R	R	F	
n	b	a	
n	b	0	α_i
n	1	a	β_j
n	1	0	$(\alpha\beta)_{ij}$
1	1	1	$\sigma_{\epsilon(n)}$

(ب) معاملات

$E\{MSE\}$ (ij)k	$E\{MSAB\}$ ij	$E\{MSE\}$ j	$E\{MSA\}$ i	تباين
0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	b - n	σ_a^2
0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	an	(خطوة ٩)	σ_β^2
0 (خطوة ٩)	n	0.n	0	$\sigma_{\alpha\beta}^2$
1.1	1	1.1	1.1	σ^2

العمود i محذوف العمود j محذوف العمودان i, j محذوفان العمود k محذوف

 $E\{MS\}$ (جـ)

$$E\{MSA\} = bn(\sum \alpha_i^2) / (a-1) + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSB\} = an\alpha_\beta^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSAB\} = n\sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSE\} = \sigma^2$$

(٥-٢٧) دراسة متصالية حاضنة ثلاثية العامل - تأثيرات عامل مختلطة

سنعتبر هنا الحالة التي تكون فيها بعض العوامل، وليست جميعها عوامل حاضنة.

وتسمى مثل تلك التصميمات تصاميم حاضنة جزئية، أو تصاميم هرمية جزئية، أو

تصاميم متصالية - حاضنة.

درست إحدى التجارب تأثير الخلفية الثقافية على صناعة القرار جماعيا . تشكيل فرق من الطلاب كما تم تخصيص مهمة لكل فرقة، وكان أحد للتنويات التابعة عدد الأسئلة المثارة قبل القرار الجماعي النهائي. تكونت بعض الفرق من طلاب أحانب والأخرى من طلاب من الولايات المتحدة. ويتألف نصف الفرق من ثمانية أعضاء، والنصف الآخر من أربعة أعضاء. وقد تم استخدام اثنين من المراقبين الأجانب للفرق الأجنبية. واثنين من المراقبين الأمريكيين للفرق الأمريكية. وهكذا يمكن تقديم التصميم كمايلي:

فرق أمريكية (A ₁)		فرق أجنبية (A ₂)		
مراقب ١ (C ₁)	مراقب ٢ (C ₂)	مراقب ٣ (C ₁)	مراقب ٤ (C ₂)	
تكرار 1	تكرار 1	تكرار 1	تكرار 1	فريق صغير
تكرار 2	تكرار 2	تكرار 2	تكرار 2	B ₁
تكرار 1	تكرار 1	تكرار 1	تكرار 1	فريق كبير
تكرار 2	تكرار 2	تكرار 2	تكرار 2	B ₂

وسنغرض للتبسيط أننا استخدمنا تكرارين (فريقين) ، فقط، لكل خلية.

تطوير نموذج

لنعتبر قومية الفريق العامل A وحجم الفريق العامل B والمراقب العامل C. لاحظ أن العامل C عضن ضمن العامل A حيث أن المراقبين للفرق الأمريكية مختلفان عن مراقبي الفرق الأجنبية. ولاحظ، أيضا، أن العاملين A, B متصاليان حيث يظهر كل مستوى من العامل A مع كل مستوى من مستويات العامل B وبالعكس. وبالمثل نجد أن العاملين B, C متصاليان. وفي هذا المثال اعتبرت العوامل B, A ذات تأثيرات مثبتة، بينما اعتبرت تأثيرات العامل C (المراقب) عشوائية. ولتطوير نموذج مناسب باستخدام القاعدة (٢٧-١) ، ينبغي طبقا للخطوة ٢، استبعاد التفاعلات ABC من النموذج، لأن العامل C عضن داخل A. وأكثر من ذلك، تبين الخطوة ٣ أن التفاعل

BC محض ضمن العامل A ، حيث أن العامل C محض ضمن العامل A . ولذا يكون التفاعل BC هو التفاعل $BC(A)$ وبالتالي، فإن النموذج لللازم:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{k(i)} + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk(i)} + \varepsilon_{ijk(i)} \quad (27.6)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت عام

α_i تأثيرات مثبتة للقومية.

β_j تأثيرات مثبتة لحجم الفريق.

$\gamma_{k(i)}$ تأثيرات المراقب العشوائية (ضمن القومية)

$(\alpha\beta)_{ij}$ التأثيرات المثبتة لتفاعل القومية - حجم الفريق

$(\beta\gamma)_{jk(i)}$ تأثيرات تفاعل حجم الفريق - المراقب العشوائية

$\varepsilon_{ijk(i)}$ حدود الخطأ العشوائي

$i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, c; m = 1, \dots, n$

سنفرض كالمعتاد أن $\gamma_{k(i)}$ و $(\beta\gamma)_{jk(i)}$ و $\varepsilon_{ijk(i)}$.

توزع توزيعا طبيعيا بتوقعات 0 وتباينات ثابتة، وأن أي فتيين من الفئات الثلاث من المتغيرات العشوائية مستقلتان، إلا أن تأثيرات التفاعل لأي مراقب هي تأثيرات مرتبطة، كما نرى من القيود التالية على النموذج:

$$\begin{aligned} \sum_j (\alpha\beta)_{ij} &= 0 & \sum_j \beta_j &= 0 & \sum_i \alpha_i &= 0 \\ \sum_j (\beta\gamma)_{jk(i)} &= 0 & \text{مهما يكن } i & & \sum_j (\alpha\beta)_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (27.6a)$$

تحليل التباين

يحتوي الجدول (٢٧-٥) تطوير مجاميع المربعات الحسابية ودرجات الحرية لنموذج تحليل التباين (27.6) ،ويحتوي الجدول (٢٧-٦) تطوير متوسط المربعات. وفي حالة التأثيرات المثبتة وضعا، كالمعاد، في الجدول (٢٧-٢٦)ب مجاميع مربعات التأثيرات مقسومة على درجات الحرية بدلا من حدود التباين. ويشير الجدول (٢٧-٦)ب مباشرة إلى كيفية تكوين إحصاء اختبار لمجموعة من الاختبارات المختلفة.

جدول (٩٧-٥) استخدام صيغ حسابية لجميع المربعات في حالة النموذج المتماثل - المخطط (٩٦-٢)

درجات الحرية	جميع المربعات	الجداء المربعي	حد النموذج
$a - 1$	$SSA = \frac{\sum y_{i.}^2}{bcn} - \frac{y^2}{abcn}$	$i - 1$	α_i
$b - 1$	$SSB = \frac{\sum y_{.j}^2}{acn} - \frac{y^2}{abcn}$	$j - 1$	β_j
$a(c - 1)$	$SSC(A) = \frac{\sum \sum y_{i.k}^2}{bn} - \frac{\sum y_{i.}^2}{bcn}$	$(k - 1)i$ $= ki - i$	γ_{ki}
$(a - 1)(b - 1)$	$SSAB = \frac{\sum \sum y_{ij.}^2}{cn} - \frac{\sum y_{i.}^2}{bcn} - \frac{\sum y_{.j}^2}{acn} + \frac{y^2}{abcn}$	$(i - 1)(j - 1)$ $= ij - i - j + 1$	$(\alpha\beta)_{ij}$
$a(b - 1)(c - 1)$	$SSBC(A) = \frac{\sum \sum \sum y_{i.k}^2}{n} - \frac{\sum \sum y_{i.}^2}{cn} - \frac{\sum \sum y_{.k}^2}{bm} + \frac{\sum y_{i.}^2}{bcn}$	$(i - 1)(j - 1)$ $= ij - i - j + 1$	$(\beta\gamma)_{ijk}$
$abc(n - 1)$	$SSE = \sum \sum \sum y_{ijk}^2 - \frac{\sum \sum \sum y_{ij.}^2}{n}$	$(m - 1)jk$ $= jkm - jk$	$\sigma_{\epsilon_{ijk}}$
$abcn - 1$	$SSTO = \sum \sum \sum y_{ijk}^2 - \frac{y^2}{abcn}$		المجموع

جدول (٧-٢٧) استنباط توقع متوسط مربعات النموذج المتصالب الخاصين (6 - 27)

(أ) جدول

توقع متوسط مربعات						تباين	m	k	j	i	
E	BC(A)	AB	C(A)	B	A						
(ijk)m	(i)ik	ij	(i)k	j	i	R	R	F	F		
						n	c	b	a		
0	0	0	0	0	bcn	σ_a^2	n	c	b	0	α_i
0	0	0	0	acn	0	σ_b^2	n	c	0	a	β_j
0	0	0	bn	0	bn	σ_r^2	n	1	b	1	$\gamma_{k(i)}$
0	0	cn	0	0	0	σ_{ap}^2	n	c	0	0	$(\alpha\beta)_{ij}$
0	n	n	0	n	0	$\sigma_{\beta r}^2$	n	1	0	1	$(\beta\gamma)_{jk(i)}$
1	1	1	1	1	1	σ^2	1	1	1	1	$\epsilon_{m(ijk)}$

(ب) توقع متوسط للمربعات

$$E\{MSA\} = bcn \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + bn\sigma_r^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSB\} = acn \frac{\sum \beta_j^2}{b-1} + n\sigma_{\beta r}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSC(A)\} = bn\sigma_r^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSAB\} = cn \frac{\sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} + n\sigma_{\beta r}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSBC(A)\} = n\sigma_{\beta r}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSE\} = \sigma^2$$

مثال.

يحتوي جدول (٧-٢٧) نتائج تجربة اتخاذ قرار جماعي، الموصوفة سابقا على أساس $n=2$ تكرارا. وتم الحصول على تحليل التباين بواسطة برنامج حاسب وهو معروض في الجدول (٨-٢٧).

والبديلات لاختبار تأثيرات القومية: ليس كلا من α مساو للصفر

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$H_a: \text{ليس كل } \alpha \text{ تساوي الصفر} \quad (27.7a)$$

وبشور الجدول (٦-٢٧) ب إلى أن إحصاءة الاختبار للملاكمة هي:

$$F^* = \frac{MSA}{MSC(A)} \quad (27.7b)$$

وفي مثالنا هنا نجد:

$$F^* = \frac{420.25}{25} = 1.681$$

جدول (٧-٢٧) بيانات دراسة متصالية - حاضنة لثالية العامل - مثال اتخاذ قرار جماعي فرق

الولايات المتحدة

فرق أجنبية ($i = 2$)		فرق (U.S.) ($i = 1$)		حجم الفرق
مراقب ٤	مراقب ٣	مراقب ٢	مراقب ١	
($k = 2$)	($k = 1$)	($k = 2$)	($k = 1$)	
4	7	14	16	٤ أعضاء
9	5	19	20	($j = 1$)
12	11	28	21	٨ أعضاء
15	17	19	25	($j = 2$)
$Y_{212} = 13$	$Y_{211} = 12$	$Y_{112} = 33$	$Y_{111} = 36$	
$Y_{222} = 27$	$Y_{221} = 28$	$Y_{121} = 47$	$Y_{121} = 46$	
$Y_{2.1} = 40$	$Y_{21..} = 25$	$Y_{1.1} = 82$	$Y_{11..} = 3$	
$Y_{2.2} = 40$	$Y_{22..} = 55$	$Y_{1.2} = 80$	$Y_{12..} = 93$	
	$Y_{2...} = 80$		$Y_{1...} = 162$	
	$Y_{2..} = 148$		$Y_{1..} = 94$	
$Y_{...} = 242$				

ولمستوى معنوية 0.05 = α نحتاج $F(95;1,2) = 18.5$ وبما أن $1.681 < F^*$

نستنتج H_0 أي أن للقومية تأثير على سلوك المجموعة. والقيمة P - لهذا الاختبار هي

0.0006. ويمكن إجراء الاختبارات الأخرى بالطريقة نفسها.

ويمكن وضع فترات ثقة لمضادات في التأثيرات الرئيسة للعوامل بالطريقة المعتادة وذلك عندما تكون التأثيرات مثبتة. وعلى سبيل المثال، لتقدير الفرق بين متوسط عدد الأسطلة التي أنشئت قبل القرار للفرق الأمريكية والفرق الأجنبية، فإننا نحتاج إلى $MSC(A)$ باعتبارها متوسط المربعات في مقام إحصاء الاختبار للدراسة تأثيرات القومية. وبالتحديد، فإن حدي الثقة لـ $D = \mu_1 - \mu_2$ هما:

جدول (٢٧-٨) جدول نمائين للدراسة متصالية - حاشية لثلاثة العامل - مثال المجاز قرار جماعي

مصدر التغير	SS	df	MS
A القومية	420.25	1	420.25
B حجم الفريق	182.25	1	182.25
C(A) المراقب (ضمن القومية)	.50	2	.25
AB تفاعلات القومية - حجم الفريق	2.25	1	2.25
BC(A) تفاعلات حجم الفريق - المراقب (ضمن القومية)	2.50	2	1.25
E الخطأ	106.00	8	13.25
المجموع	713.75	15	

$$\hat{D} \pm t[1 - \alpha/2; (c-1)\alpha]s\{\hat{D}\} \quad (27.8)$$

حيث:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSC(A)}{nbc} \quad (27.8a)$$

وفي مثالنا نجد:

$$\bar{Y}_{1.} = \frac{162}{8} = 20.25 \quad \bar{Y}_{2.} = \frac{80}{8} = 10.00 \quad \hat{D} = 20.25 - 10.00 = 10.25$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(25)}{8} = 0.63 \quad s\{\hat{D}\} = 0.79$$

ولعامل ثقة 95% نحتاج إلى $t(975; 2) = 4.303$ ، ولذا يكون حدي الثقة

و تكون إلى $10.25 \pm 4.303(0.79)$ 95% فترة ثقة المرغوبة لـ D هي:

$$9.2 \leq D \leq 11.3$$

تعليقات

١ - مجاميع المربعات SSA ، SSB ، $SSAB$ في الجدول (٢٧-٥) لتحليل تصميم تجربة متصالية - حاضنة هي مجاميع المربعات المتعادلة للتأثيرات الرئيسة للعامل A ، التأثيرات الرئيسة للعامل B ، والتفاعلات AB ، أما $SSC(A)$ ، فهو مجموع مربعات تقليدي محض لتأثيرات العامل C . ويمكن رؤية ذلك بكتابة مجموع المربعات بالصيغة التعريفية من الجداء الرمزي $I - I_i$.

$$\sum_i \sum_k (\bar{Y}_{ik} - \bar{Y}_{i.})^2 SSC(A) = bn \quad (27.9)$$

وهكذا يقيس $SSC(A)$ ببساطة تشتت المتوسطات المقطرة لمستوى عامل C وذلك من أجل أي مستوى معطى للعامل A ، ثم تجميع تلك المجموع فوق مستويات العامل A .

ويمكن الحصول على صيغة $SSBC(A)$ التعريفية من الجداء الرمزي $ijk - ij - ik - i$:

$$\sum \sum \sum (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k} + \bar{Y}_{i..})^2 SSC(A) = bn \quad (27.10)$$

وهكذا يحتوي $SSBC(A)$ مجموع مربعات التفاعل BC للمتاد لأي مستوى معطى من مستويات العامل A ، ثم تجميع مجاميع المربعات هذه فوق مستويات العامل A .

٢ - إذا كان برنامج الحاسب للساح يمدنا، فقط، بمجاميع مربعات للعوامل المتصالية، فيمكن الحصول على مجموعي المربعات المحضين باستخدام العلاقات التالية وذلك حيثما يكون التصميم متوازنا :

$$SSC(A) = SSC + SSAC \quad (27.11a)$$

$$SSBC(A) = SSBC + SSABC \quad (27.11b)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقات بصورة مباشرة. على سبيل المثال، إذا كان B

محضنا ضمن A وكان C محضنا ضمن B فلدينا:

$$SSB(A) = SSB + SSAB \quad (27.12a)$$

$$SSC(AB) = SSC + SSAC + SSBC + SSABC \quad (27.12b)$$

٣ - إذا كانت التفاعلات AB موجودة وجودا مهما ، فيتركز التحليل عادة على المتوسطات μ_{ij} بدلا من متوسطات مستويات العامل μ_i و μ_j وذلك عندما تكون تأثيرات العوامل مثبتة. ويمكن تبيان أن التباين المقدر لمقارنة بين حجمي الفريقين لأي قومية معينة هو:

$$s^2 \{ \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12} \} = \frac{2MSBC(A)}{cn} \quad (27.13)$$

يتوافق مع هذا التباين $(c-1)$ $(b-1)$ درجة حرية، كما هو واضح من الجدول (٥-٢٧).

لا توجد قوة ثقة مضبوطة لمقارنة القوميتين لأي حجم معطى للفريق، ويمكن استبعاد تقدير غير منحاز للتباين وهو:

$$s^2 \{ \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12} \} = \frac{2}{cn} \left[MSBC(A) + \frac{MSC(A) - MSE}{b} \right] \quad (27.14)$$

كما يمكن الحصول على العدد التقريبي لدرجات الحرية المصاحبة لهذا التباين من (22.61).

وسبب الاختلاف بين التباينات في (27.13) ، (27.14) أن المراقبين هما نفساهما في حالة مقارنة حجمي الفريقين لأي قومية معطاة، بينما يختلف المراقبون في حال مقارنة القوميات لأي حجم فريق معطى.

(٦-٢٧) عدم وجود تكرارات و/أو بعض التفاعلات مساوية للصفر

تعديل القواعد

عندما لايشمل التصميم المتوازن أية تكرارات و/أو يفرض أن بعض التفاعلات مساوية للصفر - كما هي الحال، مثلا ، في تصميم قطاع تام عشوائي مع تأثيرات مثبتة للقطاع - يمكن تعديل القواعد (٢٧-١) و (٢٧-٣) تعديلا طفيفا، بحيث تنطبق تحت هذه الشروط، أيضا، ولا تحتاج القاعدة (٢٧-٤) إلى أية تعديلات. ويكون التعديل للقاعدة (٢٧-١) طفيفا جدا، إذ تصبح الخطوة ٢ الآن:

(27.15) تعديل القاعدة (٢٧ - ١) خطوة ٢. ضع كل حدود التفاعل ماعدا الحدود التي افترض أنها مساوية للصفر والحدود التي تحتوي عاملا محضنا والعامل الذي يحضنه كلاهما.

وتكون تعديلات القاعدة (٢٧-٣) بسيطة، أيضا، وهي:

(27.16): تعديل القاعدة (27.3): لا تنطبق الخطوات ٢ إلى ٨ على حد خطأ النموذج ϵ . وبدلا من ذلك، نحصل على مجموع المربعات المصاحب لحد خطأ النموذج كباقي من مجموع المربعات الكلية. وبالمثل نحصل على درجات الحرية المصاحبة لمجموع المربعات الباقية هذا كباقي من العدد الكلي لدرجات الحرية.

وسنرمز لمجموع المربعات الموافق لحد خطأ النموذج ϵ في التصميم المتوازنة، عندما لا يكون هناك تكرارات و/أو عندما يفترض أن بعض التفاعلات مساوية للصفر بالرمز $SSRem$ ، والتي تعبر عن مجموع المربعات الباقية. وكثيرا ما نجد مجموع المربعات الباقية كمجموع مربعات حد التفاعل الذي افترض أنه صفر. وسنرمز لمتوسط المربعات الباقية - بالرمز $MSRem$. وسنوضح استخدام القواعد المعدلة هذه في المعاينة الجزئية في تصميم قطاع عشوائي مع عدم وجود تكرارات.

المعاينة الجزئية في تصميم قطاع عشوائي

النموذج المستخدم في تصميم قطاع عشوائي بمشاهدة واحدة، فقط، لكل وحدة تجريبية هو نموذج تحليل التباين (24.2) حيث تأثيرات المعالجة وتأثيرات القطاع مثبتة:

$$Y_{ij} = \mu + \rho_i + \eta_j + \epsilon_{ij} \quad (27.17)$$

ونعلم من الفصل ٢٤ أن مجموع مربعات الخطأ SSE تساوي دائما الصفر في هذا النموذج وذلك لعدم وجود تكرارات لأي تركيب قطاع - معالجة. وعلى أي حال وباعتبار أن النموذج (27.17) يفترض أن جميع تفاعلات القطاع - المعالجة مساوية للصفر، فيكون متوسط مربعات التفاعل $MSBL$ مقدرا غير منحاز لتباين الخطأ التجريبي ثم يُستخدم كمقام لإحصاءة الاعتبار F^* عند اختبار تأثيرات

المعالجات، وذلك في حالة تأثيرات مثبتة للمعالجات وللقطاعات. وسنبدأ الآن أن التعديل (27.16) للقاعدة (27.3) يؤدي إلى متوسط مربعات الباقي $MSRem$ الذي يساوي TR . $MSBL$. وعلى أي حال، فنوضح استخدام التعديل (27.16) لحالة تبدو أكثر تعقيدا بقليل. ونعني الحالة التي نستخدم فيها المعاينة الجزئية في تصميم قطاع عشوائي. أي عندما تتوفر أكثر من مشاهدة من كل وحدة تجريبية. اعتبر على سبيل المثال، تجربة لدراسة كيفية تأثير ثلاثة من الحوافز التشجيعية المختلفة على طول الفترة التي يستعملها شخص لانجاز مهمة ما. وقد قسم الأشخاص الذي تشملهم الدراسة وفقا لأعمارهم إلى قطاعات من ثلاثة أشخاص وتم تخصيص حافز تشجيعي من الحوافز الثلاثة عشوائيا لكل شخص. وتم أخذ ثلاث مشاهدات للزمن المطلوب لاستكمال المهمة، أي طلب من الشخص أن ينجز المهمة ثلاث مرات.

وفي حالة من هذا النوع نضيف ببساطة مركبة خطأ مشاهدة عشوائي إلى نموذج التحاين (27.17)، ونفترض أن تأثيرات المعالجات والقطاعات (الحوافز التشجيعية وفئات العمر في مثالنا) هي تأثيرات مثبتة، ويكون النموذج المناسب كمايلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{(ij)} + \eta_{(kij)} \quad (27.18)$$

حيث:

$$\sum \rho_i = 0 \quad \sum \tau_j = 0$$

وحيث $\varepsilon_{(ij)}$ ، $\eta_{(kij)}$ متغيرات عشوائية مستقلة طبيعية بتوقع 0 وتباينات σ^2 ، σ^2 على الترتيب.

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, n$$

وبمثل ρ_i هنا تأثير القطاع، τ_j تأثير المعالجة، $\varepsilon_{(ij)}$ التأثير العشوائي الموافق للوحدة التجريبية و $\eta_{(kij)}$ التأثير العشوائي للمشاهدة k من الوحدة التجريبية. لاحظ أن الخطأ التجريبي ε محض ضمن تركيبة القطاع - المعالجة (j)، وليس هناك دليل متغير إضافي، ومحصصة وحدة تجريبية واحدة، فقط، لكل معالجة ضمن القطاع. وهكذا لا توجد تكرارات للوحدة التجريبية. لاحظ، أيضا، أن خطأ المشاهدة $\eta_{(kij)}$ محض ضمن تركيبة القطاع - المعالجة (j).

ويحتوي الجدول (٩-٢٧) على استنباط لجميع المربعات الحسابية لنموذج التحاين (27.18)، ويحتوي الجدول (١٠-٢٧) على استنباط لتوقع متوسط المربعات. لاحظ أننا نحصل على مجموع المربعات للواحدات التحريية كباقي في الجدول (٩-٢٧) وذلك بسبب تخصيص وحدة تجريبية واحدة، فقط، للمعالجة ضمن قطاع، وكما هو متوقع فقد اتضح أن $SSRem$ هو مجموع مربعات تفاعل القطاع - المعالجة، وذلك كما في تصميم قطاع عشوائي بدون معانة جزئية. ويشير الجدول (١٠-٢٧) ب أن $F^* = MSTR / MSRem$ إحصاء الاختبار لاختبار وجود تأثير للمعالجات هي $F^* = MSTR / MSRem$ لنموذج التحاين (27.18) مع تأثيرات مثبتة للمعالجات والقطاعات. وهي الحالة نفسها عندما لا توجد معانة جزئية في تصميم قطاع عشوائي تام، انظر (24.76). تذكر أن $MSRem$ هو هنا ببساطة متوسط مربعات التفاعل $MSBL.TR$.

جدول (٩-٢٧) استنباط الصيغ الحسابية لجميع المربعات لتصميم قطاع عشوائي بمعانة جزئية، نموذج التحاين (27.18)

الجداء	حد	الرمزي	بمجموع المربعات	درجة حرية
$i - 1$	ρ_i	$i - 1$	$SSBL = \frac{\sum_l Y_{il}^2}{rm} - \frac{Y^2}{nrm}$	$n - 1$
$j - 1$	τ_j	$j - 1$	$SSTR = \frac{\sum_j Y_{.j}^2}{nm} - \frac{Y^2}{nrm}$	$r - 1$
	$\sigma_{(u)}$		$SSRem = SSBL.TR$	الباقى = $(n - 1)(r - 1)$
$(k - 1)ij = ij k - ij$	$\eta_{(ijk)}$	$(k - 1)ij = ij k - ij$	$SSOE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{m} - \frac{\sum_i \sum_k Y_{i.k.}^2}{nm} - \frac{\sum_j \sum_k Y_{.jk.}^2}{nrm} + \frac{Y^2}{nrm}$	$nr(m - 1)$
	المجموع		$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y^2}{nrm}$	$nrm - 1$

جدول (٢٧-١٠) استبعاد توقع متوسط المربعات لتصميم قطاع عشوائي بمعينة جزئية - نموذج التحاين
(27.18)

الجدول (١)								
توقع متوسط مربعات لـ								
OE	Rem	TR	BL	تباين	k	j	i	
					R	F	F	
(ij)k	(ij)	j	i		m	r	n	
0	0	0	rm	σ_p^2	m	r	0	ρ_1
0	0	nm	0	σ_v^2	m	0	n	τ_i
0	m	m	m	σ^2	m	1	1	$\varepsilon_{(ij)}$
1	1	1	1	σ_η^2	1	1	1	$\eta_{k(i)}$

(ب) متوسط المربعات المتوقع

$$E\{MSBL\} = rm \frac{\sum \rho_i^2}{n-1} + m\sigma^2 + \sigma_\eta^2$$

$$E\{MSTR\} = nm \frac{\sum \tau_i^2}{r-1} + m\sigma^2 + \sigma_\eta^2$$

$$E\{MSR.em\} = m\sigma^2 + \sigma_\eta^2$$

$$E\{MSOE\} = \sigma_\eta^2$$

مسائل

(٢٧-١) بالإشارة إلى نموذج التحاين (21.25) في صفحة استخدم القاعدة (٢٧-٤)

للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول ٢١ - ٤ لهذا النموذج.

(٢٧-٢) بالإشارة إلى نموذج التحاين (22.56) في صفحة

١ - استخدم القاعدة (٢٧-٣) للحصول على صيغ المربعات التعريفية في

(22.21) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في

الجدول (٢٢-٧).

(٢٧ - ٣) بالإشارة إلى نموذج التحاين (22.58) في الصفحة ٤٥٩.

- أ - استخدم القاعدة (٢٧-١٣) للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية في (22.23) و (22.26) ودرجات الحرية المصاحبة لها.
- ب - استخدم القاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٢-٨).

(٢٧-٤) بالإشارة إلى نموذج التصميم الحاضن (26.8) في الصفحة ٦٣٥ ولكن مفترضاً أن العامل A محض ضمن العامل B ، وأن تأثيرات العامل A عشوائية وتأثيرات العامل B مثبتة. (انظر، أيضاً، الفقرة «تأثيرات عشوائية للعامل» في الصفحة

- أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ١٣) للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية ودرجات الحرية المصاحبة لها.
- ب - استخدم القاعدة (٢٧-٤) للحصول توقع متوسط المربعات.
- ج - ماهو متوسط المربعات للناسب الذي يمكن استخدامه لوضع فترة ثقة لـ μ_i ؟

(٢٧-٥). بالإشارة إلى نموذج قطاع عشوائي (24.2) صفحة

- أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات التعريفية في (24.6) ودرجات الحرية المصاحبة لها.
- ب - استخدم القاعدة (٢٧ - ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٤-٣) لهذا النموذج.

(٢٧ - ٦) بالإشارة إلى نموذج قطاع عشوائي (24.2) صفحة ٥٥٥ ولكن افترض أن تأثير المعالجات عشوائي (انظر، أيضاً، تعليق ٢ صفحة ٥٥٥).

- أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية في (24.6) ودرجات الحرية المصاحبة لها.
- ب - استخدم القاعدة (٢٧ - ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٤-٣) لهذا النموذج.

(٢٧-٧) بالإشارة إلى نموذج القطاع العشوائي (25.12) صفحة ٦٠٥.

أ - استخدم القاعدة (٢٧-٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ

بجميع المربعات التعريفية (24.6) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (27.4) للحصول على توقع متوسط المربعات في

الجدول (٦-٢٥) لهذا النموذج.

(٢٧-٨) بالإشارة إلى نموذج القطاع العشوائي (27.18) ولكن مفترضا أن

تأثيرات القطاع عشوائية.

أ - استخدم القاعدة (٢٧-٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ

بجميع المربعات التعريفية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم قاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات.

(٢٧-٩) في دراسة متوازنة ثلاثية العامل، كان العاملان A ، C متصاليين والعامل

B محض ضمن العامل C . تأثيرات العامل A مثبتة وتأثيرات العاملين B و

C عشوائية. وهناك n تكرارا لكل معالجة.

أ - استخدم القاعدة (٢٧-٣) للحصول على صيغ بجميع المربعات

الحسابية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات.

جـ - ماهو متوسط المربعات المناسب كمقام لاختبار التأثيرات الرئيسة

للعامل A .

(٢٧-١٠) حوافز السباح. درس أحد أندية السباحة الكبيرة للشباب تأثيرات ثلاثة

حوافز تشجيعية على الأداء وكانت الحوافز الثلاثة هي: (١) تقديم جائزة

تقديرية (٢) منح امتيازات قاعة فريق و (٣) الإعلان في صحيفة

النادي. وبما أنه من المعروف أن للعمر علاقة بالأداء، فقد تم تجميع

السباحين التسعة المشركين في الدراسة وفقا لأعمارهم، في ثلاثة

قطاعات كل منها يتضمن ثلاثة سباحين. وضمن كل قطاع تم تخصيص

السباحين عشوائيا واحد لكل معالجة تشجيع وبعد قدر مناسب من التدريب تم قياس الزمن الذي يستغرقه كل سباح لمسافة مسافة مثبتة وذلك في ثلاث مناسبات. وفيما يلي البيانات المرمزة عن الوقت المنصرم في كل من المحاولات الثلاث.

المعالجة الشجعية				
	$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	
قطاع	إعلان	قيادة	جائزة تقديرية	مشاهدة
$i = 1$ (7-8) سنوات	27	26	28	$k = 1$
	29	24	32	$k = 2$
	30	27	31	$k = 3$
$i = 2$ (9-10) سنوات	20	22	24	$k = 1$
	21	19	26	$k = 2$
	22	18	23	$k = 3$
$i = 3$ (11-12) سنوات	17	13	18	$k = 1$
	19	16	21	$k = 2$
	19	15	20	$k = 3$

أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (27.18) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (27.18)؟.

(١١-٢٧) بالإشارة إلى مسألة حوافز السباح (١٠-٢٧) افترض أن نموذج القطاع العشوائي (27.18) بتأثيرات مثبتة للقطاعات والمعالجات هو نموذج مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اعتبر ما إذا كانت متوسطات الفترات الثلاث هي نفسها للحوافز التشجيعية أم لا استعمل $\alpha = 0.05$ اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة p للاختبار؟.

- جـ - قم بجميع المقارنات الثنائية بين المتوسطات الثلاثة للمعالجات،
استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عاظمي 90%. اعرض نتائجك.
- د - أوجد تقديراً نقطياً لكل من σ^2_7 ، σ^2_8 هل يبدو أحد التباينات أكبر
من الآخر؟ ناقش.

تمارين

- (١٢-٢٧) استنبط (27.11a) لدراسة متوازنة ثلاثية العامل.
- (١٣-٢٧) استخدم (27.14) وحقيقة أن التباين المقدر غير منحاز لإيجاد
 $\{ \bar{Y}_{1j} - \bar{Y}_{2j} \}^2$ لنموذج النحايين (27.6). ماهو العدد التقريبي لدرجات
الحرية المصاحبة للتباين المقدر؟

القياسات المتكررة والتصاميم ذات السلة

ستابع في هذا الفصل تصاميم القياسات المتكررة وهي تصاميم تُستخدم بكثرة في العلوم السلوكية وعلوم الحياة. وسنبداً بدراسة بعض العناصر الأساسية لتصاميم القياسات المتكررة. ثم نقدم تصاميم القياسات المتكررة أحادية العامل وبعدها نناقش التجارب ثنائية العامل بقياسات متكررة لكل من العاملين ولعامل واحد، فقط. ونختتم هذا الفصل بتقديم تصاميم القطع المشقة والتي يمكن النظر إليها على أنها حالة خاصة من تصاميم القياسات المتكررة.

(١-٢٨) عناصر تصاميم القياسات المتكررة

وصف التصاميم

تستخدم تصاميم القياسات المتكررة العنصر نفسه (شخص، محل، نبات، سوق، اختبار،.. الخ) لكل من المعالجات تحت الدراسة، وهكذا يُخدم العنصر المدروس كقطاع، ويمكن النظر إلى الوحدات التحريبية داخل القطاع على أنها المناسبات المختلفة التي تُطبق فيها المعالجة على العنصر. وقد يشمل دراسة القياسات المتكررة عدة معالجات أو معالجة واحدة يجرى تقويمها في أوقات مختلفة. وتشمل العناصر المستخدمة في دراسة القياسات المتكررة في العلوم السلوكية وعلوم الحياة، اشخاصاً، أسراً، مراقبين وحيوانات تجريبية. وسنشير إلى جميع الوحدات المدروسة في تصاميم القياسات المتكررة كعناصر.

وفيما يلي ثلاثة أمثلة لتصاميم القياسات المتكررة:

١ - يراد استخدام خمسة عشر سوق اختبار للدراسة حملتين دوائيتين مختلفتين. وفي كل سوق اختبار نقوم بتعشيه ترتيب الحملتين مع فاصل زمني كاف يفصل بين الحملتين ويبحث لانتزاع تأثيرات الحملة الأولى إلى الحملة الثانية والعناصر في هذه الدراسة هي أسواق الاختبار.

٢- يُراد إعطاء مائتي شخص يعانون باستمرار من الشقيقة دوائين مختلفين ودواء وهمي ، كل منهما لمدة اسبوعين مع تعشية ترتيب الأدوية بالنسبة لكل شخص. والعناصر في الدراسة هم الأشخاص الذين يعانون من الشقيقة.

٣- في دراسة لتخفيف الوزن، يُراد تطبيق الحمية نفسها على مائة من الأشخاص المتصفين بالسمنة وتُقاس أوزانهم في نهاية كل اسبوع لمدة 12 أسبوعا وذلك لتقدير الخسارة في الوزن مع مضي الزمن. والعناصر هنا هم الأشخاص السمان الذين رويقوا بصورة متكررة للحصول على معلومات حول تأثيرات معالجة وحيدة فوق الزمن.

وتشير كل هذه الدراسات إلى تصميم قياسات متكررة لأن القياس أعيد على الشخص نفسه أكثر من مرة. وهذه هي الخاصة الرئيسة التي تميز هذا النوع من التصميم عن التصميم التي ناقشناها سابقا .

المزايا والمساوي

أحد المزايا الرئيسة لتصاميم القياسات المتكررة انها تعطي دقة جيدة لمقارنة المعالجات، وذلك بسبب استبعاد جميع مصادر التغير بين العناصر من الخطأ التجريبي. ولا بدعول في الخطأ التجريبي إلا التغير ضمن العناصر، حيث يمكن مباشرة مقارنة أي معالجتين وذلك من أجل كل عنصر. وهكذا يمكن النظر إلى العناصر على أنها تتقدم كضوابط لذاتها. ومن المزايا الأخرى لتصميم القياسات المتكررة أنها إقتصادية من حيث الحاجة إلى عناصر للدراسة. ويكون هذا مهما على وجه الخصوص عندما تتوفر عناصر قليلة، فقط، (مثلا عمليات تجارية، نباتات، أسواق اختبار) مما يمكن استخدامه في التجربة. وكذلك عندما نهتم بتغير تأثيرات معالجة مع الزمن، كأن نهتم

بشكل منحني التعلم لسير عملية جديدة، فيكون من المستحسن مشاهدة العنصر نفسه في أوقات مختلفة بدلا من مشاهدة عناصر تختلف باختلاف هذه الأوقات. ومع ذلك، فلتصاميم القياسات المتكررة مساوئ محتملة خطيرة، ونعني أنه قد تكون هناك عدة أنواع من التداخل. ويتصل أحد أنواع التداخل هذه بالترتيب الذي تحتله المعالجة. وعلى سبيل المثال، عند تقويم خمسة إعلانات مختلفة، قد تنحصر العناصر لمنح رتبة تصنيف أعلى (أقل) للإعلانات المقدمة في نهاية السلسلة مما تمنحه للإعلانات المقدمة في البداية. ويتعلق نوع آخر من التداخل بالمعالجة أو المعالجات السابقة. وعلى سبيل المثال، عند تقويم خمسة وصفات مختلفة لإعداد الحساء، فقد تحصل وصفة حساء غير مرتبة على رتبة تصنيف أعلى (أقل) عندما تسبقها وصفة كثيرة البهارات مما لو كانت مسبقة بوصفة ألطف من حيث عتواها من البهارات، ويسمى هذا النوع من التداخل التأثير المحمول.

ويمكن اتخاذ تدابير مختلفة لجعل خطورة التداخل أقل ما يمكن، فتعشية ترتيب المعالجات لكل عنصر بصورة مستقلة عن أي عنصر آخر ستجعل تحليل البيانات، كما لو كانت حدود الخطأ مستقلة، تحليلا أكثر معقولة. كما يشكل السماح بوقت كاف بين المعالجات، غالبا، وسيلة فعالة لتقليل التأثيرات المحمولة. وقد يكون من المستحسن إقامة توازن في ترتيب تقديم المعالجات، وأحيانا يكون من المستحسن إقامة توازن حتى في عدد المرات التي تكون فيها المعالجة مسبوقة بأي معالجة أخرى. وبما يفيد في هذا المنحى تصاميم المربع اللاتيني وتصاميم التحميل المتوازن (ستناقش في الفصل ٢٩).

كيفية التعشية:

تعشية ترتيب المعالجات المخصصة لعنصر هي عملية سهلة. فمن أجل كل عنصر، نستخدم متبادلة عشوائية لتعريف ترتيب المعالجة متبعين الأسلوب المذكور في الفقرة (2-4). ثم نختار تباديل مستقلة للعناصر المختلفة.

ملاحظة

ينبغي عدم الخلط بين تصاميم القياسات المتكررة التي نوقشت هنا والتصاميم ذات المشاهدات المتكررة التي نوقشت في الفقرة (٢٦-٧)، ففي تصاميم القياسات المتكررة، يتم تطبيق عدة معالجات أو جميعها على العنصر نفسه. أما التصاميم ذات المشاهدات المتكررة، فهي تصاميم تتم فيها عدة مشاهدات للمتغير التابع من أجل معالجة معينة نطبقها على وحدة تجريبية. ومن الممكن تطوير تصميم قياسات متكررة بمشاهدات متكررة، كأن نخضع عنصراً معطى لكل معالجة من المعالجات قيد الدراسة، وعند تطبيق كل معالجة نحصل على عدد من المشاهدات لهذه المعالجة بالذات.

(٢٨-٢) تجارب أحادية العامل مع قياسات متكررة لجميع المعالجات

سنعتبر أولاً تصاميم القياسات المتكررة عندما تكون المعالجات على أساس عامل بمفرده، كما في أمثلة الفقرة (٢٨ - ١) ويُنظر، بصفة دائمة تقريباً، إلى العناصر (أشخاص، محلات، أسواق اختبار، حيوانات تجريبية) على أنها عينة عشوائية من مجتمع ما، وبالتالي، فسننظر إلى تأثيرات العناصر على أنها عشوائية في كافة نماذج تصاميم القياسات المتكررة المقدمة في هذا الفصل.

يحتوي الجدول (٢٨-١) على مخطط تجربة أحادية العامل بقياسات متكررة لجميع المعالجات. ولدينا هنا خمس عناصر وأربع معالجات، مع تعشيه ترتيب المعالجات تعشيه مستقلة من أجل كل عنصر من العناصر. لاحظ أن هذا المخطط يقابل المخطط المذكور في الجدول (٢٤-١) من أجل تصميم قطاع عشوائي. وفي الحقيقة، وكما سنرى الآن، فإن نماذج تصميم قياسات متكررة أحادي العامل هي رسمياً تصاميم القطاع العشوائي بالذات، مع اعتبار العناصر الآن كقطاعات.

النموذج

يكون النموذج التجميعي التالي مناسباً، في الغالب، لتصميم قياسات متكررة أحادي العامل مع تأثيرات مثبتة للمعالجات.

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{(ij)} \quad (28.1)$$

حيث $\mu_{..}$ ثابت

ρ_i مستقلة و $N(0, \sigma_\rho^2)$

τ_j ثوابت خاضعة للقيود $\sum \tau_j = 0$

$\varepsilon_{(ij)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

ρ_i و $\varepsilon_{(ij)}$ مستقلة

$i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, r$

جدول (١-٢٨) مخطط لتصميم قياسات متكررة أحادية العامل ($n = s, r = 4$)

ترتيب المعالجة

	4	3	2	1	
العنصر 1	T_1	T_2	T_3	T_4	1
2	T_2	T_1	T_4	T_3	2
3	T_3	T_4	T_1	T_2	3
4	T_4	T_3	T_2	T_1	4
5	T_3	T_4	T_2	T_1	5

لاحظ أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) يتطابق مع نموذج القطاع العشوائي (25.12) مع تأثيرات عشوائية للقطاع، فيما عدا أننا نستخدم الآن الرمز $\varepsilon_{(ij)}$ لنبين عدم وجود تكررات في هذا التصميم.

وبالتالي نعرف من الفقرة (٢٥ - ٤) أن نموذج القياسات المتكررة (28.1)

يفترض مايلي حول المشاهدات Y_{ij} :

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_{..} + \tau_j \quad (28.2a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma_\rho^2 + \sigma_\tau^2 + \sigma^2 \quad (28.2b)$$

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{i'j'}\} = \sigma_\rho^2 + \omega\sigma_\tau^2 \quad (28.2c)$$

حيث ω معامل الارتباط بين أي مشاهدتين للعنصر نفسه:

$$\omega = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_y^2} \quad (28.2d)$$

ولذلك، يفترض نموذج القياسات المتكررة (28-2) أنه وقبل أية محاولات عشوائية (أي قبل إجراء التجربة) يرتبط أي زوج Y_{ij} من مشاهدات المعالجة، من أجل عنصر معطى، بالطريقة نفسها، وذلك من أجل جميع العناصر. ويتضمن هذا الفرض الرئيس، كما رأينا في (25.17)، أن مصفوفة التباين - التباين للمشاهدات Y_{ij} تتصف بالتناظر المركب من أجل أي عنصر معطى. وقبل أية محاولات عشوائية، وطبقاً للنموذج (28-1)، تكون أية مشاهدين من عنصرين مختلفين مستقلتان.

وعلى القدر نفسه من الأهمية، نعلم من الفصل ٢٥ أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) يفترض أنه، حالما يتم اختيار العناصر، تكون أية مشاهدين من عنصر معطى مستقلتين. ولهذا يفترض النموذج (28.1) أنه ليست هناك تأثيرات تدخّل في دراسة القياسات المتكررة، مثل تأثيرات الترتيب أو التأثيرات المحمولة من معالجة إلى المعالجة التي تليها.

ملاحظة

إذا وُجدت تأثيرات تفاعل بين العناصر والمعالجات، فيمكن استخدام النموذج (25-20)، وكما لاحظنا في الفصل ٢٥، يؤدي كل من نموذجي التفاعل واللاتفاعل إلى طرق الاستقراء نفسها حول تأثيرات المعالجات.

تحليل التباين والاختبارات

بما أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) هو نفسه نموذج القطاع العشوائي (25.12)، فسيبقى تحليل التباين واختبار تأثيرات المعالجات كما كان في السابق تماماً.

تحليل التباين: مجاميع مربعات التباين لنموذج القياسات المتكررة (28.1) معطاة في (24.6)، ولكن تتغير عادة تسمية مجموعين من مجاميع المربعات الخاصة بتطبيقات القياسات المتكررة. فالآن سيُسمى مجموع مربعات القطاعات في (68، 24) مجموع مربعات العناصر، وسيُسمى مجموع مربعات التفاعل بين القطاعات والمعالجات

في (24-6c) مجموع مربعات التفاعل بين المعالجات والعناصر. وسيتم ترميز مجموعي المربعات هذين بالرمزين $SSTR$ و SSS ، على التوالي. وسيكون تفكيك تحليل التباين لنموذج قياسات متكررة أحادي العامل (28-2) كما يلي:

$$SSTO = SSS + SSTR + SSTR.S \quad (28.3)$$

$$SSTO = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (28.3a)$$

$$SSS = r \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (28.3b)$$

$$SSTR = n \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (28.3c)$$

$$SSTR.S = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (28.3d)$$

لاحظ أنه لا يوجد مجموع مربعات خطأ وذلك لعدم وجود تكرارات هنا.

يحتوي الجدول (٢٠-٢٨) على جدول تحليل التباين لنموذج القياسات المتكررة (28.1). وهو جدول التحاين نفسه في الجدول (٦-٢٥) لنموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) ماعدا التغير في الرموز.

لاحظ مرة أخرى، أنه في غياب التفاعل بين المعالجات والعناصر، يكون

متوسط مربع التفاعل $MSTR.S$ مقدراً غير منحاز لتباين الخطأ σ^2 .

جدول (٢٠-٢٨) جدول تخمين لتصميم قياسات متكررة أحادي العامل نموذج تخمين (28.1) بالعبارات عشوائية للعناصر وقائيات مبنية للمعالجات.

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
العناصر	SSS	$n - 1$	MSS	$\sigma^2 + r\sigma_p^2$
المعالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR	$\sigma^2 + \frac{n}{r-1} \sum r_i^2$
الخطأ	SSTR.S	$(r-1)(n-1)$	MSTR.S	σ^2
المجموع	SSTO	$nr - 1$		

ملاحظة

في دراسات القياسات المتكررة، نقوم أحيانا بدمج $SSTR$ و $SSTR.S$ لتشكيل

مجموع مربعات ماضن العناصر SSW :

$$SSW = SSTR + SSTR.S \quad (28.4)$$

والتي يمكن أن تبيان أنها تساوي:

$$SSW = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \quad (28.4a)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن تفكيك التحاين في (28.3) كما يلي:

$$SSTO = \underbrace{SSS}_{\text{تشتت ما بين العناصر}} + \underbrace{SSW}_{\text{تشتت ما ضمن العناصر}} \quad (28.5)$$

اختبار تأثيرات المعالجات: كما يشير العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٨-٢)

فإن الإحصاء المناسبة لاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \text{كل } \tau \text{ يساوي الصفر} \quad (28.6a)$$

$$H_a: \text{ليس كل } \tau \text{ مساوٍ للصفر}$$

$$F^* = \frac{MSTR}{MSTR.S} \quad (28.6b)$$

وتحت H_0 تتبع F^* التوزيع F ، كما سبق، وقاعدة القرار لضبط الخطأ من

النوع الأول عند α هي:

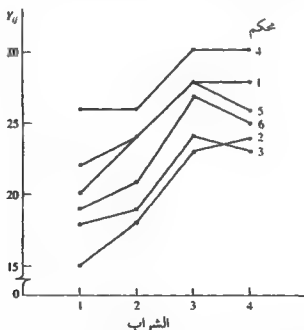
$$\begin{aligned} H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha, r - 1, (r - 1)(n - 1)] \quad \text{إذا كانت} \\ H_a \text{ استتج } F^* > F[1 - \alpha, r - 1, (r - 1)(n - 1)] \quad \text{إذا كانت} \end{aligned} \quad (28.6c)$$

مثال. في إحدى مسابقات الحكم على جودة شراب معين، تم الحكم على أربعة زجاجات من الشراب من إنتاج السنة نفسها من قبل ستة من المحكمين. تذوق كل محكم الشراب دون معرفة هويته. وقد تم بصورة مستقلة تعشية ترتيب تقديم الشراب لكل محكم. ولتخفيض التأثيرات المحمولة وتأثيرات التداخلات الأخرى، لم يتلغ المحكمون ماتذوقوه من الشراب، كما قام المحكمون لفصل أفواههم غسلا شاملا بالماء بين تذوقين. وتم إعطاء كل زجاجة درجة على سلم بين 0 و 40 وكلما كانت الدرجة أكبر، كلما كانت زجاجة الشراب أفضل. ويوضح الجدول (٢٨-٣) بيانات تلك المسابقة. ويبين الشكل (١٠-٢٨) رسما للدرجات الشراب من أجل كل محكم.

جدول (٢٨-٣) بيانات مثال الحكم على شراب

\bar{Y}_i	(ج) الشراب				حكم i
	4	3	2	1	
25	28	28	24	20	1
20	24	23	18	15	2
21	23	24	19	18	3
28	30	30	26	26	4
25	26	28	24	22	5
23	25	27	21	19	6
$\bar{Y} = 23.67$	26.00	26.67	22.00	20.00	\bar{Y}_j

شكل (١٠٢٨) رسم للدرجات الشراب لكل محكم - مثال الحكم على جودة شراب



وقد اعتُبر المحكمون الستة عينة عشوائية من مجتمع كافة المحكمين، بينما كان الاهتمام بزجاجات الشراب الأربع لذاتها، وبالتالي يكون نموذج القياسات المتكررة أحادي العامل (1-28) مناسباً، مع اعتبار تأثيرات العناصر (المحكمين) عشوائية وتأثيرات للمعالجات (زجاجات الشراب) مثبتة. وكما سنرى فيما بعد، يشير التحليل

التشخيصي إلى أن نموذج التحاين (28.1) هو نموذج مناسب للبيانات. ويحتوي الجدول (٤-٢٨) على تحليل التباين لبيانات الحكم على شراب الواردة في الجدول (٣-٢٨). والحسابات، لاصعوبة فيها، وقد تم الحصول عليها باستخدام حزمة حاسب. ولاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$$

ليس كل τ_i يساوي صفر : H_a

تستخدم النتائج في الجدول (٤-٢٨):

$$F^* = \frac{MSTR}{MSTR.S} = \frac{61.333}{1.067} = 57.5$$

ونحتاج إلى $F(99; 3, 15) = 5.42$ من أجل مستوى معنويه $\alpha = 0.01$ ، وبما أن $F^* = 57.5 > 5.42$ نستنتج H_a ، أي أن متوسطات رتب التصنيف لأنواع الشراب الأربعة تختلف بعضها عن بعض، والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0^+ .

تعليقات

١- كما لاحظنا في الفصل ٢٥ (في التعليق ٢ صفحة)، إذا لم يتحقق فرض التناظر المركب في نموذج القياسات المتكررة (28.1)، فيجب استخدام اختبار متحفظ لتأثيرات المعالجات. (يعني أنه من أجل أي عنصر معطى لم يبق تباين المشاهدات لمعالجات مختلفة نفسه في جميع العناصر. أو إذا لم يبق الارتباط نفسه بين أي مشاهدتين من معالجتين مختلفتين لعنصر معطى، وذلك من أجل جميع أزواج المعالجات، ومن أجل جميع العناصر) وعلى سبيل المثال، سنستهك فرضية التناظر المركب إذا كانت الاستجابات المتكررة مع الزمن مرتبطة ارتباطاً أعلى للمشاهدات المتقاربة من بعضها زمنياً مما هو للمشاهدات المتباعدة زمنياً.

٢- تبقى إحصاء الاختبار (28.6b) وقاعدة الاختبار (28.6c) مناسبان لاختبار تأثيرات المعالجات عندما تكون هذه التأثيرات عشوائية.

جدول (٤-٢٨) جدول ثنائين لتصميم قياسات متكررة أحادي العامل مثال الحكم على جودة الشراب.

مصدر التغير	SS	df	MSS
الحكام	173.333	5	34.667
الشراب	184.000	3	61.333
الخطأ	16.000	15	1.067
المجموع	373.333	23	

٣- يمكن قياس فعالية تصميم القياسات المتكررة في مثال جودة الشراب بالنسبة إلى التصميم تام التعشية، حيث يُستخدم كل محكم لتذوق زجاجة شراب واحدة بواسطة (24.14) وباستخدام نتائج الجدول (٤-٢٨) نحصل على:

$$\hat{E} = \frac{(n-1)MSS + n(r-1)MSTR.S}{(nr-1)MSTR.S} = \frac{5(34.667) + 6(3)(1.067)}{23(1.067)}$$

ولذلك، فإننا سنحتاج تقريبا إلى ثمانية أضعاف التكرارات لكل معالجة في حالة استخدام تصميم تام التعشية، حيث يعطى كل محكم رتبة تصنيف لزجاجة شراب واحدة، كي نبلغ، عند تقدير متضادة، الدقة نفسها التي يقدمها استخدام تصميم القياسات المتكررة.

٤- عندما يتضمن تصميم قياسات متكررة أحادي العامل $r=2$ معالجة، تكون الإحصاءة F^* في (28.6b) مكافئة لاختبار t ذي الجانبين الخاص بأزواج من المشاهدات، وهو الاختبار المبني على إحصاءة الاختبار (1.6b).

٥- من وقت لآخر، نرغب في اختبار رسمي لتأثيرات العناصر.

$$H_0: \sigma_p^2 = 0$$

$$H_a: \sigma_p^2 > 0$$

ويشير الجدول (٢-٢٨) إلى أن إحصاءة الاختبار المناسبة في نموذج القياسات

المتكررة (28.1) هي $F^* = MSS \backslash MSTR-S$.

تقويم مصداقية نموذج القياسات المتكررة

تبقى مناقشتنا السابقة حول التشخيصات الخاصة لنماذج قطاع عشوائية قابلة للتطبيق تماما هنا لأن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مكافئ لنموذج القطاع العشوائي (25.12). وعلى وجه الخصوص، فإن رسم الاستجابات Y_i في مقابل العناصر، كما في الشكل (٢٨-١)، يمكن استخدامه للكشف عن مؤشرات قصور خطير في التوازي، مما يقترح أن النموذج التجميعي (28.1) قد لا يكون مناسباً. كما أن رسماً متسلسلاً للرواسب من أجل كل عنصر قد يكون نافعا لدراسة ثبات تباين الخطأ، ولوجود تأثيرات تداخل والرواسب في حالة نماذج القياسات المتكررة (28.1) معطاه في (24.5).

$$e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_j + \bar{Y} \quad (28.7)$$

ورسم الاحتمال الطبيعي للتأثيرات الرئيسة المقترنة للعناصر $\bar{Y}_i - \bar{Y}$ يمكن أن يكون مفيداً في تقويم ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعناصر μ تتوزع توزيعاً طبيعياً بتباين ثابت.

وبالإضافة إلى هذه التشخيصات البيانية، يمكن استخدام المصفوفات المقدرة للارتباط والتباين - التغاير ضمن العناصر Y_{ij} لتقويم مصداقية نموذج القياسات المتكررة. والعنصر النموذجي في مصفوفة التباين - التغاير هو التغاير المقدّر، ضمن العناصر، لملاحظات خاصة بالمعالجين j, j' :

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_j)(Y_{ij'} - \bar{Y}_{j'})}{n-1} \quad (28.8)$$

وينبغي أن تظهر مصفوفة التباين - التغاير المقدرة ضمن العناصر تباينات من المرتبة نفسها من حيث الحجم، كما ينبغي أن تكون أحجام التغايرات جميعها من مراتب متماثلة في الحجم، وبالطبع تنحدر التباينات والتغايرات المقدرة إلى أن تكون عرضة لأخطاء المعاينة، ما لم تكن أحجام العينات كبيرة جداً. وبالتالي ينبغي النظر إلى الاختلافات المعتدلة في التباينات والتغايرات على أنها، في الغالب، نتيجة لأخطاء المعاينة.

وينبغي أن تظهر مصفوفة الارتباط المقدرة معاملات ارتباط متماثلة تقريباً بين أزواج من ملاحظات المعالجة ضمن عنصر.

وفي النهاية يمكن القيام باختبار توكي الموصوف في فقرة (٢٠٢١) لاختبار

صلاحية النموذج التحميبي. وسينبغي تفسير هذا الاختبار على أنه مشروط هنا بالعناصر المستخدمة فعلا في دراسة القياسات المتكررة.

مثال. في مثال جودة الشراب، تم الحصول على الرواسب من (28.7) وعُرضت في الشكل (٢٠٢٨) رسوم نقطية مصطفة لكل زجاجة شراب. وتزيد تلك الرسوم فرضية ثبات تباين الخطأ. ويوضح الشكل (٢٠٢٨) ب رسما متسلسلا للرواسب من أجل كل محكم، حيث رُسمت الرواسب وفقا للترتيب الذي جرى فيه تذوق الشراب بواسطة كل محكم. ولا تُعطي تلك الرسوم أية مؤشرات على وجود ارتباطات لحدود الخطأ ضمن محكم، مما يقترح عدم وجود تأثيرات تدخل. وفي النهاية يبين الشكل (٢٠٢٨) ح رسم احتمال طبيعي للرواسب. ويقدم هذا الشكل دليلا على تأثير الطبيعة التقريبية للبيانات، ولكنه لا يقترح وجود أي حيدان رئيس عن الطبيعية. ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية هو 993. مما يقترح، أيضا، أن النقص في الطبيعية ليس مشكلة هنا.

ويقدم الجدول (٥٠٢٨) المصفوفات المقدرة للتباين - التغاير وللارتباط ضمن العناصر. والاختلافات الملحوظة هناك يمكن أن تنشأ بسهولة عن أخطاء المعالجة.

جدول (٥٠٢٨) مصفوفات تباين - تغاير وارتباط بين مشاهدات المعالجات مثال المحكم على جودة شراب

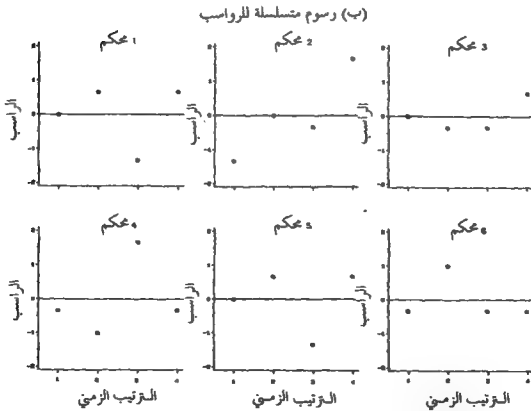
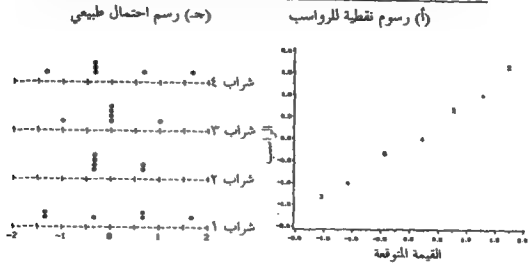
(أ) مصفوفة التباين والتغاير

		j'			
		1	2	3	4
j	1	14.000	11.000	9.200	8.200
	2		10.000	8.200	7.600
	3			7.067	6.200
	4				6.800

(ب) مصفوف الارتباط

		j'			
		1	2	3	4
j	1	1	.930	.925	.840
	2		1	.957	.922
	3			1	.894
	4				1

شكل (٢٨-٢) رسوم رواسب تشخيصية - مثال الحكم على جودة شراب (رسوم SAS، مرجع 28.1)



وتزويد رسوم الاستجابات لكل عنصر المينة في شكل (٢٨-١) ، أيضا ، صلاحية النموذج (28.1) ، حيث تيلو درجة التوازي بين الرسوم الخاصة بالمحكمين مقبولة، وهكذا فليس هناك مايشير إلى وجود تفاعل بين العناصر والمعالجات. وبناء على ذلك وعلى التشخيصات الأخرى، استنتج أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مناسب بصورة معقولة لبيانات مثال الحكم على جودة شراب.

تحليل تأثيرات المعالجات

يمضي تحليل تأثيرات المعالجات لنموذج القياسات المتكررة (28.1) بالطريقة نفسها تماما الموصوفة في الفقرة (٢٤-٧) لتصاميم قطاع عشوائي بتأثيرات مثبتة للمعالجات، وتبقى المضاعفات في (9-24) الخاصة بوضع حدود ثقة كما هي. وبفعل متوسط مربعات التفاعل هو متوسط المربعات المستخدم لتقدير التباين للمتضادات المقدرة، ويُرمز له الآن بـ $MSTR.S$. وسنوضح أساليب التقدير بمثال.

مثال. في مثال الحكم على جودة شراب كان مرغوبا مقارنة متوسطات جميع أزواج المعالجات زلما بمعامل ثقة عاالي 95% μ هو هنا متوسط رتب التصنيف للشراب فوق جميع المحكمين. وقد استُخدم أسلوب توكسي لهذا الغرض. وباستخدام (15.25) ووضع $MSTR.S$ بدلا من MSE والتابع في الجدول (٢٨-٤)، نحصل على:

$$s^2\{\hat{D}\} = MSTR.S \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = 1.067 \left(\frac{2}{6} \right) = .3557$$

وباستخدام (24.9b) ومعامل ثقة عاالي 95% نجد:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(95; 4, 15) = \frac{1}{\sqrt{2}} (4.08) = 2.885$$

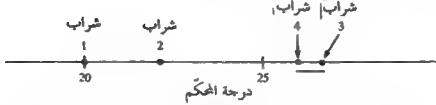
وبالتالي:

$$Ts\{\hat{D}\} = 2.885 \sqrt{.3557} = 1.72$$

وهكذا نحصل على المقارنات الثنائية (أنظر الجدول ٢٨-٣ لقيم \bar{Y}_r):

$$\begin{aligned} -2.39 &= (26.00-26.67) - 1.72 \leq \mu_4 - \mu_3 \leq (26.00-26.67) + 1.72 = 1.05 \\ 2.28 &= (26.00-22.00) - 1.72 \leq \mu_4 - \mu_2 \leq (26.00-22.00) + 1.72 = 5.72 \\ 4.28 &= (26.00-20.00) - 1.72 \leq \mu_4 - \mu_1 \leq (26.00-20.00) + 1.72 = 7.75 \\ 2.95 &= (26.67-22.00) - 1.72 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq (26.67-22.00) + 1.72 = 6.39 \\ 4.95 &= (26.67-20.00) - 1.72 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq (26.67-20.00) + 1.72 = 8.39 \\ .28 &= (22.00-20.00) - 1.72 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (22.00-20.00) + 1.72 = 3.72 \end{aligned}$$

ويمكن عرض هذه النتائج بيانياً كما يلي:



ونستنتج من هذه المقارنة الثنائية أن الشرايين 4,3 هما الأفضل، وأنهما لا يختلفان معنويًا بعضهما عن بعض. وقد صُنّف الشرايان 2,1 على أنهما أقل جودة من 4,3 مع تحلف رتبة الشراب 1 عن رتبة الشراب 2 ومعامل الثقة العائلي لجميع المقارنات هو 0.95.

البيانات المرتبة

كثيراً ما تكون المشاهدات في دراسات القياسات المتكررة رتبا كما لو طلبنا من عدد من الذواقة أن يرتب كل منهم وصفات طعام، أو عندما نطلب من مستولي القبول في عدة جامعات ترتيب طلبات متقدمين للقبول. وعندما تكون البيانات في دراسة قياسات متكررة رتبا، فيمكن استخدام اختبار فريدمان الموصوف في الفقرة (٢٠٥-٢٠٥) لاختبار ما إذا كانت متوسطات المعالجات متساوية. وحيث أنه ليست هناك أية مبادئ جديدة، فسنمضي مباشرة إلى مثال.

مثال. طُلب من كل من ستة أشخاص ترتيب خمسة من عمليات القهوة وفقاً لمذاقهم المفضل، بحيث تخصص الرتبة 5 إلى المحلّي الأكثر تفضيلاً. ويوضح الجدول (٢٨-٦) البيانات وبعض النتائج الحسابية الأساسية وإحصاء الاختبار (25.4) هي هنا:

$$X_F^2 = \left[\frac{12}{6(5)(6)} (1,836) \right] - 3(6)(6) = 14.4$$

ولمستوى معنوية $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $(9.49; .95; 4) = \chi^2_{.95; 4}$ وبما أن $14.4 > 9.49$ ، نستنتج عدم تساوي درجات التفضيل للمحليات الخمسة. للقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.006.

ونرغب الآن في القيام بجميع الاختبارات الثنائية مستخدمين (25.5) ومستوى معنوية عائلي 20. ومن أجل $r = 5$ تكون $g = 5(4)/2 = 10$. وبالتالي نجد من أجل

$$n = 6$$

$$B = z[1 - .20/2(10)] = z(.99) = 2.326$$

وهكذا يكون الحد الأدنى في (25.5):

$$B \left[\frac{r(r+1)}{6n} \right]^{1/2} = 2.326 \left[\frac{5(6)}{6(6)} \right]^{1/2} = 2.12$$

جدول (٦-٢٨) البيانات للترتيب غلّيات القهوة في تصميم قياسات متكررة

مُحلّي (i)					
المنصر i	A	B	C	D	E
1	5	1	2	4	3
2	4	2	1	5	3
3	3	2	1	4	5
4	5	2	3	4	1
5	4	1	2	3	5
6	4	1	3	5	2
R_i	25	9	12	25	19
\bar{R}_i	4.17	1.50	2.00	4.17	3.17
$\Sigma R_i^2 = (25)^2 + (9)^2 + (12)^2 + (25)^2 + (19)^2 = 1,836$					

ونلاحظ من الجدول (٦-٢٨) أن أزواج متوسطات الرتب التي لا تزيد فروقها عن 2.12

هي (A,D), (A,E), (D,E), (C,E), (B,E) و (B,C) وبالتالي يمكننا وضع مجموعتين

لا تختلف متوسطات المعالجات ضمن كل منهما.

المجموعة ١		المجموعة ٢	
المُحلّي B	$\bar{R}_2 = 1.50$	المُحلّي E	$\bar{R}_5 = 3.17$
المُحلّي C	$\bar{R}_3 = 2.00$	المُحلّي A	$\bar{R}_1 = 4.17$
المُحلّي E	$\bar{R}_6 = 3.17$	المُحلّي D	$\bar{R}_4 = 4.17$

وهكذا، نستنتج وبمستوى معنوية عائلي 20. أن المُحلّين A و D مفضلان على

B,C، وليس واضحاً ما إذا كان المُحلّي E ضمن المجموعة المفضلة أو ضمن المجموعة

الأخرى.

تعليقات

١- يمكن، أيضاً، استخدام اختبار فريدمان لتصاميم قياسات متكررة بمشاهدات غير مرتبة، وذلك في حالة اعتماد توزيع حدود الخطأ عن الطبيعية وتخصص الرتب للمشاهدات Y_{ij} عندئذ ضمن كل عنصر، ثم يُنفذ اختبار فريدمان بالطريقة المعتادة.

٢- يتصل X_F^2 بمعامل التوافق W لكاندل بالطريقة التالية:

$$W = \frac{X_F^2}{n(r-1)} \quad (28.9)$$

ومعامل التوافق W هو مقياس التوافق بين الترتيبات المقدمة من العناصر الـ n . ويمكن مساويا 1 إذا كان التوافق تاما ، ومساويا للصفر إذا لم يكن هناك أي اتفاق. أي إذا كان لجميع المعالجات متوسط رتب التصنيف نفسه. ولشال تحلية القهوة في الجدول (٦-٢٨) تكون W :

$$W = \frac{14.4}{6(4)} = .60$$

كما يشير إلى قدر مقبول من التوافق بين العناصر.

(٣-٢٨) تجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة لكل من العاملين

ناقشنا في الفقرة السابقة دراسات قياسات متكررة أحادية العامل ويمكن بسهولة توسيع النموذج الخاص بهذه التصاميم إلى حالات تتبع فيها المعالجات بناء عامليا . على سبيل المثال، اعتبر أن لدينا في دراسة أربع معالجات تمثل مستويين لكل عامل من عاملين. فالجدول (٧-٢٨) يوضح المخطط لمل هذا التصميم حيث استخدم أربعة عناصر في الدراسة. لاحظ تعشية ترتيب المعالجات ضمن كل عنصر. وعندما تمثل المعالجات بناء عامليا ، نستطيع كالعادة استكشاف تأثيرات التفاعل إلى جانب التأثيرات الرئيسة لكلا العاملين. ويقال عن التصميم في الجدول (٧-٢٨) أنه يمثل قياسات متكررة للعاملين كليهما، لأن كل عنصر يتلقى جميع المعالجات التي يرمزها البناء العاملي.

النموذج

عندما تكون تأثيرات العوامل مثبتة وتشكل العناصر عينة عشوائية، فكمبراً ما يكون النموذج التالي، والذي يفترض، مثله مثل النموذج (28.1)، عدم وجود تفاعل بين المعالجات والعناصر، النموذج المناسب للحالة التي توجد فيها قياسات متكررة لكل من العاملين.

جدول (٧-٢٨) عطلت لتصميم قياسات متكررة لتلقي العامل مع قياسات متكررة لكل من العاملين
(b=2, a=2, n=4)

ترتيب المعالجة				
4	3	2	1	
A_2B_1	A_1B_1	A_2B_2	A_1B_2	العنصر 1
A_1B_1	A_2B_2	A_1B_2	A_2B_1	2
A_1B_2	A_2B_1	A_1B_1	A_2B_2	3
A_2B_2	A_1B_2	A_2B_1	A_1B_1	4

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon(ijk) \quad (28.10)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

ρ_i مستقلة و $N(0, \sigma_p^2)$

α_j ثوابت خاضعة للقيود $\sum \alpha_j = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيود $\sum \beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لجميع قيم k و $\sum_k (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لجميع قيم j .

ε_{ijk} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و ρ_i

$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, a; k = 1, \dots, b$

وللمشاهدات Y_{ijk} في نموذج القياسات المتكررة (28.10) الخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{...} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \quad (28.11a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_r^2 + \sigma_p^2 = \sigma^2 \quad (28.11b)$$

$$\sigma^2_{\{Y_{ijk}, Y_{ij'k'}\}} = \sigma^2_{\mu} \quad \text{ليس } j = j' \text{ و } k = k' \text{ في الوقت نفسه.} \quad (28.11c)$$

ولهذا، يفترض نموذج القياسات المتكررة (28.10) أن للملاحظات Y_{ijk} تبايناً ثابتاً ، وأن تغاير أي مشاهدات معالجة للعنصر نفسه هو قبل إجراء التجربة، تغاير ثابت. ووفقاً للنموذج (28.10) تكون أي مشاهدين لعنصرين مختلفين، وقبل إجراء التجربة، مستقلتين. وفي النهاية نفرض أن جميع المشاهدات تتبع التوزيع الطبيعي. والنموذج (28.10) هو مدم مباشر لنموذج القياسات المتكررة أحادي العامل (28.1) حيث يجري الآن تفكيك المعالجة τ_j إلى تأثيرات رئيسة للعامل A ، وللعامل B وتأثير تفاعل AB . لاحظ مرة أخرى أن الرمز $\sigma^2_{\{ijk\}}$ قد استخدم بسبب عدم وجود تكرارات في هذا التصميم.

وإذا ما يتم اختيار العناصر، يفرض نموذج القياسات المتكررة (28.10)، مثله مثل نموذج القياسات المتكررة السابق (28.1) أن جميع مشاهدات للمعالجات لعنصر معطى هي مشاهدات مستقلة. - بمعنى أنه ليس هناك تأثيرات تتدخل.

تحليل التباين واختبارات

تحليل التباين. يمكن الحصول بسهولة على مجاميع مربعات التحاين للنموذج (28.10) باتباع القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعدلة (27.16). ويجب الحصول على مجموع المربعات المستعملة لتقدير تباين الخطأ كباقي، حيث لا يوجد هنا تكرارات. ونجد في النتيجة أن هذا المجموع هو مجموع مربعات التفاعل $SSTR.S$ ، الذي يعكس تفاعلاً بين المعالجات والعناصر. ويقدم الجدول (٨-٢٨) تفكيك التحاين، ودرجات الحرية، وتوقع متوسط المربعات لنموذج القياسات المتكررة ثنائي العامل (28.10). ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات بسهولة باتباع القاعدة (٤-٢٧).

جدول (٨-٢٨) جدول تحاين ومجموع المربعات لتصميم قياسات متكررة ثنائي العامل بقياسات متكررة لكل من العاملين - العامل عشوائية، والعاملان A و B مثبتان.

(أ) جدول تحاين				
مصدر التغير	SS	df	MS	E(MS)
عناصر	SSS	$n - 1$	MSS	$\sigma^2 + ab\sigma_p^2$
عامل A	SSA	$a - 1$	MSA	$\sigma^2 + \frac{nb}{a-1} \sum \alpha_j^2$
عامل B	SSB	$b - 1$	MSB	$\sigma^2 + \frac{na}{b-1} \sum \beta_k^2$
التفاعلات AB	SSAB	$(a-1)(b-1)$	MSAB	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum \sum \beta_k^2$
خطأ	SSTR.S	$(n-1)(ab-1)$	MSTR.S	σ^2
مجموع	SSTO	$abn - 1$		

(ب) مجموع مربعات

$$SSS = ab \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$SSA = nb \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$SSB = na \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$SSAB = n \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{jk} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..})^2$$

$$SS Rem = SSTR.S = \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..})^2$$

اختبارات تأثيرات العوامل

يتضح من عمود توقع متوسط المربعات في الجدول (٨-٢٨) إمكانية استخدام

اختبار تأثيرات التفاعل AB التالي:

$$H_0: \text{جميع } (\alpha\beta)_{jk} \text{ مساوية للصفر} \quad (28.12a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } (\alpha\beta)_{jk} \text{ مساوية للصفر}$$

إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSTR.S} \quad (28.12b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(ab-1)] \quad (28.12c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* < F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(ab-1)]$$

واختبار التأثير الرئيس للعامل A:

$$H_0: \text{جميع } \alpha \text{ مساوية للصفر} \quad (28.13a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \alpha \text{ تساوي الصفر}$$

يستخدم إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSA}{MSTR.S} \quad (28.13b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(ab-1)] \quad (28.13c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* < F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(ab-1)]$$

وبالمثل، فإن اختبار التأثير الرئيس للعامل B:

$$H_0: \text{جميع } \beta \text{ مساوية للصفر} \quad (28.14a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \beta \text{ تساوي الصفر}$$

يستخدم إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSB}{MSTR.S} \quad (28.14b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(ab-1)] \quad (28.14c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* < F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(ab-1)]$$

تعليقات

- ١ - عندما تكون تأثيرات أي من العاملين A و B عشوائية، فيمكن إيجاد توقع متوسط المربعات بتطبيق القاعدة (٢٧ - ٤). وفي المقابل سيحدد توقع متوسط المربعات إحصاء الاختبار المناسبة.

٢ - ينبغي استخدام اختبار F المتحفظ الموصوف في الفصل ٢٥ عندما لا يتحقق فرض التناظر المركب في نموذج القياسات المتكررة (28.10).

٣ - يفترض نموذج القياسات المتكررة (28.10) عدم تفاعل المعالجات والعناصر ويمكن تخفيف هذا الفرض لأن مجموع مربعات التفاعل بين المعالجات والعناصر مؤلف من ثلاث مركبات:

$$SS_{TRS} = SS_{AS} + SS_{BS} + SS_{ABS}$$

حيث SS_{AS} مجموع مربعات التفاعل بين العامل A والعناصر، والحدود الأخرى معرفة بصورة مشابهة. وهكذا يمكن أن نسمح بوجود تفاعلات من المرتبة الأولى بين العامل A والعناصر، وبين العامل B والعناصر، ونفرض، فقط، أن تفاعلات المرتبة الثانية بين العامل A والعناصر وبين العامل B والعناصر تساوي الصفر. ويصبح تحليل تأثيرات العوامل أكثر تعقيدا، إلى حد ما، عندما نسمح في نموذج القياسات المتكررة ببعض التفاعلات بين المعالجات والعناصر.

تقديم مصداقية نموذج القياسات المتكررة

تنطبق هنا، أيضا، مناقشاتنا السابقة حول مصداقية نموذج القياسات المتكررة (28.1). وعلى وجه الخصوص ينبغي إعداد سلسلة رسوم الرواسب لكل عنصر وذلك لفحص ما إذا كانت توجد تأثيرات تداخل، وما إذا كان تباین الخطأ ثابتا. وينبغي استخدام رسوم المشاهدات لكل عنصر لرؤية ما إذا كان افتراض عدم وجود تفاعل بين المعالجات والعناصر مناسباً.

تحليل تأثيرات العوامل

في حالة وجود تفاعل قوي بين A و B لا يمكن التخلص منه بتحويل بسيط، فينبغي القيام بتحليل تأثيرات العوامل بدلالة متوسط المعالجات \bar{y}_{ij} ، وهي متوسطات فرق العناصر. وبعضى هذا التحليل بصورة مماثلة لما وجدناه من أجل دراسة أحادية العامل، حيث \bar{y}_{ij} يقابلها هناك متوسط المعالجة \bar{y}_{ij} وسُيستخدم متوسط المربعات MS_{TRS} هنا، أيضا، في تقدير تباین أي متضادة مقترنة لمتوسطات للمعالجات. وإذا لم يكن هناك تفاعل بين العاملين A و B ، أو أنهما يتفاعلا تفاعلا غير ذي بال،

فسيتمضي تحليل التأثيرات الرئيسة للعامل A ، وللعامل B كالتعداد. ولتحليل التأثيرات الرئيسة لأي من العامل A أو العامل B ، سنستخدم $MSR.S$ في التباين المقدر لتضادة مقدرّة باعتباره يشكل مقام، احصاءة الاختبار F^* لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A أو للعامل B .

وتكون مضاعفات الانحراف المعياري المقدر لتضادة مقدرّة بين متوسطات مستويات العامل A أو العامل B كما يلي:

تأثير B الرئيس	تأثير A الرئيس	
مقارنة بمفردها		
$t[1-\alpha/2; (n-1)(ab-1)]$	$t[1-\alpha/2; (n-1)(ab-1)]$	(28.15a)
طريقة توكي للمقارنات الثنائية		
$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; a, (n-1)(ab-1)]$	$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; b, (n-1)(ab-1)]$	(28.15b)
طريقة شيفيه		
$S^2 = (a-1)F[1-\alpha; a-1, (n-1)(ab-1)]$		(28.15c)
	$S^2 = (b-1)F[1-\alpha; b-1, (n-1)(ab-1)]$	
طريقة بونفيروني		
$B = t[1-\alpha/2g; (n-1)(ab-1)]$	$B = t[1-\alpha/2g; (n-1)(ab-1)]$	(28.15d)

مثال:

درس أحد الأطباء تأثيرات عقارين، يُستخدمان معاً أو منفردين على تدفق الدم في عناصر بشرية، اشترك في الدراسة اثني عشر من الذكور من متوسطي العمر واعتبروا على أنهم عينة عشوائية من مجتمع مناسب من الذكور متوسطي العمر. وقد تم تعريف المعالجات الأربع المستخدمة في الدراسة كما يلي:

A_1B_1	بلاسيبو (لا يوجد أي من العقارين)
A_1B_2	عقار B فقط
A_2B_1	عقار A فقط
A_2B_2	عقار A وعقار B

تلقى كل من الـ 12 شخصا المعالجات الأربع وفق ترتيب عشوائي مستقل والمتغير التابع هو الزيادة في تدفق الدم من قُبيل تطبيق المعالجة إلى مابعد تطبيقها بقليل. وتم إعطاء المعالجات في أيام متتالية. وقد حال هذا دون وجود أية تأثيرات محمولة نظرا لقصر فترة تأثير العقار.

تم اجراء التجربة بطريقة مضاعفة التعمية، أي لا يعرف أي من الطبيب أو العنصر المعالجة المطبقة عند قياس التغير في تدفق الدم. ويحتوي الجدول (٢٨-٩) على بيانات هذه الدراسة، وتعبّر القيمة السالبة عن تراجع في تدفق الدم. وقد استُخدمت حزمة الحاسب MINITAB (مرجع 28.2) لتوفيق نموذج القياسات المتكررة (28.10) ويحتوي الشكل (٢٨-٣) على مطبوعة المعرجات. وتشمل هذه المطبوعة توقع متوسط المربعات لنموذج التحاين المذكور. ويمثل كل حد من توقع متوسط المربعات رمزيا برمز (بين هلالين) لتباين حد النموذج، والرقم السابق هو المضاعف الرقمي. وعندما يكون حد النموذج مثبتا، يُستخدم الحرف Q في مطبوعة المعرجات ليبين أن التباين حل محله بمجموع مربعات التأثير مقسوما على درجات الحرية. على سبيل المثال، وكما هو موضح في شكل (٢٨-٣)، تكون القيمة المتوقعة لـ MSA :

$$(5) + 24Q[2] = \sigma^2 + 24 \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$$

وهي تقابل بالطبع توقع متوسط المربعات المبين في الجدول (٢٨-٨).

وقد استُخدمت تشخيصات مختلفة لرؤية ما إذا كان نموذج القياسات المتكررة

(28.10) مناسبة لبيانات الجدول (٢٩-٩). وقد آيدت النتائج (غير معروضة

هنا) صلاحية هذا النموذج. توقع الطبيب أن يتفاعل العقاران في زيادة تدفق الدم، ولاختبار تأثيرات التفاعل:

جميع $H_0: (\alpha\beta)$ مساوية للصفر

ليس جميع $H_a: (\alpha\beta)$ مساوية للصفر

نستخدم إحصاء الاختبار (28.12b)، والنتائج من الشكل (٢٨-٣) هي:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSTR.S} = \frac{147.000}{2.35} = 62.6$$

ونحتاج إلى $7.47 = (0.99; 1.33)$ مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ، وبما أن $F^* = 62.6 >$

7.47 ، نستنتج وجود تأثيرات تفاعل. والقيمة P لهذا الاختبار هي 0^+ .

جدول (٩-٢٨) بيانات مثال لتلف الم.

معالجة				
A_2B_2	A_2B_1	A_1B_2	A_1B_1	العنصر i
25	9	10	2	1
21	6	8	-1	2
24	8	11	0	3
31	11	15	3	4
20	6	5	1	5
27	9	12	2	6
22	8	10	-2	7
30	12	16	4	8
24	7	7	-2	9
28	10	10	-2	10
25	10	8	2	11
23	6	8	-1	12

شكل (٣-٢٨) مُخرجات حاسب لتحليل بيانات مثال لتلف الم (مستجاب، مرجع [28.2])

Factor	Type	Levels	Values											
S	random	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	fixed	2	1	2										
B	fixed	2	1	2										

Analysis of Variance for Y

Source	DF	SS	MS	F	P
S	11	258.50	23.50	10.01	0.000
A	1	1587.00	1587.00	676.75	0.000
B	1	2028.00	2028.00	863.54	0.000
A*B	1	147.00	147.00	62.90	0.000
Error	33	77.00	2.35		
Total	47	4008.00	87.19		

Source	Variance component	Error term	Expected Mean Square (using restricted model)
1 S	5.289	5	(5) + 4(1)
2 A		5	(5) + 24(2)
3 B		5	(5) + 24(3)
4 A*B		5	(5) + 12(4)
5 Error	2.348	(5)	(5)

MEANS

A	B	N	Y
1	1	12	0.500
1	2	12	10.000
2	1	12	8.500
2	2	12	25.000

ويحتوي الشكل (٤-٢٨) رسماً للمتوسطات المقدرة للمعالجات \bar{Y} وهو

معطى في الشكل (٣-٢٨). ويتضح وجود تأثيرات تفاعل قوية. ولدراسة طبيعة

تأثيرات التفاعل، رغب الطبيب في مقارنة بين استخدام العقارين معا وبين استخدام كل عقار على حده مقارنة العقار A مع العقار B ، ثم مقارنة بين كل عقار والبلاسيبو. ولذا تقرر القيام بالمقارنات التالية:

$$\begin{aligned} D_4 &= \mu_{21} - \mu_{11} & D_1 &= \mu_{22} - \mu_{21} \\ D_5 &= \mu_{12} - \mu_{11} & D_2 &= \mu_{22} - \mu_{12} \\ & & D_3 &= \mu_{21} - \mu_{21} \end{aligned}$$

والتقديرات النقطية لهذه المقارنات التالية (قيم \bar{Y}_{ij} موجودة في الشكل (٢٨-٣)).

$$\begin{aligned} \hat{D}_4 &= 8.5 - .5 = 8.0 & \hat{D}_1 &= 25.0 - 8.5 = 16.5 \\ \hat{D}_5 &= 10.0 - .5 = 9.5 & \hat{D}_2 &= 25.0 - 10.0 = 15.0 \\ & & \hat{D}_3 &= 8.5 - 10.0 = -1.5 \end{aligned}$$

والتباين المقدر لكل \hat{D} معطى في (١٣-١٥) ومتوسط المربعات المناسبة هنا هو $MSTR.S$ وبالتالي لدينا:

$$s^2(\hat{D}) = MSTR.S \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = 2.348 \left(\frac{2}{12} \right) = 3913$$

$s(\hat{D}) = 626$ ، وباستخدام أسلوب برنفورني ومعامل ثقة عالى 95% نحتاج إلى

$$.B = t[1 - (.05)/2(5); 33] = t(0.995; 33) = 2.733$$

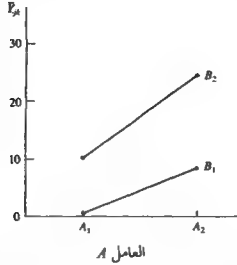
وبالتالي $s(\hat{D}) = 2.733(626) = 1.71$ وفترات الثقة المطلوبة بمعامل ثقة

عالى 95% هي:

$$\begin{aligned} 14.8 \leq \mu_{22} - \mu_{21} \leq 18.2 & & 6.3 \leq \mu_{21} - \mu_{11} \leq 9.7 \\ 16.3 \leq \mu_{22} - \mu_{12} \leq 16.7 & & 7.8 \leq \mu_{12} - \mu_{11} \leq 11.2 \\ -3.2 \leq \mu_{21} - \mu_{12} \leq .2 & & \end{aligned}$$

ويتضح من هذه النتائج أن العقار A وحده أو العقار B وحده يؤدي إلى زيادة تدفق الدم، وتؤدي تركيبة العقارين إلى زيادة إضافية كبيرة في تدفق الدم بالمقارنة مع استخدام أي من العقارين بمفرده. وأخيرا لا يوجد فرق معنوي بين متوسطي التأثيرات لكل من العقارين على حده.

شكل (٤-٢٨) رسم لميوسلات الماتجيات القادرة - مثال تلفظ الدم



(٤-٢٨) تجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة على عامل واحد

وصف التصميم

في كثير من الدراسات ثنائية العامل، يمكن القيام بالقياسات المتكررة على أحد العاملين فقط. اعتبر، على سبيل المثال، رغبة أحد الباحثين في دراسة تأثيرات نوعين من الحوافز (عامل A) على قدرة الشخص على حل المشاكل. أراد، أيضاً، ان يدرس نوعين من المشاكل (عامل B) - مشاكل مجردة ومشاكل عمسوسة. ويستطيع أن يطلب من كل عنصر تجريبي القيام بكل من نوعي المشاكل، ولكنه لا يستطيع تطبيق إلا نوع واحد من الحوافز التشجيعية على عنصر بسبب تأثيرات التداخل. وهكذا يمكن تمثيل مخطط التصميم الذي استخدمه الباحث كما هو مبين في الجدول (١٠-٢٨).

يتم استخدام تعشيتين، بصورة عامة، في تجربة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على عامل واحد. فأولاً، نحتاج إلى تخصيص مستويات العامل غير المتكرر (A) في الجدول (١٠-٢٨) عشوائياً إلى العناصر. وثانياً، نحتاج إلى تعشية ترتيب مستويات العامل المتكرر (B) في الجدول (١٠-٢٨) بصورة مستقلة من أجل كل عنصر. وحيث أنه تم تخصيص الحافز التشجيعي A₁ عشوائياً لـ n من العناصر، وتخصيص الحافز

التشجيعي A_2 عشوائيا لـ n من العناصر، فتكون التجربة للعامل A تجربة تامة التعشية. وفي المقابل، وبالنسبة للعامل B (نوع المشكلة) يشكل كل عنصر قطاعا. وهكذا تكون التجربة بالنسبة للعامل B ، تصميم قطاع عشوائي مع تأثيرات عشوائية للقطاع، ويسمى هذا التصميم التجريبي تجربة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على العامل B . وتنطوي المقارنات بين متوسطات مستويات العامل A ، في التجربة الموصوفة في الجدول (٢٨-١٠)، على اختلافات بين مجموعات من العناصر، بالإضافة إلى الاختلافات المتعلقة بمستوى العامل A . ولكن المقارنات بين متوسطات مستويات العامل B عند المستوى نفسه للعامل A ، مبنية على العنصر نفسه، وبالتالي فهي تنطوي، فقط، على اختلافات متعلقة بمستوي العامل B . ولهذا يخدم كل عنصر كضابط لنفسه في هذه المقارنات. ولذلك، يقال إن التأثيرات الرئيسة للعامل A قد اختلطت مع الاختلافات بين مجموعتي العناصر، بينما بقيت التأثيرات الرئيسة للعامل B حرة من ذلك الإختلاط. ولهذا السبب تكون الاختبارات لتأثيرات العامل B الرئيسة أكثر حساسية بصفة عامة من اختبارات التأثيرات الرئيسة للعامل A .

جدول (٢٨-١٠) يخطط تصميم ثنائي العامل مع تخصيص عشوائي لمستويات العامل A إلى العناصر وقياسات متكررة على العامل B .

ترتيب المعالجة		عنصر	حافظ تشجيع
2	1		
A_1B_2	A_1B_1	1	A_1
.	.	.	
A_1B_2	A_1B_1	.	
A_2B_1	A_2B_2	$n+1$	A_2
.	.	.	
A_2B_2	A_2B_1	$2n$	

تعليقات

١ - يمكن النظر إلى تجربة ثنائية العامل بقياسات متكررة على عامل واحد على أنها تصميم قطاع غير تام. وبالإشارة إلى تصميم القياسات المتكررة في الجدول (٢٨-١٠) هناك أربعة معالجات ($A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2$) ونصف القطاعات (العناصر) يحتوي المعالجات A_1B_1 و A_1B_2 ، بينما يحتوي النصف الآخر من القطاعات المعالجات A_2B_1 و A_2B_2 .

٢ - عندما يكون الزمن هو العامل الذي أخذت عليه القياسات المتكررة، لا نحتاج إلى تعشية مستويات هذا العامل. اعتمد على سبيل المثال، دراسة حملتين من الحملات الدعائية المختلفة والتي يتم قياس تأثيرها على المبيعات في 10 أسواق اختبار خلال أربعة أشهر متتالية، فالتعشية المطلوبة هنا هي تخصيص الحملات الدعائية لأسواق الاختبار، وبالمثل، لا يكون هناك تعشية للعامل، إذا كان ذلك العامل، غير المتكرر قياسه، صفة من صفات العناصر، كعمر الشخص مثلاً.

النموذج

إن تطوير النموذج لتجربة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على أحد العوامل، فقط، هو أكثر تعقيداً من الحالات السابقة. وكما سبق سنطور النموذج في حالة تأثيرات عشوائية للعناصر وتأثيرات مثبتة للعامل A وللعامل B .

لنرمز، كالمعاد، بـ α و β للتأثير الرئيس للعامل A وللعامل B ، على الترتيب، ولنرمز بـ μ للتأثير الرئيس للعنصر (القطاع). ويبقى أن ندرك هنا أن تأثير العنصر في هذا التصميم محضّن العامل A ، ولذلك سترمز لهذا التأثير بالرمز ρ_{ij} وسنفترض، كما سبق عدم وجود تفاعلات بين المعالجات والعناصر، مع أن هذا الشرط لا يشكل شرطاً أساسياً هنا. والنموذج الذي يستوعب المواصفات السابقة هو

النموذج التالي:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_{ij} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad (28.16)$$

حيث:

μ ثابت

$N(0, \sigma_p^2)$ مستقلة و $\rho_{N(0)}$

α_i ثوابت خاضعة للقيود $\sum \alpha_i = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيود $\sum \beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j (\alpha\beta)_{jk}$ لجميع قيم k و $\sum_k (\alpha\beta)_{jk}$ لجميع قيم j .

$N(0, \sigma^2)$ مستقلة و

$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, a; k = 1, \dots, b$

والملاحظات Y_{ijk} لنموذج القياسات المتكررة (28.16) الخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \quad (28.17a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_v^2 = \sigma_p^2 + \sigma^2 \quad (28.17b)$$

$$\sigma\{Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}\} = \sigma_p^2 \quad k \neq k' \quad (28.17c)$$

وهكذا يكون للملاحظات Y_{ijk} تباين ثابت. وبالإضافة إلى ذلك، وقبل إجراء التجربة، يكون لأي مشاهدين من مستويات مختلفة من العامل B على العنصر نفسه تغاير ثابت، وذلك من أجل جميع العناصر، بينما تكون المشاهدات على عناصر مختلفة مستقلة، ونفترض، أيضا، أن كل المشاهدات تتوزع توزيعا طبيعيا. وحالما يجري اختبار العناصر، يفترض نموذج القياسات المتكررة (28.16) استقلال أية مشاهدين على العنصر نفسه، أي أنه ليس هناك تأثيرات تداخل.

تحليل التباين والاختبارات

تحليل التباين. يمكن الحصول على مجاميع مربعات التحاين لنموذج القياسات المتكررة (28.16) كالمتاد باستخدام القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعدلة (27-16)، وذلك بسبب عدم وجود تكرارات في هذا التصميم. ويصبح مجموع مربعات الباقي المستخدم في تقدير تباين الخطأ هو مجموع مربعات التفاعل $SSB.S(A)$ ، وبين الجدول (٢٨-١١) مجاميع مربعات التحاين، كما بين الجدول (٢٨-١١)، أيضا، درجات الحرية لكل مجموع مربعات.

اختبارات تأثيرات العوامل. يقدم الجدول (١٢-٢٨) توقع متوسط المربعات لتحليل التباين في الجدول (١١-٢٨). ويمكن الحصول على توقعات متوسطات المربعات هذه باستخدام القاعدة (٢٧-٤).

جدول (١١-٢٨) تحليل التباين لتجربة ثنائية العامل بقياسات متكررة على العامل B - نموذج (28-16)

مصدر التغير	SS	df
العامل A	$SSA = bn \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$	$a - 1$
العامل B	$SSB = an \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2$	$b - 1$
التفاعلات AB	$SSAB = n \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{jk} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..})^2$	$(a-1)(b-1)$
العناصر (ضمن العامل A)	$SSS(A) = b \sum_j \sum_i (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$	$\alpha(n-1)$
خطأ	$SSRem = SSB.S(A) = \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{ij} + \bar{Y}_{.j})^2$	الباقى = $\alpha(n-1)(b-1)$
المجموع	$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2$	$abn - 1$

ويتضح من توقع متوسطات المربعات في الجدول (١٢-٢٨) أن الاختبار لتأثيرات

التفاعل AB:

$$H_0: \text{جميع } \alpha\beta \text{ مساوية للصفر} \quad (28.18a)$$

$$H_a: \text{ليس جميع } \alpha\beta \text{ مساوية للصفر}$$

يستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSB.S(A)} \quad (28.18b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(b-1)] \quad (28.18c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* < F[1 - \alpha, (a-1)(b-1), (n-1)(b-1)]$$

والاختبار لتأثيرات العامل A الرئيسة:

$$H_0: \text{جميع } \alpha \text{ مساوية للصفر} \quad (28.19a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \alpha \text{ تساوي الصفر}$$

يستخدم إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSA}{MSS(A)} \quad (28.19b)$$

جدول (١٢-٢٨) توقع متوسط المبيعات لتجربة ثانية العامل بقياسات متكررة على العامل B - نموذج (28.16)، (A, B) معينان والعناصر عشوائية

$E\{EM\}$	MS	مصدر التغير
$\sigma^2 + b\sigma_p^2 + bn \frac{\sum \alpha_j^2}{(a-1)}$	MSA	العامل A
$\sigma^2 + an \frac{\sum \beta_j^2}{(b-1)}$	MSB	العامل B
$\sigma^2 + n \frac{\sum \sum (\alpha\beta)^2}{(a-1)(b-1)}$	$MSAB$	التفاعلات AB
$\sigma^2 + b\sigma_p^2$	$MSS(A)$	العناصر (ضمن العامل A)
σ^2	$MSB.S(A)$	الخطأ

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha; a - 1, a(n - 1)] \quad (28.19c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* < F[1 - \alpha; a - 1, a(n - 1)]$$

وأخيراً ، الاختبار لتأثيرات العامل B الرئيسة:

$$H_0: \text{جميع } \beta_j \text{ مساوية للصفر} \quad (28.20a)$$

$$H_a: \text{ليست جميع } \beta_j \text{ تساوي الصفر}$$

يستخدم إحصاء الاختبار:

$$F^* = \frac{MSB}{MSB.S(A)} \quad (28.20b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$H_0 \text{ استتج } F^* \leq F[1 - \alpha; b - 1, (n - 1)(b - 1)] \quad (28.20c)$$

$$H_a \text{ استتج } F^* < F[1 - \alpha; b - 1, (n - 1)(b - 1)]$$

تعليقات

١ - إذا لم يتوفر شرط التناظر المركب في نموذج القياسات المتكررة (28.16)، فينبغي استخدام الاختيار للمتحفظ الموصوف في الفصل ٢٥.

٢ - إذا لم يكن عدد العناصر ضمن كل مستوى من مستويات عامل A هو نفسه، تظهر مشاكل مشابهة لتلك الموجودة في دراسات ثنائية العامل غير متوازنة في تصميم تام التعشية. وما لم تعكس أحجام العينات أهمية المعالجات، فينبغي عادة تركيز الاهتمام على تحليلات تعطي متوسطات الخلايا أوزاناً متساوية. وبينما تعالج كثير من الحزم الإحصائية الجاهزة البيانات غير المتوازنة، فلا بد للمستخدم من أن يتأكد من أن الاختبارات التي تقدمها الحزمة تختبر الفروض التي يهتم بها المستخدم.

تقويم مصداقية نموذج قياسات متكررة

تتعلق مناقشتنا السابقة حول تقويم مصداقية نموذج قياسات متكررة هنا، أيضاً، وتكون الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.16).

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{..} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{.j} \quad (28.21)$$

وإحدى السمات الخاصة بنموذج القياسات المتكررة (28-16) جديرة بالاهتمام، إذ يتطلب هذا النموذج أن يبقى الثابت بين العناصر σ^2 ثابتاً لكل مستويات العامل A . ويمكن فحص هذا الافتراض برسم نقطية للتأثيرات المقترنة للعناصر $\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$ لكل مستوى من مستويات العامل A . ويمكننا، أيضاً، القيام باختبار رسمي لتساوي تباينات ما بين العناصر بملاحظة أنه يمكن تفكيك تباين ما بين العناصر ضمن العامل A ، $SSS(A)$ إلى مركبات لكل مستوى من مستويات عامل A :

$$SSS(A) = SSS(A_1) + SSS(A_2) + \dots + SSS(A_m) \quad (28.22)$$

حيث:

$$SSS(A_j) = b \sum_i (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (28.22a)$$

ويصاحب كل مركبة مجموع مربعات $m-1$ درجة حرية. ولذلك، يمكننا القيام

باختبار تساوي ما بين العناصر باستخدام إحصاء اختبار هارتلي (16.13).

وبالمثل، يمكن تفكيك باقي التغير $SSB.S(A)$ إلى مركبات من أجل كل

مستوى من مستويات العامل A :

$$SSB.S(A) = SSB.S(A_1) + SSB.S(A_2) + \dots + SSB.S(A_b) \quad (28.23)$$

حيث:

$$SSB.S(A_j) = \sum_i \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j.})^2 \quad (28.23a)$$

ويمتلك كل مركبة $(n-1)(b-1)$ درجة حرية. ويمكن القيام باختبار هارتلي

هنا، أيضاً، ولكن في هذه المرة لاختبار المساواة بين تباين الخطأ σ^2 لمستويات العامل A المختلفة.

ويفرض كل من اختبائي هارتلي الطبيعية، وهما حساسان لهذا الافتراض.

وبالتالي ينبغي أولاً إرساء صلاحية فرض الطبيعية قبل إجراء اختبارات هارتلي. وإذا

لم يتوفر شرط الطبيعية، فقد يكون اللجوء إلى تحويل البيانات مفيداً.

تحليل تأثيرات العوامل

عندما لا يتفاعل العلامان، أو عندما تكون التفاعلات غير مهمة، يمكن تحليل

التأثيرات الرئيسة بطريقة مباشرة. ومتوسط المربعات المناسب في التباين المقدر لتضادة

بين متوسطات مستويات العامل A لنموذج القياسات المتكررة (28.16) هو $MSS(A)$

وذلك بسبب أنه المقام لإحصاء F^* الخاصة باختبارات تأثيرات العامل A الرئيسة.

وبصورة مماثلة، فإن متوسط المربعات لتقدير متضادات من متوسطات مستويات

العامل B هو $MSB.S(A)$.

ونحتاج المضاعفات في (28.15) إلى التعديل فيما يتعلق بدرجات الحرية المصاحبة

لمتوسط المربعات المستخدم، فقط: $\alpha(n-1)$ لتحليل تأثيرات العامل A ، و $\alpha(n-1)(b-1)$

لتحليل تأثيرات العامل B .

لاحظ من الجدول (١٢-٢٨) أنه يمكن إجراء تحليل تأثيرات العامل B بدقة

أكبر من دقة تحليل تأثيرات العامل A . وسبب ذلك هو أن المقارنات بين مستويات

العامل A تنطوي على التشتت بين العناصر بالإضافة إلى الخطأ التجريبي في حين أن

المقارنات بين مستويات العامل B تنطوي على الخطأ التجريبي، فقط. ويصبح تحليل تأثيرات العوامل أكثر تعقيدا عندما توجد تفاعلات بين العاملين، أنظر، على سبيل المثال، مرجع (28.3) لمناقشة هذه الحالة.

مثال

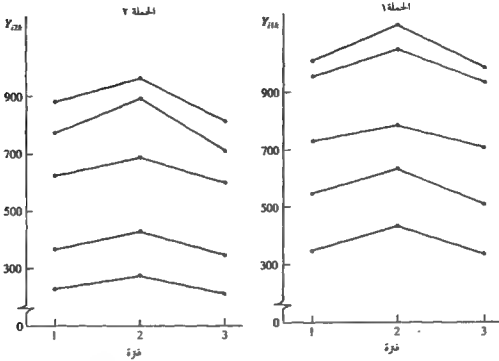
أرادت أحد سلاسل محلات التجزئة الأهلية دراسة تأثيرات حملتين دعائيتين (عامل A) على حجم مبيعات الأحذية الرياضية فوق فترة زمنية (عامل B)، وقد تمَّ عشوائيا اختبار 10 أسواق اختبار (عناصر، S) للمشاركة في هذه الدراسة. وتشابهت الحملتان الدعائيتان (A_2, A_1) في كل شيء فيما عدا الاختلاف في استخدام شخصية رياضية معروفة على المستوى القومي في كل منها. تمَّ جمع بيانات المبيعات لثلاث فترات كل منها أسبوعان (B_1 أسبوعان قبل الحملة، B_2 أسبوعان خلال الحملة، B_3 أسبوعان في ختام الحملة). وتمَّ إجراء التجربة خلال فترة ستة أسابيع تكون فيها مبيعات الأحذية الرياضية مستقرة عادة.

ويقدم الجدول (٢٨-١٣) بيانات المبيعات (مرمزة) وتمَّ رسمها في الشكل (٢٨-٥) من أجل كل حملة دعائية، وذلك لكل سوق اختبار على حده. ليس هناك دليل في الشكل (٢٨-٥) على وجود تفاعلات بين أسواق الاختبار والمعالجات.

جدول (٢٨-١٣) بيانات مثال مبيعات أحذية رياضية.

فترة زمنية			
$k=3$	$k=2$	$k=1$	سوق اختبار
933	1,047	958	$i=1$
986	1,122	1,005	$i=2$
339	436	351	$i=3$
512	632	549	$i=4$
707	784	730	$i=5$
718	897	780	$i=1$
202	275	229	$i=2$
817	964	883	$i=3$
599	695	624	$i=4$
351	436	375	$i=5$

شكل (٥-٢٨) رسوم لبيانات المبيعات من أجل كل حملة ولكل موقع اختيار



وبصورة عامة اتجهت المبيعات إلى الازدياد خلال كل حملة دعائية، ثم اتجهت إلى الانخفاض إلى المستويات السابقة للحملة الدعائية أو إلى أقل منها. وبناء على الشكل (٥-٢٨) وتحليلات تشخيصية أخرى (غير مبينة هنا) تم استنتاج أن نموذج القياسات المتكررة (١٦-٢٨) مناسب هنا. وبتشغيله لحزمة حاسب خاصة لهذا النموذج، حصلنا على مطبوعة المخرجات المبينة في الشكل (٦-٢٨).

نرغب أولاً في اختبار تأثيرات التفاعل بين الحملة والزمن.

كل $(\alpha\beta)$ مساوية للصفر: H_0

ليست كل $(\alpha\beta)$ مساوية للصفر: H_a

ونستخدم النتائج من الشكل (٦-٢٨) في إحصاءة الاختبار (28.18b).

$$F^* = \frac{MSAB}{MSB.S(A)} = \frac{196}{358} = 0.55$$

ونحتاج إلى $F(95; 2, 16) = 3.63$ من أجل مستوى معنوية $\alpha = 0.50$ وبما أن $3.63 \leq F^* = 55$ ، بفرض H_0 ، أي ليس هناك تأثيرات تفاعل مهمة. والقيمة p لهذا الاختبار هي 0.59.

نرغب بعد ذلك في اختبار التأثيرات الرئيسة للحملة الدعائية:

كل α يساوي الصفر: H_0

ليست كل α يساوي الصفر: H_a

شكل (٦-٢٨) مخرجات الحاسب لمعين بيانات مثال مجلات الأحياء (ميفي: تاب - مرجع [28.2])

Factor	Type	Levels	Values				
A	fixed	2	1	2			
S(A)	random	5	1	2	3	4	5
B	fixed	3	1	2	3		

Analysis of Variance for Y

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	168151	168151	0.73	0.417
S(A)	5	1833681	229210	640.31	0.000
B	2	67073	33537	93.69	0.000
A*B	2	391	196	0.55	0.589
Error	16	5727	358		
Total	29	2075023	71563		

Source	Variance component	Error term	Expected Mean Square (using restricted model)
1 A		2	(5) + 3(2) + 150(1)
2 S(A)	76294.0	5	(5) + 3(2)
3 B		5	(5) + 100(3)
4 A*B		5	(5) + 50(4)
5 Error	358.0	(5)	(5)

MEANS

A	N	Y
1	15	739.40
2	15	589.67

B	N	Y
1	10	648.40
2	10	728.80
3	10	616.40

ونستخدم النتائج من الشكل (٦-٢٨) في إحصاءة الاختبار (28.19b):

$$F^* = \frac{MSA}{MSS(A)} = \frac{168,151}{229,210} = .73$$

ونحتاج إلى $F(95; 1,8) = 5.32$ من أجل مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وحيث أن $F^* = 0.73 < 5.32$ ، فنستنتج H_0 ، أي أنه لا توجد تأثيرات رئيسة للحملة الدعائية. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.42. وهكذا يكون لكل من الشخصيتين الرياضيتين تأثيرات متعادلة في الحملة الدعائية.

ونرغب في النهاية في اختبار تأثيرات الفترة الزمنية

كل β_2 يساوي الصفر H_0 :

ليس كل β_2 يساوي الصفر H_a :

باستخدام النتائج من الشكل (٦-٢٨) في إحصاء الاختبار (28.20b) نحصل على:

$$F^* = \frac{MSB}{MSB.S(A)} = \frac{33,537}{358} = 93.7$$

نحتاج إلى $F(95; 2,16) = 3.63$ من أجل مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وحيث أن $F^* = 93.7 > 3.63$ ، فنستنتج H_a ، أي وجود تأثيرات رئيسة للفترة الزمنية. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0^+ .

ولاختبار طبيعة تأثيرات فترة الزمن، سنجري مقارنات ثنائية لمنوسطات المبيعات في الفترات الثلاث.

$$D = \mu_{a,b} - \mu_{b,c}$$

وسنستخدم أسلوب توكي بمعامل ثقة عائلي 99% ونحتاج إلى:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(99; 3,16) = \frac{1}{\sqrt{2}} (4.78) = 3.38$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2 MSB.S(A)}{an} = \frac{2(358)}{2(5)} = 71.60$$

$$Ts\{\hat{D}\} = 3.38 \sqrt{71.60} = 28.6 \text{ وبالتالي يكون}$$

وتقديرات النقطة للتغيرات في متوسط المبيعات، بناء على متوسطات مستويات العوامل

B المقطرة \bar{Y}_x كما وردت في الشكل (٦-٢٨) هي:

$$\hat{D}_1 = \bar{Y}_{.2} - \bar{Y}_{.1} = 728.8 - 648.4 = 80.4$$

$$\hat{D}_2 = \bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{.1} = 616.4 - 648.4 = -32.0$$

$$\hat{D}_3 = \bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{.2} = 616.4 - 728.8 = -112.4$$

وتكون فترات الثقة المرغوبة بالتالي هي:

$$\begin{aligned} 52 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 109 \\ -3 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 61 \\ -84 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq -141 \end{aligned}$$

ونستطيع أن نستنتج بمعامل ثقة عاظمي 0.99، أن الحملتين الدعائيتين أدتا إلى زيادة فورية في متوسط المبيعات تتراوح بين 52 و 109 (8% إلى 17%)، وانخفضت متوسطات المبيعات في الفترة التالية عما كانت عليه في الفترة السابقة للحملتين بما يتراوح بين 3 و 61 (0.5% إلى 9%).

(٥-٢٨) تصاميم القطعة المنشقة لدراسات ثنائية العامل

وصف التصاميم

تُستخدم تصاميم القطعة المنشقة بكثرة في تجارب حقلية أو معملية أو صناعية وفي تجارب العلوم الاجتماعية. وسنتناقش تصاميم القطعة المنشقة لدراسات ثنائية العامل، فقط، ولكن يمكن أن تتسع هذه التصاميم لتطبيق على دراسات بثلاثة عوامل أو أكثر.

ويمكن النظر إلى تصاميم القطعة المنشقة كحالة خاصة من تصاميم قياسات متكررة تتناول معالجات عاملية وذلك عندما يكون من الممكن تخصيص بعض المعالجات، فقط، لكل عنصر. وقد ناقشنا آنفاً مثل هذه التصاميم في الفقرة ٤-٢٨، عندما درسنا تجربة ثنائية العامل بقياسات متكررة على أحد العوامل. وتصاميم القطع المنشقة هي تحسين لتلك التصاميم يستوعب فكرة تصنيف العناصر إلى قطاعات. وباستثناء ما يتعلق بتصنيف العناصر إلى قطاعات، تنطبق هنا مناقشتنا السابقة لتجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة على عامل واحد. وسنمطي ثلاثة أمثلة لتوضيح تصاميم القطعة المنشقة.

مثال ١. اعتبر مرة أخرى دراسة تأثيرات نوعين من الحوافز (عامل A) ونوعين من المشاكل (عامل B) على مقدرة الشخص في حل مشكلة. فقد تم في الجدول (١٠-٢٨) توضيح تصميم القياسات المتكررة من أجل هذه الدراسة مع قياسات

متكررة لنوع المشكلة (عامل B). وقد لاحظنا عند مناقشتنا لهذا التصميم أن تحليل تأثيرات نوع الحافز (عامل A) سوف لا تكون، عادة، في نفس دقة تحليل تأثيرات نوع المشكلة لأن هناك، بصورة عامة، تشتت بين العناصر أكبر بكثير من التشتت ضمن عنصر واحد، أو على أي حال لا يمكن أخذ قياسات متكررة على الحافز هنا بسبب تأثيرات التداخل.

ولتحسين الدقة عند تحليل تأثيرات العامل A ، يمكن تصنيف العناصر إلى قطاعات وفقا لخاصة (أو خواص) مناسبة بحيث نخفض التشتت بين العناصر ضمن قطاع واحد. ويوضح الجدول (٢٨-١٤) تصميم القطعة المنشقة في هذا المثال، فهناك n قطاعا يتألف كل منها من عنصرين متشابهين. وفي كل قطاع تخصص أحد العنصرين عشوائيا للمستوى A_1 من مستويات العامل A وتخصص العنصر الآخر للمستوى A_2 . وفي المرحلة الثانية من التمشية، تخصص المشكلتين لكل عنصر وفق ترتيب عشوائي، وهكذا يكون الفرق الوحيد بين تصميم القطعة المنشقة في الجدول (٢٨-١٤) وتصميم القياسات المتكررة على عامل واحد في الجدول (٢٨-١٠) هو تصنيف العناصر إلى قطاعات بغية دراسة تأثيرات العامل A بدقة أكبر.

وعندما يكون من الممكن الاختيار بين العاملين، أيهما نطبق عليه القياسات المتكررة، فينبغي أن نختار للقياسات المتكررة (العامل B) ذلك العامل الذي نحتاج له تقديرات أكثر دقة. والسبب هو أنه حتى مع التصنيف إلى قطاعات، فإن التشتت مابين العناصر ضمن قطاع سيكون عادة أكبر من التشتت ضمن عنصر واحد.

مثال ٢. تُستخدم تصاميم القطعة المنشقة بكثرة، أيضا، عندما تقوم بالقياسات المتكررة فوق الزمن. فقد أجريت تجربة لدراسة لطريقتين لتحديد أحد المركبات (عامل A) ومعدل تعلم عملية التجميع (عامل B). وتم تخصيص نصف العمال المستخدمين في الدراسة عشوائيا لكل من طريقتي التجميع (A_1, A_2)، وتم قياس إنتاجية كل عامل في إنجاز عملية التجميع بعد خمسة أيام (B_1) وبعد عشرة أيام (B_2). ويوضح الجدول (٢٨-١٤) تصميم القطعة المنشقة لهذا المثال وأيضا، للمثال ١. وتم تصنيف العمال إلى قطاعات بناء على مقدار الخبرة.

جدول (٢٨-١٤) مخطط تصميم الوحدة المنشقة مع تخصيص عشوائي للسويات العامل A إلى العناصر وقياسات متكررة على العامل B .

ترتيب المعالجة			
2	1		
A_2B_2	A_2B_1	عنصر ١	قطاع ١
A_1B_1	A_1B_2	عنصر ٢	
A_1B_1	A_1B_2	عنصر ٣	قطاع ٢
A_2B_1	A_2B_2	عنصر ٤	
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
A_1B_2	A_1B_1	عنصر $2m-1$	قطاع m
A_2B_1	A_2B_2	عنصر $2m$	

ونحتاج في هذه التجربة إلى إجراء تعشية واحدة (تخصيص العمال إلى عملية التجميع) حيث يتضمن العامل الثاني مشاهدات متكررة للعناصر عند نقطة زمنية مختلفة ولا يوجد في هذه التجربة أساساً أي اختيار للعامل الذي تجري عليه القياسات المتكررة، إذ لا يتوقع أن يؤدي العمال بكفاءة كلا من عمليتي التجميع خلال فترة الدراسة.

مثال ٣. تم تطوير تصاميم القطعة المنشقة، في الأصل للتحارب الزراعية. اعتبر تجربة لدراسة نوعين من القمح (عامل A) ونوعين من الأسمدة (عامل B) على الإنتاج، مستخدمين حقولا مختلفة كقطاعات. وفي تصميم قطاع تام عشوائي، تم تعشية كل حقل إلى أربع وحدات جزئية، ويتم تخصيص المعالجات الأربع (A_1B_1 , A_1B_2 , A_2B_1 , A_2B_2) عشوائيا إلى الوحدات الجزئية.

وتصميم القطعة المنشقة هو تصميم أكثر ملاءمة للواقع العملي هنا إذ يصعب زراعة الأنواع المختلفة من القمح في مساحات صغيرة. وفي تصميم قطعة منشقة، يتم

تقسيم كل حقل إلى جزئين، فقط، بدلا من أربعة (عادة تسمى قطعا) ويُخصص النوعان عشوائيا إلى القطعتين في كل حقل. وفي المقابل، يتم تقسيم كل قطعة من كل حقل إلى قطعتين ذات مساحات أصغر (عادة تُسمى قطعا جزئية)، ويتم تخصيص نوعي السداد عشوائيا إلى القطع الجزئية لكل قطعة.

وبين الجدول (٢٨-١٤)، أيضا، مخططا لتصميم القطعة المنشقة هذا. لاحظ أن التعمية المطلوبة هنا لتخصيص أنواع القمح إلى القطع، وتخصيص الأسمدة إلى القطع الجزئية ضمن كل قطعة — لاحظ، أيضا، أن القطع في كل حقل تقابل العناصر، والقطع الجزئية تقابل القياسات المتكررة ضمن عنصر.

تعليقات

١ - حينما يمكن للعناصر أن تتلقى جميع المعالجات في دراسة ثنائية العامل بدون تأثيرات تداخل، يكون من المفضل استخدام تصميم قياسات بقياسات متكررة على العاملين كليهما، ذلك لأنه يمكن عندئذ، في العادة، تقدير تأثيرات العوامل لكل من العاملين بدقة أكبر مما في حالة تصميم قطعة منشقة.

٢ - تكون تصميم القطعة المنشقة مفيدة في التحارب الصناعية عندما يتطلب أحد العوامل وحدات تجريبية أكبر مما يتطلبه الآخر. اعتبر، على سبيل المثال، دراسة تأثيرات مادتين من المواد المضافة (عامل A) واثنين من الحوايات (عامل B) على إطالة عمر أحد منتجات الألبان (التي لا تخفف في ثلاثيات). فمن الأسهل صنع دفعات كبيرة من منتج اللبن هنا بمادة مضافة معطاة، بينما يمكن استخدام الحوايات المختلفة لدفعات صغيرة.

٣ - يمكن النظر إلى تصميم القطعة المنشقة كنوع من تصميم قطاع غير تام مع اعتبار العناصر كقطاعات، ويُعطى كل عنصر بعضا من المجموعة الكاملة من المعالجات، فقط.

النماذج

سنعتبر نموذجين لتصميم القطعة المنشقة ثنائية العامل — أحدهما عندما تكون تأثيرات القطاع مثبتة والآخر عندما تكون هذه التأثيرات عشوائية. وسنفترض عمر

المنافسة بكاملها، أن القياسات المتكررة مأخوذة على العامل B .
تأثيرات قطاع مشته. عندما نؤسس القطاعات على خواص للعناصر مثل عمر الشخص أو حجم المحل، فينظر عادة لتأثيرات القطاع على أنها مثبتة. وسيفترض النموذج الذي سنقدمه أن كلا من تأثيرات العامل A وتأثيرات العامل B مثبتة، أيضا. وبالإضافة إلى ذلك، يفترض النموذج عدم وجود تفاعل بين القطاعات والمعالجات فيما عدا تفاعلات القطاع مع العامل A . ويُسمح غالبا بوجود هذا التفاعل الأخير للحصول، في حالة تأثيرات قطاع عشوائية، على بنية ارتباط معقولة لمشاهدات القطاع نفسه.
ولا يحتوي النموذج الذي سنقدمه الآن على تأثيرات رئيسة للعناصر، لأن العناصر نخدم كوحدة تكرار ضمن كل قطاع لتقويم تأثيرات العامل A الرئيسية. وبصورة مكافئة، يمكن القول إن تأثيرات العناصر قد اختلطت مع تأثيرات العامل A الرئيسية.

وأخيرا، نرمز لحد الخطأ بالرمز ϵ_{ijk} كالعادة، بسبب عدم وجود تكرارات كاملة في تصميم القطعة المنشقة. ولذلك يكون نموذج القطعة المنشقة مع تأثيرات قطاع مثبتة ρ_i كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\alpha\beta)_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad (28.24)$$

حيث:

μ ثابت

ρ_i ثوابت خاضعة للقيود $\sum \rho_i = 0$

α_j ثوابت خاضعة للقيود $\sum \alpha_j = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيود $\sum \beta_k = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_i (\rho\alpha)_{ij} = 0$ لكل قيم j ، والقيمة $\sum_j (\rho\alpha)_{ij} = 0$ لكل قيم i ،

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لكل قيم k و $\sum_k (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لكل قيم j .

ϵ_{ijk} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, m$ ؛ $j = 1, \dots, a$ ؛ $k = 1, \dots, b$.

ويكون للملاحظات Y_{ijk} في نموذج تصميم القطع المنشقة (28-24) الخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\alpha\beta)_{jk} \quad (28.25a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2 \quad (28.25b)$$

وفضلا عن ذلك، تتوزع جميع الملاحظات توزيعا طبيعيا، وتكون أي مشاهدتين مختلفتين مستقلتان. وهكذا تكون جميع الملاحظات مستقلة وتباينها ثابت.

تأثيرات قطاع عشوائية. عندما تكون القطاعات وحدات مثل مدارس، دفعات، أو حقول زراعية، نعتبرها عادة عينة عشوائية من مجتمع مناسب، ويُعدّل نموذج تصميم قطعة منشقة في تلك الحالة كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{(ijk)} \quad (28.26)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

ρ_i مستقلة و $N(0, \sigma_\rho^2)$

α_j ثوابت خاضعة للقيود $\sum \alpha_j = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيود $\sum \beta_k = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$ مستقلة و $N(0, \frac{a-1}{a} \sigma_{\rho\alpha}^2)$ خاضعة للقيود $\sum_j (\rho\alpha)_{ij} = 0$ لكل قيم i .

$$\sigma\{(\rho\alpha)_{ij}, (\rho\alpha)_{ij}\} = -\frac{1}{a} \sigma_{\rho\alpha}^2$$

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لكل قيم k ولقيود $\sum_j (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لجميع قيم j .

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$(\rho\alpha)_{ij}, \rho_i$ مستقلة متنى متنى.

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, a \quad k = 1, \dots, b$$

وتتصف الملاحظات Y_{ijk} لنموذج تصميم قطعة منشقة (28-26) بالخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{...} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \quad (28.27a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_\tau^2 = \sigma_\rho^2 + \frac{a-1}{a} \sigma_{\rho\alpha}^2 + \sigma^2 \quad (28.27b)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}, Y_{i'k'}\} = \sigma_\rho^2 + \frac{a-1}{a} \sigma_{\rho\alpha}^2 \quad k \neq k' \quad (28.27c)$$

$$\sigma^2(Y_{ijk}, Y_{ijl}) = \sigma_p^2 - \frac{1}{d} \sigma_{pq}^2 \quad j \neq l$$

وهكذا، يظل لجميع المشاهدات Y_{ijk} في نموذج الوحدة المنشقة (28.26) تباين ثابت. ومع ذلك، وقبل إجراء التجربة، تكون أية مشاهدين من قطاع ممطى مرتبطين الآن. وإذا كانت المشاهدتان من العنصر نفسه، فيكون ارتباطهما أكبر مما لو كانتا من عنصرين مختلفين ضمن القطاع نفسه، وهذه الخاصية ما يوررها عادة. ويفترض نموذج الوحدة المنشقة (28.26) استقلالية المشاهدات من قطاعات مختلفة.

وحالما تختار القطاعات، يفترض نموذج القطعة المنشقة (28.26) أن جميع المشاهدات مستقلة. وهكذا، فالنموذج يفترض عدم وجود تأثيرات تداخل للقياسات المتكررة إذا ما اختبرت القطاعات.

تحليل التباين والاختبارات

يحتوي الجدول (١٥-٢٨) على تحليل التباين لنموذجي الوحدة المنشقة (28.24) و (28.26) ويمكن الحصول على مجاميع المربعات ودرجات الحرية من القاعدة (٢٧-٣) مباشرة في صورتها المعدلة (27.16)، حيث لا توجد هنا تكرارات. ويصبح مجموع مربعات الباقي الموافق لحد الخطأ.

$$SSRem = SSBL.B + SSBL.AB \quad (28.28)$$

حيث $SSBL.B$ و $SSBL.AB$ معطيات بالصيغ المعروفة لدراسات ثلاثية العامل مع مشاهدة واحدة لكل خلية.

وقد أعطي في الجدول (١٦-٢٨) توقع متوسط المربعات وإحصاءة الاختبار المناسبة لكل من نموذجي الوحدة المنشقة، ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات مباشرة باستخدام القاعدة (٢٧-٤).

تحليل تأثيرات العوامل

يمضي تحليل تأثيرات العوامل بطريقة مشابهة لتلك الخاصة بدراسات متكررة مع قياسات متكررة على أحد العوامل. وعندما لا يكون التفاعل AB موجودا أو يكون غير مهم، يتضمن تحليل تأثيرات العوامل متوسطات مستويات العامل A ، وهي $\mu_{.j}$

ومتوسطات مستويات العامل B وهي $\mu_{.j}$ ، ويكون متوسط المربعات المناسب المستخدم في تقدير تباين أي متضادة مقترنة هو متوسط المربعات الموجود في مقام إحصاءة الاختبار الموافقة F^* . ونحتاج طبقاً لذلك إلى تعديل درجات الحرية في مضاعفات فترات الثقة في (28.15).

جدول (١٥-٢٨) جدول تخمين للمودجي تصميم القطعة المنشقة (28.24) و (28.26)

مصدر التغير	SS	df
قطاعات	$SSBL = ab \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$	$n - 1$
عامل A	$SSA = bn \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$	$a - 1$
تفاعلات BLA	$SSBLA = b \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2$	$(a-1)(n-1)$
عامل B	$SSB = an \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$	$(b-1)$
تفاعلات AB	$SSAB = n \sum_j \sum_i (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..})^2$	$(a-1)(b-1)$
خطأ	$SSRem = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2$	$a(b-1)(n-1)$
المجموع	$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2$	$abn - 1$

وعندما تكون تأثيرات التفاعل موجودة، فسيُبنى تحليل متوسطات المعالجات μ_{jk} على متوسطات المعالجات المقترنة \bar{Y}_{jk} ويكون متوسط المربعات المناسب، في حالة تأثيرات مثبتة للقطاع، هو $MSRem$. وعندما تكون التأثيرات عشوائية، يصبح التحليل أكثر تعقيداً، انظر، مثلاً، المرجع [28.3].

بعض التعليقات الاحتياطية

- ١ - يمكن بسهولة تطوير نماذج قطعة منشقة تتضمن، أيضاً، حد تفاعل بين القطاع والعامل B ، في حالة وجود هذه التفاعلات.
- ٢ - لقد تم تطوير، تشكيلة واسعة من تصاميم الوحدة المنشقة. ويقدم المرجعان [28.4] و [28.5] مزيداً من المعلومات حول هذه التصاميم.

جدول (١٦-٢٨) توقع متوسط المربعات وإحصائية الاختبار لنموذجي الوحدة المثقبة (28.24) و (28.26)

مصدر التغير	متوسط المربعات	نموذج (28.24)	نموذج (28.26)
قطاعات	$MSBL$	$\sigma^2 + \frac{ab}{n-1} \sum \alpha_i^2$	$\sigma^2 + ab\sigma_p^2$
عامل A	MSA	$\sigma^2 + \frac{nb}{n-1} \sum \alpha_i^2$	$\sigma^2 + b\sigma_{\alpha}^2 + \frac{nb}{(a-1)} \sum \alpha_j^2$
تفاعلات BLA	$MSBLA$	$\sigma^2 + \frac{b}{(n-1)(a-1)} \sum \sum (\alpha\beta)_j^2$	$\sigma^2 + b\sigma_{\alpha\beta}^2$
عامل B	MSB	$\sigma^2 + \frac{na}{b-1} \sum \beta_i^2$	$\sigma^2 + \frac{na}{b-1} \sum \beta_i^2$
تفاعلات AB	$MSAB$	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum \sum (\alpha\beta)_j^2$	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum \sum (\alpha\beta)_j^2$
خطأ	$MSRem$		σ^2

F^0		
اختبار	نموذج (28.24)	نموذج (28.26)
قطاعات	$MSBL/MSRem$	$MSBL/MSRem$
عامل A	$MSA/MSRem$	$MSA/MSBLA$
تفاعلات BLA	$MSBLA/MSRem$	$MSBLA/MSRem$
عامل B	$MSB/MSRem$	$MSB/MSRem$
تفاعلات AB	$MSAB/MSRem$	$MSAB/MSRem$

مراجع ورد ذكرها

- [28.1] SAS Institute Inc. *SAS/GRAPH User's Guide*. Version 6 ed. Cary, N.C.: SAS Institute, 1988.
- [28.2] *MINITAB Reference Manual, Release 7*. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.
- [28.3] Winer, B.J. *Statistical Principles in Experimental Design*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1971.
- [28.4] Steel, R.G.D., and J.H. Torrie. *principles and Procedures of Statistics*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1980.
- [28.5] Kock, G.G.; J.D. Elashoof; and I. A. Amara. "Repeated Measurements -

Design and Analysis." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*. vol. 8, ed. S.Kotz and N.L. Johnson. NewYork: John Wiley & Sons, 1988, PP. 46-73.

مسائل

(٢٨-١) من المشاكل المحتملة الخطيرة لتصاميم القياسات المتكررة تلك المتعلقة بالتأثيرات المحمولة. صف بعض الخطوات التي يمكن اتخاذها لتخفيف تلك المشكلة.

(٢٨-٢) في تصميم دراسة قياسات متكررة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على أحد العوامل، هل يهم أي العاملين اعتُمر عامل القياسات المتكررة؟ اشرح بالتفصيل.

(٢٨-٣) ضغط الدم. تُم دراسة العلاقة بين جرعة العقار التي تزيد ضغط الدم وكمية الزيادة الفعلية في متوسط ضغط الدم الانبساطي في تجربة معملية. وتم إعطاء ستة جرعات ذات مستويات مختلفة من العقار وفق ترتيب عشوائي إلى اثني عشر أربنا مع ترك فترة مناسبة بين كل جرعة وأخرى. استُخدمت الزيادة في ضغط الدم كمتغير تابع. وفيما يلي بيانات الزيادة في ضغط الدم:

الجرعة (i)							الجرعة (j)						
3.0	1.5	1.0	.5	.3	.1	أرب	3.0	1.5	1.0	.5	.3	.1	أرب
40	33	22	17	12	9	7	48	36	35	23	21	21	1
41	38	30	30	20	20	8	46	36	36	27	24	19	2
49	42	31	27	18	18	9	40	33	26	27	25	12	3
31	26	24	11	12	8	10	39	34	27	18	17	9	4
38	38	32	25	22	18	11	38	31	25	19	10	7	5
35	34	28	26	23	17	12	44	39	29	26	26	18	6

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.1) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا تستنتج حول صلاحية النموذج (28.1)؟.

ب - جهّز رسوم رواسب نقطية مصطفة لكل مستوى جرعة. هل تؤيد هذه الرسوم افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

جـ - ارسم المشاهدات Y_i لكل أرنب في هيئة الشكل (٢٨-١). هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (الأرنب) والمعالجات معقولا هنا؟

د - نفذ اختبار توكي لخاصية التجميع، مشروطا على الأرنب المختارة فعلا استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

(٢٨-٤) بالإشارة إلى مسألة ضغط الدم (٢٨-٣). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختر ما إذا كان متوسط الزيادة في ضغط الدم يختلف باختلاف مستويات الجرعة أم لا. استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

جـ - حلل تأثيرات المستويات المختلفة للجرعات بمقارنة متوسطات مستويات الجرعات المتتالية مستخدما أسلوب بونفرونو. معام ثقة عائلي 90%. اعرض نتائجك وخصصها برسم خطي مناسب.

د - كيف وجدت فعالية تصميم القياسات المتكررة هنا مستندا إلى مقياس الفعالية المقدر (24.14) وذلك بالمقارنة مع تصميم تام العشوائية؟

(٢٨-٥) بالإشارة إلى مسألتي ضغط الدم (٢٨-٣) و (٢٨-٤)

أ - طور نموذج انحدار يمثل فيه تأثيرات العناصر بالمضغرات للوشرة، $1, 1, 1, 0$. و يمثل تأثير الجرعة بحدود عطية وتريعية وتكميلية في $x = \bar{X} - X$ حيث X مستوى الجرعة. وعلى سبيل المثال، فإن القيمة لمستوى الجرعة الأول ($X = 1$) هي $0.97 = 1.07 - 1$.

ب - قم بتوفيق نموذج الانحدار للبيانات.

جـ - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. هل يبدو أن النموذج المستخدم يقدم توفيقا معقولا؟

د - إختبر ماإذا كان التأثير التكمي مطلوباً للنموذج أم لا، استعمل $\alpha = 0.05$

اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

(٦-٢٨) مبيعات الجريب فروت

درست سلسلة من الأسواق المركزية العلاقة بين مبيعات الجريب فروت والسعر المعروض به. وقد تمت دراسة ثلاثة مستويات للأسعار (١) السعر الرئيسي المنافس (٢) سعراً أعلى قليلاً من السعر الرئيس المنافس (٣) سعر أعلى بدرجة متوسطة من السعر الرئيسي المنافس. وقد اختبرت للدراسة، وبصورة عشوائية، ثمانية محلات متقاربة في حجمها. وتم جمع بيانات المبيعات لثلاث فترات، كل منها أسبوع، مع تخصيص مستويات الأسعار وفق ترتيب عشوائي لكل محل. تم إجراء التجربة خلال فترة تكون مبيعات الجريب فروت فيها عادة مستقرة، ولأن توقع وجود تأثيرات محمولة لذلك المنتج. وفيما يلي بيانات مبيعات المحلات من الجريب فروت خلال فترة الدراسة (البيانات مرمزة).

مستوى السعر (j)

محل i	1	2	3
1	62.1	61.3	60.8
2	58.2	57.9	55.1
3	51.6	49.2	46.2
4	53.7	51.5	48.3
5	61.4	58.7	56.6
6	58.5	57.2	54.3
7	46.8	43.2	41.5
8	51.2	49.8	47.9

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المكررة (28.1) وارسمها في مقابل

القيم التوفيقية. جهز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا

تستج عن صلاحية النموذج (28.1)؟

ب - جهز رسوماً نقطية مصطفة لكل مستوى سعر. هل تؤكد هذه الرسوم

افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

ج - ارسم المشاهدات y_i لكل عمل في هيئة الشكل (١-٢٨). هل يبدو

افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (المحلات) والمعالجات معقولاً هنا؟

د - نفذ اختبار توكي للتجميع، مشروطاً على المحلات المختارة فعلاً ،

استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

هـ - اكتب جدول تحليل التباين.

(٧-٢٨) بالإشارة إلى مسألة مبيعات الجريب فروت (٦-٢٨). افترض أن نموذج

القياسات المتكررة (28.1) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختر ما إذا كان متوسط مبيعات الجريب فروت يختلف لمستويات

السعر الثلاثة أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار

والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

ج - حلل تأثيرات مستويات الأسعار الثلاثة بتقدير جميع المقارنات الثنائية

لمتوسطات مستويات السعر. استخدم أكثر أساليب المقارنات المتعددة

كفاءة بمعامل ثقة عالى 95%. اكتب استنتاجاتك ولخصها برسم

خطي مناسب.

د - كيف تجد فعالية تصميم القياسات المتكررة بالمقارنة مع تصميم تام

التعشية مستنداً إلى مقياس الفعالية المقدر (24.14)؟

(٨-٢٨) بالإشارة إلى مسألة ضغط الدم (٣-٢٨). اهتم أحد المستشارين بمشروعية

افتراضات النموذج. واقترح أن يُحلل الدراسة باستخدام اختبار فريدمان.

رتب البيانات ضمن كل أرنب وقم باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = 0.01$.

اكتب البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. علق على اهتمام ذلك المستشار هنا.

(٩-٢٨) بالإشارة إلى مسألة مبيعات الجريب فروت (٦-٢٨). اقترح أنه ينبغي

استخدام اختبار فريدمان اللامعلمي هنا. رتب البيانات ضمن كل عمل وقم

باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.
 هل حصلت على الاستنتاج نفسه الذي حصلت عليه في المسألة (٧-٢٨)؟
 (١٠-٢٨) الصدق في الدعاية. عرضت إحدى منظمات البحث للمستهلك حملة
 دعايات مختلفة على 10 عناصر وطلبت منهم ترتيبها وفقا لصدق الدعاية.
 ويعبر الترتيب 1 عن الأكثر صدقا وكانت النتائج كالتالي:

إعلان (f)						إعلان (j)					
E	D	C	B	A	عصر	E	D	C	B	A	عصر
5	3	1	2	4	6	4	5	2	1	3	1
5	3	2	1	4	7	5	II	I	2	4	2
4	2	3	1	5	8	5	I	3	2	4	3
5	1	3	2	4	9	4	II	2	1	3	4
4	3	2	1	5	III	II	5	2	1	II	II

أ - هل ترى العناصر أن الدعايات الخمس متساوية في صدقها، قم باختبار فريدمان مستخدما مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

ب - استخدم أسلوب اختبار المقارنات الثنائية (25.5) لتصنيف الدعايات الخمس المختلفة وفقا لمتوسط مالموخط من صدقها. استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = 0.01$ ، الخص نتائجك.

ج - احسب معامل التوافق وفسر هذا المقياس.

(١١-٢٨) كفاءة حاسب يلوي. لاختبار أحد المنتجات الجديدة من الحاسبات اليدوية القابلة للبرمجة، قامت إحدى شركات الحاسب باختبار ستة من المهندسين المحترفين في استخدام تلك الآلة الحاسبة والنموذج السابق لها وطلبت منهم حل مسألتين باستخدام كل من الحاسبتين. كانت إحدى المسائل ذات طبيعة إحصائية والأخرى كانت مسألة هندسية. وتم تعشية ترتيب للمسائل الحاسوبية الأربع بصورة مستقلة لكل مهندس، ولوحظ طول

الوقت المطلوب لحل كل مسألة (بالدقائق). وفيما يلي النتائج (نوع المسألة هو عامل A، ونوع نموذج الحاسب هو عامل B)

$j=2$ مسألة هندسية		$j=1$ مسألة هندسية			
$k=2$	$k=1$	$k=2$	$k=1$		
نموذج سابق	نموذج جديد	نموذج سابق	نموذج جديد	مهندس i	
5.1	2.5	7.5	3.1	Jones	1
5.3	2.8	8.1	3.8	Williams	2
4.9	2.0	7.6	3.0	Adams	3
5.5	2.7	7.8	3.4	Dixon	4
5.4	2.5	6.9	3.3	Erickson	5
4.8	2.4	7.8	3.6	Maynes	6

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.10) وارسمها في

مقابل القيم الترفيقية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب،

ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.10)؟

ب - جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل معالجة. هل تؤكد هذه الرسوم

افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

ج - ارسم المشاهدات y_i لكل مهندس في هيئة الشكل (٢٨-١) مهما

الطبيعة العالمية للمعاملات. هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين

العناصر (المهندسين) والمعاملات معقولاً هنا؟

د - نفّذ اختبار توكي للتعميم، مشروطاً بالمهندسين الذين اختبروا فعلاً

. استخدم $\alpha = 0.01$ ، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي

القيمة P لهذا الاختبار؟

(٢٨-١٢) بالإشارة إلى مسألة كفاءة الحاسب اليدوي (٢٨-١١). افترض أن نموذج

القياسات المتكررة (28.10) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم متوسطات المعالجات المقترنة في هيئة الشكل (٤-٢٨) هل يبدو أن هناك تأثيرات تفاعل حاضرة.

جـ - اختر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

د - إذا رغبت في دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل من خلال المقارنات الثلاث:

$$D_1 = \mu_{12} - \mu_{11} \quad L_1 = D_2 - D_1 \\ D_2 = \mu_{22} - \mu_{21}$$

أوجد فترات ثقة لهذه المقارنات الثلاث. استخدم أسلوب بونفيروني. معامل ثقة عالي 95%. واعرض نتائجك.

هـ - اختر ما إذا كانت تأثيرات العناصر موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

(١٣-٢٨) الآم الشقيقة. دُرس عقاران تجريبيان مزيلان للألم لمعالجة الشقيقة في أحد المراكز الطبية الرئيسية. وقد تم عشوائيا اختبار عشرة من الذين يعانون من الشقيقة بصفة مستمرة للدراسة استطلاعية، وأعطى كل منهم بترتيب عشوائي كلا من العلاجات الأربعة من المعالجات، مع ترك فترتين مناسبة بين كل تركيب وآخر. وتم استخدام النقص في شدة الألم كمتغير تابع. وعُرفت المعالجات الأربع المستخدمة في الدراسة كما يلي: A_1B_1 جرعة منخفضة من كل من العقارين، A_1B_2 جرعة منخفضة من العقار A وجرعة عالية من العقار B ، A_2B_1 جرعة عالية من العقار A وجرعة منخفضة من العقار B ، A_2B_2 جرعة عالية من العقارين وفيما يلي بيانات الانخفاض في شدة الألم (الدرجة العالية معناها انخفاض أكبر في الألم)

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.12) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب -

ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.10)؟

$A_2(j=2)$		$A_1(j=1)$		شخص i
$B_2(k=2)$	$B_1(k=1)$	$B_2(k=2)$	$B_1(k=1)$	
4.3	2.7	3.4	1.6	1
6.5	4.2	5.1	2.3	2
6.0	4.6	5.3	4.2	3
9.4	7.8	8.9	7.1	4
3.9	3.4	3.7	3.5	5
7.1	6.2	6.5	5.8	6
6.2	5.4	5.6	4.9	7
7.3	6.3	7.2	6.0	8
1.7	1.3	1.4	1.2	9
3.1	3.0	3.0	2.7	10

ب - جهز رسوما مصطفة لكل معالجة. هل تدعم هذه الرسوم افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

ج - ارسم المشاهدات y_{ij} لكل شخص في هيئة الشكل (٢٨-١)، مهملاً الطبيعة العاملية للمعالجات. هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (الأشخاص) والمعالجات معقولاً هنا؟

د - نفذ اختبار توكي للتحميم، مشروطاً بالعناصر المختارة فعلاً، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

(٢٨-١٤) بالإشارة إلى مسألة آلام الشقيقة (٢٨-١٣). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (10-28) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم متوسطات المعالجات المقترنة في هيئة الشكل (٢٨-٤). هل يبدو أن هناك تأثيرات تفاعل حاضرة؟

جـ - اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب

البدايل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟

د - اختبر بصورة منفصلة ما إذا كانت التأثيرات الرئيسية للعامل A ،

وللعامل B موجودة، استخدم $\alpha = 0.05$ لكل اختبار. اكتب البدايل،

قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

هـ - قسّر المقارنات التالية باستخدام فترات الثقة.

$$D_1 = \mu_{21} - \mu_{11} \quad D_3 = \mu_{21} - \mu_{12}$$

$$D_2 = \mu_{12} - \mu_{11} \quad D_4 = \mu_{22} - \mu_{11}$$

استخدم طريقة بونفيروني معاملات ثقة عائلية 0.95. لخص نتائجك.

(١٥-٢٨) الحوافز التشجيعية بالإشارة إلى المثال في الفقرة (٤-٢٨) حول تأثيرات

نوعين من الحوافز (عامل A) على قدرة الشخص لحل نوعين من المشاكل

(عامل B)، تم توضيح تصميم القياسات المتكررة في الجدول (١٠-٢٨)

وقد اختبر اثني عشر شخصا بصورة عشوائية، وتم تخصيصهم إلى

بمجموعتي الحوافز. وبعد ذلك تمت تعشية ترتيب نوعي المشاكل بصورة مستقلة

لكل شخص. وفيما يلي درجة القدرة على حل مشكلة (الدرجة الأعلى

تعني قدرة أعظم على حل المشاكل).

نوع المشكلة		عنصر	حافز تشجيعي
محسوسة ($k=2$)	بمجرد ($k=1$)		
18	10	$i=1$	$j=1$
19	14	$i=2$	
18	17	$i=3$	
12	8	$i=4$	
14	12	$i=5$	
20	15	$i=6$	
25	16	$i=1$	$j=1$
22	19	$i=2$	
27	22	$i=3$	
23	20	$i=4$	
29	24	$i=5$	
22	21	$i=6$	

١ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.16) وارسمها في

مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب.

ما هو استنتاجك حول صلاحية النموذج (28.16)؟

ب - ارسم درجات القدرة على حل مشكلة لكل حافز تشجيعي، ونوع

المشكلة، وذلك في هيئة الشكل (٢٨-٥). ما هو استنتاجك حول

صلاحية النموذج (28.16) ؟ ناقش.

(٢٨-١٦) بالإشارة إلى مسألة الحوافز التشجيعية (٢٨-١٥). افترض أن نموذج

القياسات المتكررة (28.16) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم متوسطات المعالجات المقترنة في هيئة الشكل (٢٨-٤). هل

يبدو أن هناك تأثيرات للتفاعل؟ هل التأثيرات الرئيسة موجودة؟

ج - اختر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا. استخدم $\alpha = 0.05$ ، اكتب

البدايل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة P لهذا الاختبار؟

د - اختر بصورة منفصلة ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A

والعامل B موجودة أم لا. استخدم $\alpha = 0.05$ لكل اختبار. اكتب

البدايل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P لكل

اختبار؟

هـ - المقارنات التالية هي مقارنات موضع الاهتمام:

$$D_1 = \mu_{2.} - \mu_{1.} \quad D_2 = \mu_{.2} - \mu_{.1}$$

قدّر هذه المقارنات باستخدام قوات الثقة. استخدم طريقة يونغفروني

بمعامل ثقة عائلي 90% - اعرض نتائجك.

(٢٨-١٧) عروض المحلات التجارية. تمّ إجراء دراسة تجريبية لاختبار تأثير طريقتين

مختلفتين من طرق العرض في المحلات لمنتج (عامل A) على المبيعات في أربع

فترات زمنية متتالية (عامل B). وتمّ اختبار ثمانية محلات عشوائية،

وخصّص أربعة منها عشوائياً لكل طريقة عرض.

فيما يلي بيانات المبيعات (مرمّزة):

الفترة الزمنية

نوع العرض	المحل	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$i=1$	$i=1$	956	953	938	1,049
	$i=2$	1,008	1,032	1,025	1,123
	$i=3$	350	352	338	438
	$i=4$	412	449	385	532
$i=2$	$i=1$	769	766	739	859
	$i=2$	880	875	860	915
	$i=3$	176	185	168	280
	$i=4$	209	223	217	301

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.16) وارسمها في

مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب.

ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.16)؟

ب - ارسم بيانات المبيعات لكل طريقة عرض وفترة زمنية وذلك في هيئة

الشكل (٥-٢٨). ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.16)؟ ناقش.

(١٨-٢٨) بالإشارة إلى مسألة عرض المحلات التجارية (١٧-٢٨). يرغب المحرّب في

المزيد من الاستطلاع عن صلاحية نموذج القياسات المتكررة (28.16).

أ - نفذ اختباراً رسمياً لثبات تباين ما بين العناصر σ_m^2 . استخدم (28.22)

ونفذ اختبار هارتلي مع $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب - حلل مجموع المربعات الباقي $SSB(A)$ إلى مركبات مستخدماً

(28.23). نفذ اختبار هارتلي لثبات تباين الخطأ σ_m^2 للمستويات

المختلفة للعامل A ، استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار،

والنتيجة.

(١٩-٢٨) بالإشارة إلى مسألة عرض المحلات التجارية (١٧-٢٨). افترض أن نموذج

القياسات المتكررة (28.16) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم المتوسطات المقدرة للمعالجات في هيئة الشكل (٤-٢٨). هل

- يبدو أن هناك تأثيرات تفاعل موجودة؟ تأثيرات رئيسة موجودة؟
- جـ - اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا استخدم $\alpha = 0.025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P - لهذا الاختبار؟
- د - اختبر بصورة منفصلة ما إذا كانت التأثيرات الرئيسية للعرض والزمن موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.025$. اكتب لكل اختبار، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار، ماهي القيمة P - لكل اختبار؟
- هـ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسية للعامل A وللعامل B قَدِّر المقارنات
- الثانية التالية:

$$\begin{aligned} D_1 &= \mu_{11} - \mu_{21} & D_3 &= \mu_{22} - \mu_{32} \\ D_2 &= \mu_{12} - \mu_{22} & D_4 &= \mu_{32} - \mu_{42} \end{aligned}$$

- استخدم طريقة بونفيروني، معامل ثقة عائلي 90%، اعرض نتائجك.
- (٢٨-٢٠) إنتاجية القمح. بالإشارة إلى مثال ٣ في صفحة عن تأثيرات نوعين مختلفين من القمح (عامل A) ونوعين من الأسمدة (عامل B) على الإنتاجية. فيما يلي بيانات الإنتاجية لخمس حقول (قطاعات) تم اختيارها عشوائياً.

السماذ		نوع القمح	الحقل
$k = 2$	$k = 1$		
48	43	$j = 1$	$i = 1$
70	63	$j = 2$	
43	40	$j = 1$	$i = 2$
53	52	$j = 2$	
36	31	$j = 1$	$i = 3$
48	45	$j = 2$	
30	27	$j = 1$	$i = 4$
51	47	$j = 2$	
39	36	$j = 1$	$i = 5$
57	54	$j = 2$	

أ - احسب الرواسب لنموذج القطعة المنشقة (18.26) وارسمها في مقابل

القيم التوفيقية، جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب.

ماهو استنتاجك عن صلاحية النموذج (28.26)؟

ب - ارسم الإنتاجية لكل نوع قمح ونوع سماد في هيئة الشكل (٢٨-٥).

ماذا نستنتج حول صلاحية النموذج (28.26). ناقش.

(٢٨-٢١) بالإشارة إلى مسألة إنتاج القمح (٢٨-٢٠). افترض أن نموذج القطعة

المنشقة (28.26) مناسب.

أ - اكتب حلول تحليل التباين.

ب - ارسم المتوسطات المقدرة للمعالجات في هيئة الشكل (٢٨-٤). هل يبدو

أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة موجودة؟

ج - اختر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب

البدايل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة P - للاختبار؟

د - اختر بصورة منفصلة ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A ، وللعامل

B ، موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$ ، اكتب البدايل، قاعدة القرار

والنتيجة لكل اختبار، ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

هـ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعامل A ، وللعامل B ، قُدِّر المقارنات

الثنائية التالية:

$$D_2 = \mu_{.1} - \mu_{.2} \quad D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.}$$

استخدم طريقة يونغروني. معامل ثقة عاظمي 90%. أعرض نتائجك.

تمارين

(٢٢-٢٨) استنبط المركبات التي يُفكَّك إليها مجموع المربعات الكلي في (28.5).

(٢٢-٢٨) بالإشارة إلى نموذج القياسات المتكررة (28.18).

أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعدلة (27.16) للحصول

على صيغ بمصاميع للمربعات التعريفية في الجدول (٢٨-٨) ب

ودرجات الحرية للمصاحبة لها في الجدول (٢٨-٨).

ب - استخدم القاعدة (٤-٢٧) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٨-٢٨)أ.

(٢٤-٢٨) بالإشارة إلى نموذج القياسات المتكررة (28.16)

أ - استخدم القاعدة (٣-٢٧) في صورتها المعدلة (27.16) للحصول على صيغ بمجاميع المربعات التعريفية في الجدول (١١-٢٨). ودرجات الحرية للمصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٤-٢٧) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (١٢-٢٨).

(٢٥-٢٨) بالإشارة إلى نموذج القطعة المنشقة (28.26)

أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعدلة (27.16) للحصول على صيغ بمجاميع المربعات التعريفية في الجدول (١٥-٢٨) ودرجات الحرية للمصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٤-٢٧) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (١٦-٢٨).

مشاريع

(٢٦-٢٨) بالإشارة إلى مسألة ضغط الدم (٣-٢٨). اكتب المصفوفة المقترنة لتباين - تباين ما ضمن العناصر مستخدما (28.8). هل تبدو التباينات والتغايرات المقدمة من المرتبة نفسها في الكمر؟ هل يبدو افتراض التناظر المركب معقولاً؟

(٢٧-٢٨) بالإشارة إلى مسألة ميحات الجيوب فروت (٦-٢٨) اكتب المصفوفة المقترنة لتباين - تباين ما ضمن العناصر مستخدما (28.8). هل تبدو التباينات والتغايرات من المرتبة نفسها في الكمر؟ هل يبدو افتراض التناظر المركب معقولاً؟

(٢٨-٢٨) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير عقار. اعتم الجزء I فقط، من

الدراسة والوحدة المشاهدة 1 لكل مستوى جرعة عقار، أي خذ، فقط، المشاهدات التي يكون فيها المتغير 2 مساويا 1 والمتغير 6، مساويا 1. اعتبر الـ 12 فأرا كعناصر، وتجاهل تصنيف الفتران إلى ثلاث مجموعات ابتدائية وفقا لمعدل ضغطها للذراع الرافعة، افترض أن للعناصر (الفتران) تأثيرات عشوائية وللمعالجات (مستويات الجرعة) تأثيرات مثبتة.

أ - اكتب النموذج التجميعي للقياسات المتكررة لهذه الدراسة.

ب - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا تستنتج حول صلاحية النموذج المستخدم؟

ج - ارسم الاستجابات لكل فأر في هيئة الشكل (٢٨-١). هل يبدو

افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر والمعالجات مناسب؟

(٢٨-٢٩) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير عقار في المشروع (٢٨-٢٨).

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختر ما إذا كان مستوى جرعة العقار يؤثر على معدل ضغط ذراع الرافعة أم لا، استخدم $\alpha = 0.05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار،

والنتيجة - ماهي القيمة P لهذا الاعتبار؟

ج - حلل تأثيرات مستويات الجرعات الأربع بمقارنة متوسطات الاستجابة

لكل زوج من مستويات الجرعة المتتالية، استخدم طريقة بونفرون

بمعامل ثقة عالمي 90%. اكتب نتائجك.

د - قم بتوفيق نموذج الانحدار مثل فيه تأثيرات العناصر بمغفرت مؤشرة 0.1، 1

ومثل فيه تأثير الجرعة بمحدود خطية وتربيعية في $\bar{X} - X = x$ حيث X

مستوى الجرعة. افترض أنه لا يوجد تفاعل بين العناصر والمعالجات.

هـ - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية، هل يبدو أن

نموذج الانحدار يقدم توفيقا جيدا . ناقش.

و - اختر ما إذا كان يمكن إسقاط الحد التربيعي من نموذج الانحدار أم لا،

استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٨-٣٠) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير عقار. اعتبر الدراسة المركبة. افترض أن العناصر (الفقران) ووحدات الملاحظة لها تأثيرات عشوائية وأن العامل A (المعدل الابتدائي لضغط ذراع الرافعة) وللعامل B (مستوى الجرعة)، وللعامل C (جدول الدعم) تأثيرات مثبتة. افترض، أيضاً، عدم وجود تفاعل بين العناصر والمعالجات.

أ - استخدم القاعدة (٢٧-١) في صورتها المعدلة (١٥-٢٧) لتطوير نموذج لهذه التجربة.

ب - استخدم القاعدة (٢٧-٣) في صورتها المعدلة (١٦-٢٧) للحصول على صيغ لمجموع المربعات التعريفية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ج - استخدم قاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات.

(٢٨-٣١) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير عقار والمشروع (٢٨-٣٠). احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب ماذا تستنتج حول صلاحية النموذج؟

(٢٨-٣٢) بالإشارة إلى مجموعة بيانات تجربة تأثير عقار والمشاريع (٢٨-٣٠)، و (٢٨-٣١) افترض أن النموذج في المشروع (٢٨-٣٠) مناسب. أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختر ما إذا كانت التفاعلات ABC موجودة أم لا، استخدم $\alpha = 0.01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة P للاختبار؟

ج - لكل جدول دعم، ارسم المتوسطات المقترنة للمعالجات في مقابل مستوى الجرعة بمنحنيات مختلفة لكل من مجموعات المعدل الابتدائي لضغط ذراع الرافعة، وذلك في هيئة الشكل (٢٢-٦). افحص رسومك لطبيعة تأثيرات التفاعل واعرض نتائجك.

(٢٨-٣٣) اعتبر دراسة تصميم القياسات المتكررة مع $n=3$ و $r=3$ حيث يرتب كل

عنصر جميع المعالجات (غير مسموح بتبادل القيم المشاهدة).

أ - طوّر توزيع المعاينة المضبوط χ^2_r عندما تكون H_0 (تلميح: لجميع

تباديل رتب عنصر فرصا متساوية تحت H_0 ونفترض أن جميع

العناصر تتصرف بصورة مستقلة).

ب - قارن المئين التسعين لتوزيع المعاينة المضبوط الذي حصلت عليه في

الجزء (أ) مع (2; 90). χ^2 ؟ ماذا تستتج من هذه المقارنة ؟

المربع اللاتيني والتصاميم ذات الصلة

نعتبر في هذا الفصل تصاميم المربع اللاتيني، التي تستخدم متفوري بجميع في قطاعات وذلك لتخفيف الأخطاء التجريبية، كما نعتبر بعض التصاميم ذات الصلة بالمربع اللاتيني.

(٢٩ - ١) عناصر رئيسة

تصاميم قطاع تام وغير تام

رأينا في الفقرة ٢٥ - ٦ أنه يمكننا في تصاميم القطاع العشوائي التام أن نستخدم متفوري بجميع في قطاعات في آن واحد، وذلك كي نحذف من الخطأ التجريبي التشتت المصاحب لكل من متفوري التجميع. وهكذا يمكن أن يكون متفورا التجميع عمر شخص ودخله، وعندئذ يتضمن القطاع أشخاصا من عمر معين وشريجة دخل معينة. ومن عيوب الاستخدام الكامل لمتفوري بجميع في تصميم القطاع التام أنه يمكن أن يتطلب أحيانا العديد جدا من الوحدات التجريبية. وعلى سبيل المثال، إذا كان لكل من متفوري العمر والدخل في توضيحنا السابق ستة فصول، فيكون هناك 36 قطاعا مطلوبا. وإذا كان المطلوب دراسة ستة معالجات، فإننا نحتاج إلى 216 شخصا للتجربة وقد لاتسمح اعتبارات التكلفة باستخدام هذا العدد من الوحدات التجريبية، ومع ذلك، فقد تتطلب اعتبارات الدقة ومدى الصلاحية الاستخدام الآني لمتفوري بجميع في قطاعات، لكل منهما ستة فصول، وذلك بغية تخفيض الخطأ التجريبي تخفيضا كافيا، ويكون لدينا تنوع معقول من الوحدات التجريبية وفي مثل هذه الحالة، قد

يكون تصميم قطاع غير تام مفيداً . وفي تصميم كهذا، لا يزال من الممكن استخدام القطاعات الـ 36 في مثالنا، ولكن لا يحتوي كل قطاع الآن المعالجات الست جميعها.

تصاميم المربع اللاتيني

بدفع تصاميم القطاع غير التام، في مثالنا إلى حدودها القصوى، مستخدمين 36 قطاعاً، يكون عدد الوحدات التجريبية أقل مما يمكن إذا استعملنا معالجة واحدة، فقط، في كل قطاع. وتصميم المربع اللاتيني هو التصميم المناسب في هذه الحالة المتطرفة التي يتضمن فيها كل قطاع معالجة واحدة، فقط. ويقدم الجدول (٢٩-١) توضيحاً للفرق بين تصاميم القطاع التام وغير التام للمثال المعطى. ويبين العمود 1 تصميم القطاع التام في هذه الحالة، بينما يوضح العمودان 2 و 3 تصاميم قطاع غير تام بثلاث معالجات ومعالجة واحدة في كل قطاع، على الترتيب.

وإلى جانب التوفر، هناك سبب آخر لاستخدام تصميم مربع لاتيني بمعالجة واحدة، فقط، في كل قطاع. إذ لا يمكن لقطاع في بعض الأحيان، أن يتضمن أكثر من معالجة واحدة. فتأمل تصميم القياسات المتكررة الذي نوقش في الفقرة ٢٨ - ٢ حيث يتلقى كل عنصر جميع المعالجات. وقد أكدنا هناك على تعشية ترتيب المعالجات في حالة وجود تأثيرات تداخل بين المعالجات المختلفة. وفي الحقيقة إذ توقعنا أن تأثيرات التداخل ناجمة عن الترتيب الذي اتخذ تطبيق المعالجة، فقد يكون من المستحسن استخدام الموضع الزيتي كمتغير آخر للتجميع في قطاعات. وهكذا يصبح «المتغير» متغير تجميع في قطاعات و«الموضع الزيتي» المتغير الآخر للتجميع في قطاعات. وتُعرف القطاعات عندئذٍ كمايلي في دراسة تتضمن ست معالجات:

قطاع 1: العنصر (1)، الوضع (1)

قطاع 2: العنصر (2)، الوضع (2)

·
·
·
·

قطاع 6: العنصر (6)، الوضع (6)

قطاع 7: العنصر (7)، الوضع (7)

لُح لُح

لاحظ أن القطاعات معرفة بحيث يمكنها أن تحتوي معالجة واحدة، فقط، باعتبار أن الموضوع الترتيبي يشير إلى مكان لمعالجة واحدة في متتابعة من المعالجات المطبقة على عنصر.

وصف تصاميم المربع اللاتيني

لنرمز بـ A, B, C لثلاث معالجات، ومن المتعارف عليه استخدام الحروف اللاتينية كرموز للمعالجات في تصميم المربع اللاتيني. لنفرض أن اليوم من أيام الأسبوع (الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء) قد استخدمت كمتغيري تجميع. والعامل (3, 2, 1) قد استخدمت كمتغيري تجميع في قطاعات، فمن الممكن عندئذ أن يكون تصميم المربع اللاتيني كما هو مبين فيما يلي:

اليوم	العامل		
	1	2	3
الاثنين	B	A	C
الثلاثاء	A	C	B
الأربعاء	C	B	A

فينفذ العامل 1 المعالجة B يوم الاثنين والمعالجة A يوم الثلاثاء والمعالجة C يوم الأربعاء، وهكذا للعمال الآخرين. لاحظ أن كل عامل ينفذ كل معالجة وأن جميع المعالجات تنفذ في كل يوم.

وهكذا يتسم تصميم المربع اللاتيني بالسماوات التالية:

١ - يوجد r من المعالجات.

٢ - هناك متغير تجميع في قطاعات ولكل منهما r من الفصول.

٣ - يحتوي كل صف وكل عمود في مربع التصميم جميع المعالجات، أي يمثل كل فصل من فصول متغير تجميع تكررًا.

مميزات ومساوئ تصميم المربع اللاتيني

تشمل مميزات تصميم المربع اللاتيني:

- ١ - غالباً ما يسمح استخدام متغيري جميع في قطاعات بتخفيض في تشتت الأخطاء التحريية أكثر من التخفيض الذي يحققه استخدام أي من المتغيرين على حدة.
- ٢ - يمكن دراسة تأثيرات المعالجات من تجارب على نطاق ضيق. ويكون هذا مفيداً على وجه الخصوص في الدراسات التمهيدية والاستطلاعية.
- ٣ - في تجارب القياسات المتكررة، من المفيد غالباً أخذ تأثير ترتيب المعالجة في الاعتبار، وذلك باستخدام تصميم المربع اللاتيني.

ومن مساوئ تصميم المربع اللاتيني

- ١ - يجب أن يتساوى عدد فصول متغير التجميع مع عدد المعالجات. مما يؤدي إلى عدد صغير جداً من درجات الحرية المصاحبة للخطأ التحريي عندما تقتصر الدراسة على عدد قليل من المعالجات.
- ٢ - تذخر افتراضات النموذج بالقيود (عدم وجود تفاعل بين أي من متغيري التجميع في قطاعات وبين المعالجات وأيضاً، عدم وجود تفاعل بين متغيري التجميع).
- ٣ - لا يمكن أن يكون لمتغيري التجميع عدد مختلف من الفصول.
- ٤ - التعشية المطلوبة هي إلى حد ما أكثر تعقيداً هنا مما هي في التصاميم التي ناقشناها سابقاً .

وبسبب محدودية عدد درجات حرية الخطأ التحريي، نادراً ما تستخدم المربعات اللاتينية عند دراسة أكثر من ثمانية معالجات. وللسبب نفسه نحتاج عادة إلى تكرارات إضافية عند استخدام تصميم المربع اللاتيني بعدد قليل من المعالجات، مثلاً ، أربع معالجات أو أقل.

التعشية في تصميم مربع لاتيني

يوجد أكثر من مربع لاتيني لأي عدد معطى من المعالجات. افترض أن عدد المعالجات $r = 3$ ، فهناك أربعة تصاميم مربع لاتيني (حللنا عناوين متغيري التجميع في صف وعمود).

4			3			2			1		
C	B	A	B	A	C	A	C	B	A	B	C
A	C	B	C	B	A	B	A	C	B	C	A
B	A	C	A	C	B	C	B	A	C	A	B

ومن أجل $r=3$ يوجد 12 من الترتيبات المختلفة الممكنة. يزداد هذا العدد عندما يزيد عدد المعالجات، فمن أجل $r=50$ هناك 161280 ترتيباً ممكناً.

وهدف التعشية هو اختيار واحد من بين جميع المربعات اللاتينية الممكنة للعدد المعطى من المعالجات r ، بحيث يكون لكل مربع منها الاحتمال نفسه في أن يكون المربع الذي وقع عليه الاختيار.

ومن الواضح أنه من غير الممكن بصورة عامة، إعداد قائمة بجميع المربعات اللاتينية الممكنة بحيث نستطيع اختيار أحدها عشوائياً .

وبدلاً من ذلك نستخدم المربعات اللاتينية القياسية، وهي مربعات لاتينية رتب فيها عناصر الصف الأول، وعناصر العمود الأول ترتيباً أبجدياً . والمربع اللاتيني 1 من المربعات المذكورة سابقاً هو مربع قياسي. ويحتوي الجدول A.13 جميع المربعات اللاتينية القياسية من أجل $r=3, 4$ ومربع لاتيني قياسي واحد مختار من أجل $r=5, 6, 7, 8, 9$. وطريقة التعشية المستخدمة عادة هي كمايلي:

١ - من أجل $r=3$ ، رتب الصفوف ترتيباً عشوائياً وبصورة مستقلة رتب الأعمدة ترتيباً عشوائياً .

٢ - من أجل $r=4$ ، اختر أحد المربعات القياسية عشوائياً ، وبصورة مستقلة رتب كلا من الصفوف والأعمدة عشوائياً .

٣ - من أجل r تساوي 5 فأكثر، رتب بصورة مستقلة كلا من الصفوف والأعمدة والمعالجات للمربع القياسي المعطى.

ويمكن تبين أن هذه الطريقة تختار عشوائياً أحد المربعات الممكنة في حالة $r=3$ و $r=4$. ومن أجل r يساوي 5 فأكثر لا تستند هذه الطريقة في التعشية على كافة المربعات اللاتينية الممكنة بل، في الأصح، على مجموعات جزئية منها كبيرة جداً .

مثال ١. في توضيحنا السابق، كان متغيرا التجميع اليوم (الاثنين الثلاثاء، الأربعاء) والعامل (1, 2, 3). وهكذا يمكن أن نبيّن حدود المربع كمايلي:

اليوم	العامل		
	1	2	3
الاثنين			
الثلاثاء			
الأربعاء			

والمربع اللاتيني القياسي في حالة $r=3$ هو:

A	B	C	خطوة 1
B	C	A	
C	A	B	

ونحصل الآن على متبادلة عشوائية لـ 3 أشياء نعيد وفقا لها ترتيب الصفوف. وكما شرحنا في الفصل ٢، يمكن القيام بذلك بالحصول على عدد عشوائي من رقمين من مولد أو جدول للأرقام العشوائية، ونستخدم أعدادا من رقمين لتقليل فرص الحصول على العدد نفسه، افترض أن الأعداد الثلاثة ذات الرقمين كانت كمايلي:

ترتيب العدد	1	2	3
العدد العشوائي	87	34	63

نعيد الآن ترتيب الأعداد العشوائية تصاعديا محتفظين معها بترتبة العدد الأصلية،

فنجد:

العدد العشوائي	34	63	87
ترتيب العدد	2	3	1

وهكذا نحصل على المتبادلة العشوائية 1, 3, 2.

ووفقا لهذه المتبادلة يأتي الصف 2 في المربع القياسي أولا والصف 3 ثانيا

والصف 1 ثالثا . وبذلك نجد:

الرقم الأصلي للمصف

2	B	C	A
3	C	A	B
1	A	B	C

خطوة 2

ونحصل الآن بصورة مستقلة على متبادلة عشوائية أخرى لثلاثة أشياء، ونعيد وفقا لها ترتيب الأعمدة. افترض أنها كانت 2,1,3 فالعمود 2 في مربع الخطوة ٢ يصبح الآن العمود الأول وهكذا وبالتالي نجد:

رقم العمود في الخطوة الثانية	2	1	3
	C	B	A
	A	C	B
	B	A	C

خطوة 3

وهكذا يكون التصميم المختار:

	العامل		
اليوم	1	2	3
الاثنين	C	B	A
الثلاثاء	A	C	B
الأربعاء	B	A	C

مثال ٢. نعتبر تجربة حول تأثير خمسة أنواع مختلفة من الموسيقى الخلفية (A, B, C, D, E) على إنتاجية صرافى بنك. يُعزف نوع معين من الموسيقى لمدة يوم وتسجل الإنتاجية. ومتغيرا التحميم في قطاعات هما يوم الأسبوع وأسبوع الفترة التجريبية. وحدود تصميم المربع اللاتيني هي إذن:

الأيام					الأسبوع
M	T	W	Th	F	
					1
					2
					3
					4
					5
					6

نبدأ بالمربع اللاتيني القياسي من الجدول A.13 الخاص بالحالة $r=5$:

A	B	C	D	E
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
D	E	B	A	C
E	C	D	B	A

خطوة 1

بعد ذلك نبدل الصفوف عشوائيا مستخدمين متبادلة عشوائية لـ 5، ولنقل

4,2,3,1,5. وعندئذٍ نحصل على المربع:

D	E	B	A	C
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
A	E	C	D	E
E	C	D	B	A

خطوة 2

والآن نبدل الأعمدة عشوائيا مستخدمين متبادلة عشوائية مستقلة لـ 5، مثلاً،

2,4,1,5,3. فنجد:

E	A	D	C	B
A	C	B	D	E
D	E	C	B	A
B	D	A	E	C
C	E	E	A	D

خطوة 3

وفي النهاية، نحتاج إلى تبديل رموز المعالجات عشوائيا، لاحظ أن ترميز المعالجات

بالحروف A, B, C, D, E تبقى كما هي. ونرغب ببساطة في تعشية الخلايا التي تظهر

فيها المعالجات المحددة علماً أن المربع الآن هو ماحصلنا عليه في الخطوة 3. لنعتمد

التقابل:

1	2	3	4	5
A	B	C	D	E

ولنفترض أن اختاراً عشوائيا مستقلاً لمتبادلة من 5 أنتج 3,5,2,1,4 فتعديلاً نجد:

A	B	C	D	E	الرموز الحالية في الخلايا
C	E	B	A	D	الرموز الجديدة في الخلايا

أي أن كل عتلية تتضمن A في الخطوة ٣ تتضمن الآن C وهكذا. وبذلك يصبح تصميم المربع الذي سنستخدمه كما يلي:

السم					
M	T	W	Th	F	الأسبوع
D	C	A	B	E	1
C	B	E	A	D	2
A	D	B	E	C	3
E	A	C	D	B	4
B	E	D	C	A	5

ملاحظة

من أجل $r=3$ و $r=4$ ، يكفي تعشية الصفوف الـ r جميعها، والأعمدة الـ $r-1$ الأخيرة. وتعشية جميع الصفوف وجميع الأعمدة كما تقترح الطريقة المذكورة هنا هي في مستوى الجودة نفسه.

مثال

ذكرنا فيما سبق تجربة حول تأثيرات أنواع مختلفة من الخلفية الموسيقية على إنتاجية صراي بنك. وقد عُرِفَت المعالجات على أنها توليفة من سرعات مختلفة للعرزف (بطيئة - متوسطة - عالية) ونوع الموسيقى (آلات وأصوات، آلات فقط). وقد تم تحديد التقابل بين المعالجات والحروف اللاتينية كما يلي:

المعالجة	الحرف اللاتيني المقابل	سرعة ونوع الموسيقى
1	A	بطيئة، آلة وصوت
2	B	متوسط، آلة وصوت
3	C	عالية، آلة وصوت
4	D	متوسط، آلة فقط
5	E	عالية، آلة فقط

ويحتوي الجدول (٢-٢٩) نتائج هذه التجربة. والمعالجة في كل خلية مبنية بين قوسين. ونلاحظ في هذه الدراسة أن الوحدة التحريبية هي يوم عمل لطاغم الصرافين في بنك. وأن بيانات الانتاجية تتعلق بإنتاج الطاقم بكامله. لرمز Y_{ijk} للملاحظة في الخلية المعرفة بالفصل i لتغير التجميع في صفوف والفصل j لتغير التجميع في أعمدة. ويشير الدليل k إلى المعالجة المخصصة لهذه الخلية في المربع اللاتيني المستخدم وهكذا فإن $Y_{123} = 17$ هي الانتاجية في يوم الثلاثاء من الأسبوع الأول، ويشير الجدول (٢-٢٩) إلى أن نوع الموسيقى في ذلك اليوم كان C .

جدول (٢-٢٩) دراسة موسيقى خلفية في تصميم مربع لاتيني - نتائج التجربة (إنتاجية الطاقم - البيانات مرمزة)

الأسبوع	اليوم					المجموع
	M	T	W	Th	F	
1	18(D)	17(C)	14(A)	21(B)	17(E)	$Y_1 = 87$
2	13(C)	34(B)	16(E)	15(D)	15(D)	$Y_2 = 99$
3	7(A)	29(D)	32(B)	13(C)	13(C)	$Y_3 = 108$
4	17(E)	13(A)	24(C)	25(B)	25(B)	$Y_4 = 110$
5	21(B)	26(E)	26(D)	7(A)	7(A)	$Y_5 = 111$
المجموع	$Y_{.1} = 76$	$Y_{.2} = 119$	$Y_{.3} = 117$	$Y_{.4} = 126$	$Y_{.5} = 77$	$Y_{...} = 515$
	$Y_{.1} = 7 + 13 + 14 + 16 + 7 = 57$				$\bar{Y}_{.1} = 11.4$	
	$Y_{.2} = 21 + 34 + 32 + 21 + 25 = 133$				$\bar{Y}_{.2} = 26.6$	
	$Y_{.3} = 13 + 17 + 24 + 31 + 13 = 98$				$\bar{Y}_{.3} = 19.6$	
	$Y_{.4} = 18 + 29 + 26 + 31 + 15 = 119$				$\bar{Y}_{.4} = 23.8$	
	$Y_{.5} = 17 + 26 + 21 + 27 + 17 = 108$				$\bar{Y}_{.5} = 21.6$	

الدليل k في Y_{ijk} لتصميم مربع لاتيني هو في الحقيقة نافلة لالزوم لها لأن الصف والعمود في رمز الخلية (i, j) يحدد المعالجة في المربع اللاتيني المستخدم. ومع ذلك نستمر في استخدام الأدلة الثلاثة تسهيلا للتعرف على هوية الخلية. سنحلل نتائج هذه الدراسة في الفقرات التالية.

(٢-٢٩) نموذج المربع اللاتيني

يتضمن نموذج تصميم المربع اللاتيني التأثير الرئيس لمتغير التجميع في صفوف ونرمز له بـ ρ_i ، التأثير الرئيس لمتغير التجميع في أعمدة، ونرمز له بـ κ_j ، والتأثير الرئيس للمعالجة ونرمز له بـ τ_k . ونفترض عدم وجود تفاعلات بين هذه المتغيرات الثلاثة. وهكذا يكون النموذج المستخدم نموذجاً تجميعياً. وهو في حالة تأثيرات مثبتة للمعالجات والصفوف والأعمدة:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + e_{(ijk)} \quad (29.1)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

$$\sum \rho_i = \sum \kappa_j = \sum \tau_k = 0 \text{ ثوابت خاضعة للقيود}$$

$e_{(ijk)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$.

$$k = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, m$$

لاحظ من جديد أن عدد الصفوف من أجل كل من متغيري التجميع يساوي عدد الصفوف من أجل للمعالجات، وأن العدد الكلي للمعالجات m . ولاحظ، أيضاً، أن الرمز لحد الخطأ هو $e_{(ijk)}$ ، لأنه لا توجد تكرارات في خلايا تصميم المربع اللاتيني.

تعليقات

١ - ننظر أحيانا إلى تأثيرات أحد متغيري التجميع أو تأثيراتهما معا على أنها عشوائية، كما في الحالة عندما يشير متغير التجميع إلى عناصر، مراقبين، آلات، إلخ. وسنناقش في الفقرة (١١-٢٩) حالة تأثيرات عشوائية لمتغيري التجميع.

٢ - إذا كانت تأثيرات المعالجات عشوائية، فالتغير الوحيد في النموذج (29.1) هو أن نعتبر τ_k كمثيرات مستقلة فيما بينها و $N(0, \sigma^2)$. ومستقلة عن $e_{(ijk)}$.

(٣-٢٩) تحليل تباين واختبارات

رموز

سنستخدم الرموز المعتادة لمجموع ومتوسطات الصفوف، والأعمدة، والمعالجات:

$$Y_i = \sum_j Y_{ij} \quad \bar{Y}_i = \frac{Y_{i.}}{r} \quad (29.2a)$$

$$Y_j = \sum_i Y_{ij} \quad \bar{Y}_j = \frac{Y_{.j}}{r} \quad (29.2b)$$

$$Y_k = \sum_{i,j} Y_{ijk} \quad \bar{Y}_k = \frac{Y_{...k}}{r} \quad (29.2c)$$

ونرمز للمجموع الإجمالي والمتوسط الإجمالي كالمتعاد بالرموز:

$$Y = \sum_i \sum_j Y_{ij} \quad \bar{Y} = \frac{Y}{r^2} \quad (29.2d)$$

لاحظ أن كون أي من الأدلة الثلاثة نافذة ناشئ عن حقيقة أن المعالجة تتحدد تماما عند تحديد الصف والعمود في المربع اللاتيني المستخدم. والمجاميع المختلفة لمثال الموسيقى الخلفية مبين في الجدول (٢٩-٢).

توفيق غوذج

تقديرات المربعات الدنيا لمعالم نموذج المربع اللاتيني (29.1) هي:

المقدّر	المعلمة	
$\hat{\mu}_{...} = \bar{Y}_{...}$	$\mu_{...}$	(29.3a)
$\hat{\rho}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{...}$	ρ_i	(29.3b)
$\hat{\kappa}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...}$	κ_j	(29.3c)
$\hat{\tau}_k = \bar{Y}_{...k} - \bar{Y}_{...}$	τ_k	(29.3d)

والقيم الترفيقية هي إذن:

$$\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{...} - 2\bar{Y}_{...} \quad (29.4)$$

والرواسب هي:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...k} + 2\bar{Y}_{...} \quad (29.5)$$

تحليل تباين

يقدم الجدول (٢٩-٣) جدول التحاين لنموذج المربع اللاتيني (29.1) ويمكن الحصول على مجاميع المربعات باستخدام القاعدة (٢٧-٣) والتعديلات (27.16)،

مذكّر في الخطوة ٣ أن أحد الأدلة نافذة. ويجب الحصول على مجموع المربعات الموافق لحد خطأ النموذج في تصميم المربع اللاتيني بالطرح إذ لا توجد تكرارات في خلية تصميم المربع اللاتيني. والصيغ التعريفية لمجموع المربعات هي كما يلي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.6a)$$

$$SSROW = r \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.6b)$$

$$SSCOL = r \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.6c)$$

$$SSTR = r \sum_k (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.6d)$$

$$SSRem = \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{i.} + 2\bar{Y}_{..})^2 \quad (29.6e)$$

$SSROW$ مجموع مربعات الصفوف. وكلما اختلفت متوسطات الصفوف $\bar{Y}_{.j}$ فيما بينها كلما كان $SSROW$ أكبر. وبصورة مماثلة $SSCOL$ يرمز لمجموع مربعات الأعمدة ويقاس التشتت بين متوسطات الأعمدة $\bar{Y}_{i.}$ ويرمز $SSTR$ و $SSRem$ كالعتاد، لمجموع مربعات المعالجات والباقي، على الترتيب.

ويمكن فهم درجات الحرية في الجدول (٣-٢٩) كمايلي: يوجد r^2 من المشاهدات، وبالتالي يوجد $r^2 - 1$ من درجات الحرية المصاحبة لـ $SSTO$. وبما أنه يوجد r من الصفوف لكل من متغيري التجميع في صف أو في عمود، كما يوجد r معالجة، فيترافق مع كل من مجموع المربعات المقابلة $r - 1$ درجة حرية. وعدد درجات الحرية المصاحب لـ $SSRem$ هو الباقي، أي $(r-1)(r-2) = (r^2-1)-3(r-1)$. لاحظ أن إضافة متغير تجميع جديد قد خفض عدد درجات الحرية الموافق لـ $SSRem$ من $(r-1)^2$ في حالة تصميم قطاع عشوائي تام قائم على العدد نفسه من الوحدات التجريبية إلى $(r-1)(r-2)$ ، أي انخفض بمقدار $(r-1)$ درجة حرية.

ويمكن الحصول على العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٣-٢٩) الخاص بنموذج المربع اللاتيني (29.1) باستخدام القاعدة (٤-٢٧). ومن جديد يجب أن نتذكر عند الحصول على المعاملات في الخطوة ١٠ أن أحد الأدلة i, j, k نافذة.

اختبار تأثيرات المعالجات

لاختبار تأثيرات مثبتة للمعالجات في نموذج المربع اللاتيني (29.1) أي اختبار:

$$\begin{aligned} H_0: & \text{كل } \tau_j \text{ مساو للصفر} \\ H_a: & \text{ليس كل } \tau_j \text{ مساو للصفر} \end{aligned} \quad (29.7a)$$

نرى من عمود $E\{MS\}$ في الجدول (٣-٢٩) إن إحصاء الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MS Rem} \quad (29.7b)$$

وقاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$\begin{aligned} H_0: & \text{استتج } F^* \leq F[1-\alpha, (r-1), (r-1)(r-2)] \\ H_a: & \text{استتج } F^* > F[1-\alpha, (r-1), (r-1)(r-2)] \end{aligned} \quad (29.7c)$$

مثال

تمت حسابات تحليل التباين لبيانات مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢-٢٩)

باستخدام حزمة حاسب والتائج مبينة في الجدول (٤-٢٩).

وللقيام بالاختبار التالي لتأثير المعالجات:

$$\begin{aligned} H_0: & \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0 \\ H_a: & \text{ليس كل } \tau_j \text{ مساو للصفر} \end{aligned}$$

نجد من الجدول (٤-٢٩):

$$F^* = \frac{MSTR}{MS Rem} = \frac{166.1}{15.7} = 10.6$$

مفترضين أننا سنضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع الأول عند $\alpha = .01$,

نحتاج $F(.99; 4, 12) = 5.41$ ، وبما أن $10.6 > 5.41$ ، فنستنتج H_a ، أي أن

للأنواع المختلفة من الموسيقى الخلفية تأثيرات مختلفة على إنتاجية صرّافي البنسك.

والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0.0007.

جدول (٩-٢٠) جدول تحليل التباين لمؤثرات التوزيع المادي (20.1) تأثيرات متباينة

E(MS)		df	SS	مصدر التباين
$\sigma^2 + r \frac{\sum x_i^2}{r-1}$	$MSROW = \frac{SSROW}{r-1}$	$r-1$	SSROW	متغير جميع الصف
$\sigma^2 + r \frac{\sum x_i^2}{r-1}$	$MSCOL = \frac{SSCOL}{r-1}$	$r-1$	SSCOL	متغير جميع الموردة
$\sigma^2 + r \frac{\sum x_i^2}{r-1}$	$MSTR = \frac{SSTR}{r-1}$	$r-1$	SSTR	المعاملات
σ^2	$MS Rem = \frac{SS Rem}{(r-1)(r-2)}$	$(r-1)(r-2)$	SSRem	المباقي
			SSTO	المجموع الكلي

توزيع احتمالية عتدية تطبيقية (٢٠٠٠)

جدول (٢٩-٤) جدول تباين لثال الموسيقى الخلفية			
مصدر تغير	SS	df	MS
أسابيع	82.0	4	20.5
أيام ضمن الأسبوع	477.2	4	119.3
النوع الموسيقي	664.4	4	166.1
الخطأ	188.4	12	15.7
المجموع	1,412.0	24	

تعليقات

١- نرغب أحيانا في اختبار وجود تأثيرات لتغير تجميع، ويشير العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٩-٣) إلى إمكانية القيام بذلك، في نموذج المربع اللاتيني (29.1) المثبت، بالطريقة المعتادة. والإحصاءة لاختبار تأثيرات متغير التجميع في صفوف هي:

$$F^* = \frac{MS_{ROW}}{MS_{Rem}} \quad (29.8a)$$

والإحصاءة لاختبار تأثيرات متغير التجميع في أعمدة هي:

$$F^* = \frac{MS_{COL}}{MS_{Rem}} \quad (29.8b)$$

وعلى سبيل المثال، كي نختبر في مثال الموسيقى الخلفية، ما إذا كانت الانتاجية تختلف باختلاف اليوم من الأسبوع، نستخدم إحصاءة الاختبار $F^* = 119.3 / 15.7 = 7.6$. ومن أجل مستوى معنوية (أو دلالة) $\alpha = 0.01$ ، نحتاج إلى $F(99; 4, 12) = 5.41$. ويمكن استنتاج وجود تغير في الانتاجية (مأخوذة كمتوسط فوق جميع المعالجات والأسابيع) ضمن الأسبوع. وبما أن متغيري التجميع يقابلان عاملي تصنيف، فلا بد من الحذر في تفسير تأثيرات متغير تجميع.

٢- تنطوي قوة الاختبار F^* لتأثيرات المعالجات في نموذج المربع اللاتيني (29.1) على معلمة اللامركزية:

$$\phi = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sum \tau_i^2} \quad (29.9)$$

مع ١ - ٢ درجة حرية للبسط و (٢-٢) (٢-١) درجة حرية للمقام. وفيما عدا هذه التعديلات لانواجه أية مشاكل جديدة في الحصول على قوة اختبار تأثيرات المعالجات في تصميم المربع اللاتيني.

٣- إذا كانت تأثيرات المعالجات عشوائية، فالدلائل التي يجب أخذها في الاعتبار

تصبح:

$$\begin{aligned} H_0: \sigma^2_{\tau} &= 0 \\ H_a: \sigma^2_{\tau} &> 0 \end{aligned} \quad (29.10)$$

ولكن إحصاء الاختبار وقاعدة القرار تبقيان كما هما في العبارة (29.7) الخاصة بتأثيرات أن مشته للمعالجات.

٢٩-٤) تقويم مصداقية نموذج مربع لاتيني

تحليل الرواسب

لا يقدم استخدام الرواسب (29.5) لفحص مصداقية نموذج مربع لاتيني مسائل جديدة؛ فالنقاط الأساسية التي ذكرناها سابقا من أجل تصاميم أخرى تنطبق بدورها، أيضا، على تصاميم المربع اللاتيني.

اختبار توكي للتجميعية

التساؤل الرئيس حول مصداقية نموذج المربع اللاتيني (29.1) هو ما إذا كانت تأثيرات متفوري التجميع والمعالجات تجميعية حقا . ومع وجود اللاتجميعية تنبغي دراسة تحويلات للبيانات لرؤية ما إذا كان يمكن إلغاء اللاتجميعية أو جعلها غير مهمة. واستخدام النموذج مفترضين التجميعية في الوقت الذي تكون فيه التأثيرات، في الواقع، لاتجميعية، ستخفض مستوى الدلالة لاختبار تأثيرات المعالجات كما تخفض قوة هذا الاختبار، أو توسع مابين حدي الثقة، مما يجعل التجربة أقل حساسية.

ويمكن أن يمتد اختبار توكي من أجل التجميعية في تصميم القطاع التام العشوائي الذي ناقشناه في الفقرة ٢٤-٦ ليعطي تصاميم المربع اللاتيني. ولتمام المناقشة نجمل فيما يلي الخطوات المطلوبة لاختبار توكي من أجل التجميعية في تجربة مربع لاتيني:

١- أوجد من أجل كل خلية القيمة التوفيقية (29.4):

$$\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{.k} - 2\bar{Y} \quad (29.11a)$$

٢ - أوجد الراسب (29.5) من أجل كل خلية:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} \quad (29.11b)$$

وتحقق من أن الرواسب يجمع إلى الصفر فوق كل صف وكل عمود وكل معالجة:

٣ - احسب $SSRem$ للمربع اللاتيني. ويمكن القيام بذلك باستخدام (29.6e) التي تكافئ كما هي الحال دائما :

$$SSRem = \sum_i \sum_j e_{ijk}^2 \quad (29.11c)$$

٤ - احسب لكل خلية:

$$U_{ijk} = (\hat{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.11d)$$

٥ - احسب:

$$N = \sum_i \sum_j e_{ijk}^2 U_{ijk} \quad (29.11e)$$

٦ - معتبرا U_{ijk} كمشاهدات في مربع لاتيني، أوجد مجموع مربعات الباقي $SSRem(U)$ مستخدما (29.6e)، مع وضع المقادير U بدلا من المقادير Y .

٧ - مجموع مربعات نقص التوفيق المصاحب لعدم التجميعية هو:

$$SSLF = \frac{N^2}{SSRem(U)} \quad (29.11f)$$

ولمجموع المربعات هذا درجة حرية واحدة.

٨ - مجموع مربعات الباقي لنموذج المربع اللاتيني مع تأثيرات تفاعل، ونرمز له بـ

$$SSRem^* = SSRem - SSLF \quad (29.11g)$$

ويصاحبه 1 - $(r-1)(r-2)$ درجة حرية.

٩ - إحصاءة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{SSLF}{1} + \frac{SSRem^*}{(r-1)(r-2)-1} \quad (29.11h)$$

وتتبع إحصاءة الاختبار هذه التوزيع $F[1, (r-1)(r-2)-1]$ في حالة عدم وجود

تفاعلات. وتقود القيم الكبيرة لـ F^* إلى استنتاج أن تجميعية النموذج غير مناسبة.

جدول (٥-٢٩) نتائج حسابية وسيطة ومهمة لاختبار توكي من أجل التجميعية - مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢-٢٩)

2-خطوة 2				
2.8	-2.6	3.0	-7.0	3.8
-4	5.0	-2.6	.8	-2.8
0.0	1.0	1.6	-2	-2.4
-6	-3.5	.2	1.2	2.2
-1.8	-3	-2.2	5.2	-8

3-SSRem الخطوة 3

$$SSRem = 188.4$$

4- U_{ij} الخطوة 4

54.76	54.76	92.16	1.00	29.16
7.84	29.16	9.00	70.56	51.84
27.04	43.56	96.04	54.76	184.96
4.84	84.64	10.24	21.16	9.00
163.84	27.07	57.76	33.46	4.84

5- N الخطوة 5

$$N = 530.832$$

6- $SSRem(U)$ الخطوة 6

$$SSRem(U) = 25,189.916$$

7- $SSLF$ الخطوة 7

$$SSLF = \frac{(350.832)^2}{25,189.916} = 11.19$$

8- $SSRem^*$ الخطوة 8

$$SSRem^* = 188.4 - 11.19 = 177.21$$

مثال أردنا التحقق من صلاحية افتراض التجميعية في نموذج المربع اللاتيني

(29.1)، وذلك من أجل مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢-٢٩). طبقنا اختبار

توكي للتجميعية، وقد لخصنا في الجدول (٥-٢٩) نتائج وسيطة ومهمة. ووجدنا

إحصاء الاختبار (29.11h):

$$F^* = \frac{11.19}{1} \div \frac{177.21}{11} = .69$$

ومستعملين مستوى معنوية $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F[.95; 1, 11] = 4.84$ ، وبما

أن $F^* = .69 \leq 4.84$ ، فنستنتج أن تأثيرات متغوري التجميع والمعالجات تجميعية. والقيمة -

P لهذا الاختبار هي 0.42.

(٥-٢٩) تحليل تأثيرات المعالجات

إذا كانت تأثيرات المعالجات مثبتة واستنتجنا من خلال تحليل التباين وجود فروق بين تأثيرات المعالجات ، فسنرغب عادة في تقدير بعض التضادات التي تتضمن هذه التأثيرات مستخدمين في الغالب، طريقة المقارنات المتعددة. وسيكون متوسط المربعات $MSRem$ الذي نحصل عليه من (29.6e) المتوسط المناسب المستخدم في تقدير تباين المتضادة، ومضاعفات الانحراف المعياري المقدر هي كما يلي:

$$f(1-\alpha/2; (r-1)(r-2)) \quad \text{مقارنة بمفردها} \quad (29.12a)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(1-\alpha; (r-1)(r-2)) \quad \text{طريقة توكي} \quad (29.12b)$$

(لمقارنات ثنائية)

$$S^2 = (r-1)F(1-\alpha; r-1, (r-1)(r-2)) \quad \text{طريقة شيفة} \quad (29.12c)$$

$$B = f(1-\alpha/2g; (r-1)(r-2)) \quad \text{طريقة يونغروني} \quad (29.12d)$$

(g من المقارنات)

مثال

في مثال الموسيقى الخلفية، نرغب القيام بمقارنات ثنائية بين الأنواع المختلفة من الموسيقى بمعامل ثقة عاكلي 0.90. وقد استخدمت المحللة طريقة توكي. وبالتعويض في (15.25b) حيث $n_j = n_i = r$ واستخدام النتائج في الجدول (٤-٢٩)، حصلت على:

$$s^2 = \{\hat{D}\} = \frac{2MSRem}{r} = \frac{2(15.7)}{5} = 6.28 \quad s\{\hat{D}\} = 2.51$$

لنتذكر هنا أن كل متوسط معالجة مقدر \bar{Y}_j ينطوي على خمس مشاهدات. وبالتالي وجدت المحللة أن المضاعف T في (29.12b).

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(90; 5, 12) = \frac{1}{\sqrt{2}} (3.92) = 2.77$$

وهكذا يكون:

$$Ts\{\hat{D}\} = 2.77(2.51) = 7.0$$

وباستخدام متوسطات المعالجات للفترة في الجدول (٢-٢٩)، تم الحصول على

المقارنات الثنائية. وعلى سبيل المثال، لدينا من أجل $\mu_2 - \mu_1 = \tau_2 - \tau_1$:
 $\mu_{1.1}$ هي هنا متوسط الانتاجية للمعالجة 1 حيث أخذنا المتوسط فوق جميع الأسابيع
 وجميع أيام الأسبوع، وللرمز μ_2 المعنى المقابل الخاص بالمعالجة 2. وبمجموعة المقارنات
 الثنائية بكاملها هي كما يلي:

$$\begin{array}{ll} + 8.2 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq + 22.2 & + 5.4 \leq \mu_4 - \mu_1 \leq + 19.4 \\ - 14.0 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq - 0.5 & - 9.2 \leq \mu_5 - \mu_4 \leq + 4.8 \\ + 1.2 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq + 15.2 & - 5.0 \leq \mu_3 - \mu_3 \leq + 9.0 \\ - 2.8 \leq \mu_4 - \mu_3 \leq + 11.2 & - 12.0 \leq \mu_5 - \mu_2 \leq + 2.0 \\ - 9.8 \leq \mu_4 - \mu_2 \leq 4.2 & - 3.2 \leq \mu_5 - \mu_1 \leq + 17.2 \end{array}$$

هذه الفروق الثنائية قادت المحللة إلى الاستنتاجات التالية بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة:

- ١ - تشجع المعالجة 2 انتاجية أعلى في المتوسط من انتاجية المعالجات 1 أو 3.
 - ٢ - تشجع المعالجات 5، 4، 3 متوسط إنتاجية أعلى من المعالجة 1.
 - ٣ - لا يتضح وجود أية فروق ثنائية في متوسط الانتاجية بين المعالجات 5، 4، 2.
 - ٤ - لا يتضح وجود أية فروق ثنائية في متوسط الانتاجية بين المعالجات 3، 4، 5.
- أي أن المعالجة الأفضل، على ما يبدو، هي الموسيقى المختلطة (آلات وأصوات)
 بسرعة عزف متوسطة ($k=2$). وهناك دلالة واضحة على أنها أفضل من الموسيقى
 الآلية - الصوتية بسرعة عزف بطيئة ($k=1$)، أو الموسيقى الآلية الصوتية بسرعة عزف
 عالية ($k=3$). كما تقترح التقديرات النقطية أنها أفضل، أيضا، من الموسيقى الآلية،
 فقط، بسرعة عزف متوسطة ($k=4$)، أو سرعة عزف عالية ($k=5$)، ولكن البينة
 التحريية حول هاتين المقارنتين الأخيرتين ليست حاسمة.

(٢٩ - ٦) معالجات عاملية

إذا كانت المعالجات في تصميم المربع اللاتيني عاملية في طبيعتها، فيمكن تفكيك
 مجموع مربعات المعالجات $SSTR$ بالطريقة المعتادة. وسنجد في تجربة تتضمن عاملين

$$B, A$$

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB \quad (29.13)$$

ويمكن بسهولة القيام بتقديرات التأثيرات المثبتة لعامل باعتبارها ببساطة متضادة
 في متوسطات المعالجات.

مثال

لاحقا لدراسة الموسيقى الخلفية المذكورة سابقا، أُستعملت أربع معالجات لتقصي تأثيرات ارتفاع الموسيقى (ناعمة، مرتفعة) ونوع الموسيقى (نصف رالحة، رالحة) على إنتاجية صرايى بنك. والمعالجات معرفة كمايلي:

T_1 - ناعمة، نصف رالحة.

T_2 - مرتفعة، نصف رالحة.

T_3 - ناعمة، رالحة.

T_4 - مرتفعة، رالحة.

ومتفرا التجميع لتصميم المربع اللاتيني ، هما أيام الأسبوع (الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء ، الخميس) والأسبوع (1,2,3,4). ونفترض أن تأثيرات المعالجات ومتفري التجميع مثبته.

وبين في الجدول (٦-٢٩) تحليل التباين لتحربة تصميم المربع اللاتيني هذه. وإذا كان العاملان B, A غير متفاعلين، فيمكن دراسة تأثير الارتفاع من المتضادة:

$$L_1 = \frac{\mu_{.1} + \mu_{.3}}{2} - \frac{\mu_{.2} + \mu_{.4}}{2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2} \quad (29.14)$$

حيث μ متوسط الانتاجية للمعالجة k حيث المتوسط مأخوذ فوق جميع الأسابيع وأيام الأسبوع. والمقدر التقطي لهذه المتضادة هو:

$$\hat{L}_1 = \frac{\bar{Y}_{.1} + \bar{Y}_{.3}}{2} - \frac{\bar{Y}_{.2} + \bar{Y}_{.4}}{2} \quad (29.14a)$$

وبصورة مماثلة ، يمكن دراسة تأثير نوع الموسيقى من المتضادة:

$$L_2 = \frac{\mu_{.1} + \mu_{.2}}{2} - \frac{\mu_{.3} + \mu_{.4}}{2} \quad (29.15)$$

والمقدر التقطي لهذه المتضادة هو:

$$\hat{L}_2 = \frac{\bar{Y}_{.1} + \bar{Y}_{.2}}{2} - \frac{\bar{Y}_{.3} + \bar{Y}_{.4}}{2} \quad (29.15a)$$

ويمكن الحصول على حدّي ثقة لكل من هذه المتضادات بالطريقة المعتادة، مستخدمين المضاعفات في (29.12).

جدول (٢٩-٦) جدول تباين تصميم المربع اللاتيني بمعالجات عاملية - الدراسة اللاحقة للموسيقى الخلفية
($b = 2, a = 2, r = 4$)

MS	df	SS	مصدر تغير
MSROW	3	SSROW	أسابيع
MSCOL	3	SSCOL	أيام ضمن الأسبوع
MSTR	3	SSTR	معالجات
MSA	1	SSA	ارتفاع الموسيقى (A)
MSB	1	SSB	نوع الموسيقى (B)
MSAB	1	SSAB	التفاعلات AB
MSRem	6	SSRem	الخطأ
	15	SSTO	المجموع الكلي

(٢٩ - ٧) تخطيط تجارب المربع اللاتيني

العدد اللازم من التكرارات

يقدم تصميم المربع اللاتيني r من التكرارات لكل معالجة. وبصورة مشابهة لما رأيناه في حالة تصميم القطاع التام العشوائي، قد تشير اعتبارات القوة و/أو التقدير إلى أن التكرارات r قليلة جدا، خاصة عندما يكون r صغيرا، 3 أو 4، أو 5، مثلا ... ونناقش في الفقرة (٢٩ - ١٠) طريقتين لزيادة عدد التكرارات في تصميم المربع اللاتيني. ومن الضروري في الطريقتين كليهما، أن نقوم سلفا بوضع تصور عن مقدار تباين الخطأ التحريبي σ^2 كي نخطط العدد اللازم من التكرارات.

فعالية متفري التجميع

يمكن تمييز فعالية تصميم المربع اللاتيني بالنسبة إلى التصميم تام التشبيبة أو بالنسبة لتصميم القطاع التام العشوائي. والفعالية بالنسبة للتصميم تام التشبيبة معرّنة كمايلي:

$$E_1 = \frac{\sigma^2}{m^2} \quad (29.16a)$$

حيث σ_r^2, σ_c^2 هما تباين الخطأ التحريبي في التصميم تام التعشية وتصميم المربع اللاتيني؛ على الترتيب. ويمكن قياس الفعالية بالنسبة لتصميم القطاع التام العشوائي بطريقتين، إذ يعتمد القياس على ما إذا كان متغير التصميم في صفوف أو متغير التصميم في أعمدة قد استخدم كمتغير تصميم في قطاعات في تصميم القطاع التام العشوائي:

$$E_2 = \frac{\sigma_{br}^2}{\sigma_L^2} \quad (29.16b)$$

$$E_3 = \frac{\sigma_{bc}^2}{\sigma_L^2} \quad (29.16c)$$

حيث $\sigma_{br}^2, \sigma_{bc}^2$ تباين الخطأ التحريبي في تصميم القطاع التام العشوائي عند استخدام متغير التصميم في صفوف أو متغير التصميم في أعمدة، على الترتيب.

ويمكن تقدير σ_r^2 و σ_c^2 و σ_{bc}^2 من نتائج تصميم المربع اللاتيني كما يلي:

$$s_r^2 = \frac{MSROW + MSCOL + (r-1)MSRem}{r+1} \quad (29.17a)$$

$$s_{br}^2 = \frac{MSCOL + (r-1)MSRem}{r} \quad (29.17b)$$

$$s_{bc}^2 = \frac{MSROW + (r-1)MSRem}{r} \quad (29.17c)$$

وهكذا يكون القياس التقديري للفعالية:

$$\hat{E}_1 = \frac{MSROW + MSCOL + (r-1)MSRem}{(r+1)MSRem} \quad (29.18a)$$

$$\hat{E}_2 = \frac{MSCOL + (r-1)MSRem}{rMSRem} \quad (29.18b)$$

$$\hat{E}_3 = \frac{MSROW + (r-1)MSRem}{rMSRem} \quad (29.18c)$$

وإذا كان r صفوا ، فيمكن تعديل قياسات الفعالية مستخدمين (24.15) كي نأخذ في الاعتبار الفروق في عدد درجات الحرية المصاحبة لمتوسطات المربعات المستخدمة في تقدير تباين الخطأ التحريبي للتصميمين المعنيين:

مثال: في مثال الموسيقى الخلفية نجد، من النتائج في الجدول (٢٩-٤)، القياسات

التالية للفعالية:

$$\hat{E}_1 = \frac{20.5 + 119.3 + 4(15.7)}{6(15.7)} = 2.2$$

$$\hat{E}_2 = \frac{119.3 + 4(15.7)}{5(15.7)} = 2.3$$

$$\hat{E}_3 = \frac{20.5 + 4(15.7)}{5(15.7)} = 1.1$$

ويمكن استخدام (24.15) لتعديل قياسات الفعالية بحيث نأخذ في الاعتبار الفروق في عدد درجات الحرية للمصاحبة لمتوسطات المربعات المستخدمة لتقدير تباين الخطأ التحريبي، في التصميمين المعينين، إلا أن هذه التعديلات تأثيرها طفيفا هنا.

ويشير تحليل تقديرات الفعالية إلى أن تصميم المربع اللاتيني كان في دراسة الموسيقى الخلفية فعالا بالمقارنة مع التصميم تام التعمية. فسيحتاج هذا الأخير إلى أكثر من ضعف ما يحتاجه تصميم المربع اللاتيني من المشاهدات بحيث يكون لتقدير أي متضادة محددة في المعالجات التباين نفسه في التصميمين. وقد اكتسبت معظم هذه الفعالية من متغير التجميع في أعمدة (أيام ضمن الأسبوع)، لأن فعالية تصميم المربع اللاتيني بالنسبة لتصميم قطاع تام عشوائي كان متغير التجميع فيه هو متغير التجميع في أعمدة هي فعالية زهيدة كونها قريبة من الواحد. وبالتالي، فقد أنجز القليل من خلال التجميع في قطاعات وفقا لمتغير التجميع في صفوف (أسبوع).

(٢٩ - ٨) أسلوب الانحدار في تصاميم المربع اللاتيني

يمكن التعبير عن النموذج (29.1) لتصميم مربع لاتيني بتأثيرات مثبتة لمتغيري

التجميع والمعالجات وهو:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \kappa_j + \varepsilon_{ijk} \quad (29.19)$$

$$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r$$

يمكن التعبير عنه بسهولة في صيغة نموذج انحدار بمتغيرات مؤشرة. كما سبق:

سنستخدم للمتغيرات المؤشرة 0، 1، ويمكن التعبير عن نموذج الانحدار لمثال

الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-٢) حيث 5 = ٣، كما يلي:

$$\begin{aligned}
Y_{ijk} = & \mu \dots + \underbrace{\rho_1 X_{ijk1} + \rho_2 X_{ijk2} + \rho_3 X_{ijk3} + \rho_4 X_{ijk4}}_{\text{تأثير التجميع في صفوف}} \\
& + \underbrace{k_1 X_{ijk5} + k_2 X_{ijk6} + k_3 X_{ijk7} + k_4 X_{ijk8}}_{\text{تأثير التجميع في أعمدة}} \\
& + \underbrace{\tau_1 X_{ijk9} + \tau_2 X_{ijk10} + \tau_3 X_{ijk11} + \tau_4 X_{ijk12}}_{\text{تأثير المعالجة}} \\
& + \varepsilon_{ijk}
\end{aligned}$$

حيث:

1 إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 1 للتجميع في صفوف
 $X_{ijk1} = 1$ - إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 5 للتجميع في صفوف
 0 فيما عدا ذلك.

ونعرف بصورة مماثلة $X_{ijk2}, X_{ijk3}, X_{ijk4}$ و

1 إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 1 للتجميع في أعمدة
 $X_{ijk5} = 1$ - إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 5 للتجميع في أعمدة
 0 فيما عدا ذلك.

ونعرف بصورة مماثلة $X_{ijk6}, X_{ijk7}, X_{ijk8}$ و

1 إذا تلقت الوحدة التجريبية المعالجة 1
 $X_{ijk9} = 1$ - إذا تلقت الوحدة التجريبية المعالجة 5
 0 فيما عدا ذلك

ونعرف بصورة مماثلة $X_{ijk10}, X_{ijk11}, X_{ijk12}$.

ونبين في الجدول (٢٩-٧) متجه المشاهدات Y والمصفوفة X لمشال الموسيقى الخلفية للمعطي في الجدول (٢٩-٢). ونلاحظ من أجل المشاهدة Y_{235} ، مثلاً أن:
 $X_9 = X_{10} = X_{11} = X_{12} = -1, X_7 = 1, X_2 = 1$ ،
 وجميع المتغيرات X الأخرى تساوي الصفر. وبالتالي لدينا:

$$Y_{235} = \mu \dots + \rho_2 + \kappa_3 + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 + \varepsilon_{235}$$

$$= \mu_{...} + \rho_2 + \kappa_3 + \tau_3 + \varepsilon_{2335}$$

وهو التعبير المناسب عن الملاحظة Y_{235} وفقا لنموذج التحاين (29.19) الخاص بالمربع اللاتيني المستخدم في المثال.

وبالطريقة المعتادة في أسلوب الانحدار، نقوم بتقدير تأثيرات المعالجات واختبارها.

(٢٩ - ٩) مشاهدات مفقودة

تدُم المشاهدات المفقودة تناظر (تعامد) تصميم المربع اللاتيني وتجعل حسابات التحاين المعتادة غير مناسبة. إلا أن أسلوب الانحدار يبقى، كالمعتاد، مناسباً في حالة مشاهدات مفقودة في تصميم مربع لاتيني. إذ نضع نموذج الانحدار للمشاهدات المتوفرة ثم نقوم بتوفيق النموذج للبيانات. والطريقة مشابهة لتلك التي ناقشناها في الفقرة ٢٥ - ٣ في حالة تصميم القطاع التام. ونقوم بالاختبارات بتوفيق النموذج المحفّض المناسب للاختبار المطلوب بالإضافة إلى توفيق النموذج التام. ونقوم بتقدير التأثيرات المثبتة للمعالجات بدلالة معاملات الانحدار للنموذج التام وذلك بالطريقة المعتادة.

جول (٧-٢٩) مصفوفات البيانات لنموذج الانحدار (29.18) مثال الموسيقى الخلفية المطي في الجدول (٢-٢٩)

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
$Y_{114} = 18$	$Y =$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$Y_{125} = 17$		1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$Y_{131} = 14$		1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$Y_{142} = 21$		1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$Y_{155} = 17$		1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$Y_{213} = 13$		1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
$Y_{222} = 34$		1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$Y_{233} = 21$		1	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1
$Y_{241} = 16$		1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$Y_{254} = 15$		1	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	1
$Y_{311} = 7$		1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
$Y_{324} = 29$		1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
$Y_{332} = 32$		1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
$Y_{340} = 27$		1	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	-1	-1
$Y_{353} = 13$		1	0	0	1	0	-1	-1	-1	-1	0	1	0
$Y_{413} = 17$		1	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
$Y_{421} = 13$		1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$Y_{433} = 24$		1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
$Y_{444} = 31$		1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$Y_{452} = 25$		1	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	0	1	0
$Y_{512} = 21$		1	1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	1	0
$Y_{523} = 26$		1	-1	-1	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1
$Y_{534} = 26$		1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	1
$Y_{542} = 31$		1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	1	0
$Y_{551} = 7$		1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0

(٢٩-١٠) تكرارات إضافية لتصميم المربعات اللاتينية

الحاجة إلى تكرارات إضافية

كما نوهنا سابقاً ، فإن تصميم المربع اللاتيني يقدم r تكراراً لكل معالجة. وإذا أشارت اعتبارات القوة و/ أو التقدير إلى أن هذا العدد من التكرارات قليل جداً ، فهناك طريقتان أساسيتان لزيادة عدد التكرارات - التكرارات ضمن الخلايا ومربعات لاتينية إضافية. وسنناقش كلا منهما.

تكرارات ضمن الخلايا

هذه الطريقة في زيادة عدد التكرارات للمعالجة الواحدة هي طريقة ممكنة عندما نستطيع الحصول على وحدتين تجريبتين أو أكثر من أجل كل خلية يعرفها متغيرا التحميم في صفوف وأعمدة. لنعتبر على سبيل المثال، تجربة يشكل فيها الـ IQ (منخفض، عادي، مرتفع) والعمر (فتى، متوسط العمر، مسن) متغيري التحميم. ففي حالة من هذا النوع يمكن الحصول على عنصرين تجريبيين أو أكثر لكل خلية، وعندئذ سيتلقى كل من العناصر في خلية المعالجة التي خصصها المربع اللاتيني المستخدم لهذه الخلية. نفترض أن n من الوحدات التجريبية تتوفر لكل خلية، وأن Y_{ijk} ترمز للملاحظة الخاصة بالوحدة m ($m = 1, \dots, n$) في الخلية (ij) التي خصصت لها المعالجة k . فنعدل نموذج التأثيرات المثبتة التحممي، من أجل n تكراراً في كل خلية كمايلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \varepsilon_{m(ijk)} \quad (29.21)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

$$\sum \rho_i = \sum \kappa_j = \sum \tau_k = 0 \text{ ثوابت خاضعة للقيود}$$

$\varepsilon_{m(ijk)}$ مستقلة و $(0, \sigma^2)$

$$m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, r, j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, r$$

ويمكن الحصول على مجاميع مربعات التحمين ودرجات الحرية للنموذج (29.21) باستخدام القاعدة (٢٧-٣) في صورتها المعدلة (16-27) وذلك بسهولة تامة، متذكّرين

أن أحد الأدلة *مبررة* نافلة. والسبب في أنه لا بد هنا من الحصول على مجاميع المربعات الموافقة لحد الخطأ في النموذج كباق، وذلك بالرغم من وجود تكرارات، هو أننا نفترض أن أنواعا مختلفة من حدود التفاعل مساوية للصفر. وبمجاميع مربعات المعالجة والصف والعمود هي على الترتيب:

$$SSTR = m \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.22a)$$

$$SSROW = m \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.22b)$$

$$SSCOL = m \sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.22c)$$

وبمجموع المربعات الكلي هو كالمعتاد:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.22d)$$

بينما نحصل على *SSRem* كباق:

$$SSRem = SSTO - SSROW - SSCOL - SSTR \quad (29.22e)$$

ولا تتغير درجات الحرية للصف والعمود والمعالجة، ولكن درجات الحرية المصاحبة لـ *SSRem* تزداد من $(n-2)$ إلى $(n-1)$ إلى $n^2 - 3r + 2$ ، بزيادة قدرها $m(n-1)$ درجة حرية.

وتحليل التباين مبين في الجدول (٨-٢٩). ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات باستخدام القاعدة (٢٧ - ٤) متذكّرين أن أحد الأدلة i, j, k نافلة. وإحصاء الاختبار لاختبار تأثيرات المعالجات هي من جديد $F^* = MSTR/MSRem$.

جدول (٨-٢٩) جدول التباين لتصميم المربع اللاتيني مع n تكرارا في كل خطة

MS	df	SS	مصدر التغير
<i>MSROW</i>	$r - 1$	<i>SSROW</i>	متغير التجميع في الصفوف
<i>MSCOL</i>	$r - 1$	<i>SSCOL</i>	متغير التجميع في أعمدة
<i>MSTR</i>	$r - 1$	<i>SSTR</i>	معالجات
<i>MSRem</i>	$n^2 - 3r + 2$	<i>SSRem</i>	الخطأ
	$n^2 - 1$	<i>SSTO</i>	المجموع الكلي

اختبار التجسيمية عندما يوجد n تكرارا ضمن خلية في مربع لاتيني، يمكن الحصول على قياس للخطأ البحت بصرف النظر عن صحة التجسيمية في النموذج (29.1). ونحصل على مجموع مربعات الخطأ البحت بالطريقة المعتادة:

$$SSPE = \sum_j \sum_i \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk})^2 \quad (29.23)$$

ويصاحبه $(n-1)r$ درجة من الحرية، وهي الزيادة في درجات الحرية المصاحبة لـ $SSRem$ نتيجة وجود n من المشاهدات في كل خلية من المربع اللاتيني. والفرق بين $SSRem$ و $SSPE$ هو انعكاس لنقص التوفيق في النموذج التجسمي:

$$SSLF = SSRem - SSPE \quad (29.24)$$

ويصاحبه $(n-2)(r-1)$ درجة حرية. ليكن:

$$MSPE = \frac{SSPE}{(n-1)r^2} \quad (29.25a)$$

$$MSLF = \frac{SSLF}{(r-1)(r-2)} \quad (29.25b)$$

فغندلكر يمكن استخدام:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSPE} \quad (29.26)$$

لاختبار ما إذا كانت التجسيمية في النموذج مناسبة.

ويمكن تبين أنه إذا كان النموذج التجسمي مناسباً، فإن F^* يتبع التوزيع $[F^*(n-1)(r-2), (n-1)r^2]$ ونقود القيم الكبيرة لـ F^* إلى استنتاج أن النموذج التجسمي مناسب. ويتضمن الجدول (٩-٢٩) تفكيك $SSRem$ إلى المركبتين $SSLF$ و $SSPE$.

مثال

اضطلعت جامعة حكومية ببرنامج إعادة تأهيل يُنفذ للمرة الأولى ومصمم لتعليم مهارات تصليح حاسب لأشخاص أزعجوا عن مهنتهم السابقة. ويبين الجدول (١٠-٢٩) نتائج تجربة لتقويم تأسيات ثلاث طرق تشجيمية على درجات الانجاز للمشتركين في البرنامج. ومتغيرا التشجيم، هما الـ IQ للمشترك وعمره. وقد نُفذ تكراران في كل خلية، ويتضمن الجدول (١٠-٢٩) درجات الانجاز. بينما يتضمن الجدول (١٠-٢٩) ب جدول تحليل التباين كما حصلنا عليه من حزمة حاسب.

جدول (٩-٢٩) جدول تباين لاختبار التجنيم عند وجود m تكرار في كل خلية من خلايا مربع لاتيني.

مصدر التغير	SS	df	MS
متغير التجنيم في صفوف	SSROW	$r - 1$	
متغير التجنيم في أعمدة	SSCOL	$r - 1$	
معالجات	SSTR	$r - 1$	
الخطأ	SSRem	$mr^2 - 3r + 2$	
نقص التوفيق	SSLF	$(r - 1)(r - 2)$	MSLF
الخطأ البحث	SSPE	$(n - 1)r^2$	MSPE
المجموع الكلي	SSTO	$mr^2 - 1$	

ومن أجل مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ نحتاج إلى $F(95; 2,9) = 4.26$. وبما أن $F^* = 2.05 \leq 4.26$ ، نستنتج أن النموذج التجنيمي (29.21) مناسب. والقيمة P لهذا الاختبار هي 0.18. وبناء على هذا الاختبار وعلى رسوم تشخيصية مختلفة نقرر أن نموذج المربع اللاتيني (29.21) مناسب هنا.

مربعات لاتينية إضافية

لا يمكن الحصول أحيانا على وحدات تجريبية إضافية ضمن خلية. وكانت الحال كذلك، مثلا في مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢-٢٩)، إذ يمكن عزف نوع واحد من الموسيقى، فقط، في يوم واحد. وعندما لا يكون التكرار ضمن الخلايا ممكنا، يمكن في كثير من الأحيان الحصول على تكرارات إضافية لكل معالجة بإضافة مربع لاتيني أو أكثر لأحد متغيرات التجنيم. وفي مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢-٢٩)، يمكن تنفيذ التجربة لخمس أسابيع أخرى. وفي تجربة تستخدم طاقم العمل في منشأة كوحدة تجريبية، ومستخدمين كممتغري تجميع ووردية العمل (صباحية، بعد الظهر، مساءية) وقسم الإنتاج (3,2,1) يمكن الحصول على تكرارات إضافية بتنفيذ التجربة في أقسام إنتاج أخرى.

ولاختبار صلاحية النموذج التجنيمي، نجد أن إحصاء الاختبار (29.26) هي هنا:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSPE} = \frac{8.2}{4.0} = 2.05$$

ونبين في الجدول (١١-٢٩) مخطط تجربة مثال الموسيقى الخلفية عند تنفيذها فوق خمسة أسابيع أخرى. والمربع اللاتيني الثاني، وغيره في حال الحاجة، يجري اختيارها

بصورة مستقلة.

وكثيراً ما ننظر إلى المربعات اللاتينية الإضافية كصفوف لمتغير تجميعي ثالث. في مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-١١)، مثلاً، يمكن اعتبار المربعين اللاتينين وكأنهما يشيران إلى متغير التجميع «الدور الزمني». ويمكن النظر إلى الأسابيع الخمسة الأولى كدور زمني أول، والأسابيع الخمسة الثانية كدور زمني ثان.

جدول (٢٩-١٠) مثال عن تصميم مربع لاتيني مع تكرارين في كل خلية - تجربة برنامج إعادة التأهيل

(أ) بيانات			
IQ	عمر (j)		
	متوسط العمر	مسن	فتى
i	(A)	(C)	(B)
مرتفع	20	25	19
	24	21	16
عادي	14	14	24
	15	14	22
منخفض	12	7	10
	13	4	14
(ب) تحليل تباين			
مصدر التغير	SS	df	MS
عمر	364.3	2	182.2
	34.3	2	17.2
	147.0	2	37.5
معالجات	52.4	11	4.76
خطأ	16.4	2	8.2
	36.0	9	4.0
المجموع الكلي	598.0	17	

وكمثال آخر، فإن أقسام الانتاج في تجربة أطقم المنشأة المذكورة أعفاً ، يمكن أن تكون في المربع اللاتيني الأول على أساس ساعة العمل، بينما تكون في المربع اللاتيني الثاني على أساس الانتاجية كما هو مبين في الجدول (٢٩-١٢). وهكذا، ومع مربعات لاتينية إضافية، يمكن في الواقع إدخال متغير بجميع ثالث. ونتيجة لذلك ، يمكن إزاحة التشتت المرافق لمتغير التجميع الثالث من تشتت الخطأ التحريبي. وبالإضافة إلى ذلك، يمكن دراسة التفاعلات بين متغير التجميع الثالث والمتغيرات الأخرى، ولا ينبغي افتراض أن هذه التفاعلات غير موجودة.

جدول (٢٩-١٢) تصميم بمربعين لاتينيين - مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-١١).

		اليوم				
أسبوع	مربع	M	T	W	Th	F
1	1	D	C	A	B	E
	2	C	B	E	A	D
	3	A	D	B	E	C
	4	E	A	C	D	B
	5	B	E	D	C	A
	6	E	D	C	A	B
	7	B	A	E	D	C
2	8	D	C	A	B	E
	9	A	E	B	C	D
	10	C	B	D	E	A

وعند استخدام n من المربعات اللاتينية المستقلة، الممثلة لمتغير تجميعي ثالث، مع العدد نفسه من الصفوف ومن الأعمدة في كل مربع لاتيني، فإن النموذج الذي يسمح بوجود تفاعلات بين المتغير التجميعي الثالث ومتغيري التجميع في صفوف وأعمدة، وبينه وبين المعالجات، هو كما يلي:

$$Y_{ijklm} = \mu \dots + \rho_i + k_j + \tau_k + \delta_m + (\rho\delta)_{im} + (k\delta)_{jm} + (\tau\delta)_{km} + \varepsilon_{ijklm} \quad (29.27)$$

حيث:

$\mu \dots$ ثابت.

$\delta_m, \tau_k, \kappa_j, \rho_i$ ثوابت خاضعة للقيود.

$$\sum \rho_i = \sum \kappa_j = \sum \tau_k = \sum \delta_m = 0$$

$(\rho\delta)_{im}, (\kappa\delta)_{jm}, (\tau\delta)_{km}$ خاضعة للقيود:

$$\sum_i (\rho\delta)_{im} = \sum_m (\rho\delta)_{im} = \sum_j (\kappa\delta)_{jm} = 0$$

$$\sum_m (\kappa\delta)_{jm} = \sum_j (\tau\delta)_{km} = \sum_m (\tau\delta)_{km} = 0$$

$N(0, \sigma^2)$ مستقلة و $B(1/km)$

$m = 1, \dots, m; k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, m$

لاحظ أن δ_m يرمز لتأثير متغير التجميع الثالث. والتأثيرات الرئيسة الأخرى

معرفة كما سبق.

جدول (١٢-٢٩) تصميم مربعين لاتيني - تجربة اطلاق العمل في منشأة

مربع	قسم الإنتاج	وردية		
		صباحا	بعد الظهر	مساء
١- الدفع على أساس الساعة	1	C	B	A
	2	B	A	C
	3	A	C	B
٢- الدفع على أسس الإنتاجية	4	A	B	C
	5	C	A	B
	6	B	C	A

ويمكن أن تكون شروط النموذج (29.27) مناسبة لمثال الموسيقى الخلفية في الجدول (١١-٢٩). وهناك قد يكون من المناسب أحيانا اتخاذ الصفوف لتشير إلى موقع الأسبوع ضمن فترة زمنية من خمسة أسابيع، والأعمدة لتشير إلى موقع اليوم ضمن الأسبوع، ومتغير التجميع الثالث ليشير إلى الفترة الزمنية من السنة. ويبين الجدول (١٣-٢٩) تحليل التباين لنموذج m من المربعات المستقلة (29.27). ويمكن الحصول على مجاميع المربعات ودرجات الحرية باستخدام القاعدة (٢٧-٣) في

صورته المعدلة (27.16)، تذكر عند استخدام هذه القاعدة أن أحد الأدلة i, j, k دليل ناقلة أو دليل احتياطي. ولا بد من الحصول على مجموع المربعات المقابل لحد الخطأ في النموذج الخطأ على شكل "بقي" إذ لا توجد هنا تكرارات ضمن الخلايا وافترض أن بعض التفاعلات تساوي الصفر. ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات باستخدام القاعدة (٢٧-٤)، متذكرين ثانية أن أحد الأدلة i, j, k ناقلة.

تكرارات في دراسات القياسات المتكررة

نوهنا سابقاً أن تصميم المربع اللاتيني مناسب جداً لدراسة قياسات متكررة عندما يوجد r من المعالجات و r من العناصر. وإذا احتسنا لتكرارات إضافية، فلا يمكن استخدام التكرارات ضمن خلية، لأن الخلية تتعلق بعنصر بمفرده وبدلاً من ذلك، يمكن استخدام تصميم المربع اللاتيني الناقلة، أو المربعات اللاتينية المستقلة.

جدول (١٣-٢٩) جدول تلميح عند استخدام m من المربعات اللاتينية بالصفوف والأعمدة نفسها مع إمكانية وجود تفاعلات مع متغير تجميع ثالث.

df	SS	مصدر تفر
$r - 1$	SS_{ROW}	متغير تجميع صف
$r - 1$	SS_{COL}	متغير تجميع عمود
$r - 1$	SS_{TR}	معالجات
$n - 1$	SS_3	متغير تجميع ثالث
$(n - 1)(r - 1)$	$SS_{3.ROW}$	تفاعلات الصف ومتغير التجميع الثالث
$(n - 1)(r - 1)$	$SS_{3.COL}$	تفاعلات العمود ومتغير التجميع الثالث
$(n - 1)(r - 1)$	$SS_{3.TR}$	تفاعلات المعالجات ومتغير التجميع الثالث
$n(r - 1)(r - 2)$	SS_{Rem}	الخطأ
$m^2 - 1$	SS_{TO}	المجموع الكلي

تصاميم مربع لاتيني ناقلة هذه التصاميم، وتسمى، أيضاً، تصاميم مربع لاتيني تحويلية، هي تصاميم مفيدة غالباً عندما نريد استخدام مربعات لاتينية في دراسة قياسات متكررة لإقامة توازن بالنسبة لموضع الترتيب لمعالجة، علماً أن ذلك يستدعي توفر عناصر أكثر مما هو مطلوب في حالة مربع لاتيني بمفرده. ومع هذا النوع من

التصميم، تُخصص العناصر عشوائيا إلى الأنماط المختلفة من ترتيب المعالجات التي يقدمها المربع اللاتيني (يمكن أحيانا استخدام عدة مربعات لاتينية). نعتزم تجربة نريد فيها تطبيق المعالجات A ، B ، و C كل عنصر، وأنماط الترتيب المختلفة للمعالجات معطاة بالمربع اللاتيني:

النمط	موضع الترتيب		
	1	2	3
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

ولنفترض توافر $3n$ من العناصر لهذه الدراسة. فنعتدّل منخصص n من العناصر عشوائيا لكل من أنماط الترتيب الثلاثة في تصميم مربع لاتيني ناقل. لاحظ أن هذا التصميم خليط من قياسات متكررة (ضمن العناصر) ومربع لاتيني (أنماط الترتيب تشكل مربعا لاتينيا).

وبافتراض أن جميع التأثيرات تجميعية ومثبتة، باستثناء أن تأثيرات العناصر عشوائية، يمكن تطوير نموذج بسيط نسبيا لتصاميم المربع اللاتيني الناقلة، وذلك من أجل r من المعالجات و n من العناصر لكل نمط ترتيبي. ويرمز ρ_i في النموذج التالي لتأثير النمط الترتيبي للمعالجة i ، κ_j يرمز لتأثير الموضع الترتيبي j ، τ_k يرمز لتأثير المعالجة k ، ويرمز $\eta_{m(j)}$ لتأثير العنصر m وهو محضّن ضمن النمط الترتيبي للمعالجة i :

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \eta_{m(j)} + \varepsilon_{(ijkm)} \quad (29.28)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت.

ρ_i, κ_j, τ_k ثوابت خاضعة للقيود: $\sum \rho_i = \sum \kappa_j = \sum \tau_k = 0$

$\eta_{m(j)}$ مستقلة و $(0, \sigma_\eta^2)$

$\varepsilon_{(ijkm)}$ مستقلة و $(0, \sigma^2)$ ومستقلة عن $\eta_{m(j)}$.

$m = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, r$; $i = 1, \dots, r$

ويمكن الحصول على مجاميع مربعات تحليل التباين ودرجات الحرية لهذا النموذج باستخدام القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعلقة (27.16)، تذكر عند استخدام هذه القاعدة أن أحد الأدلة i, j, k نافلة. ومن جديد يجب الحصول على مجموع المربعات الموافقة لحد الخطأ في النموذج كباق، إذ لا توجد تكرارات ضمن الخلايا في هذا التصميم. وتنبع صيغ مجاميع المربعات النمط المعتاد. ومجاميع المربعات التعريفية هي كما يلي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_m (Y_{ijm} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.29a)$$

$$SSP = nr \sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.29b)$$

$$SSO = nr \sum_j (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.29c)$$

$$SSTR = nr \sum_k (\bar{Y}_{...k} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.29d)$$

$$SSS = r \sum_i \sum_m (\bar{Y}_{i.m} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (29.29e)$$

$$SSRem = SSTO - SSP - SSO - SSTR - SSS \quad (29.29f)$$

و SSP هنا هو مجموع مربعات النمط (المعالجة) SSO هو مجموع مربعات موضع الترتيب، ومجاميع المربعات الأخرى معانيها المعتادة.

ويحتوي الجدول (١٤-٢٩) على جدول التحاين. ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات باستخدام القاعدة (٤-٢٧)، متذكرين أن أحد الأدلة i, j, k نافلة.

مثال. يتضمن الجدول (١٥-٢٩) بيانات لدراسة تأثيرات ثلاثة طرق عرض مختلفة على مبيعات التفاح، مستخدمين تصميم المربع اللاتيني الناقل. استخدمنا ستة محلات تجارية، وخصصنا عشوائيا محلين لكل من الأنماط الترتيبية المبنية للمعالجات الثلاث. وقد استمرت كل طريقة عرض لمدة أسبوعين، والمتغير الملحوظ كان مقدار المبيعات لكل مائة زبون. ويتضمن الجدول (١٥-٢٩) ب تحليل التباين وقد حصلنا على مجاميع المربعات من تشغيله للحاسب.

ولاختبار تأثيرات المعالجات نستخدم:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSRem} = \frac{94.5}{2.54} = 37.2$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، نحتاج إلى $F(95; 2, 8) = 4.46$. وبما أن $F^* = 37.2 > 4.46$ ، فنستنتج وجود تأثيرات مختلفة لطرق العرض الثلاث على المبيعات. والقيمة P - لهذا الاختبار هي 0^* . وكذلك قمنا، أيضاً، باختيار تأثيرات الأنماط وتأثيرات موضع الترتيب، وتأثيرات المحلات. وقد اشارت الاختبارات إلى وجود تأثيرات لموضع الترتيب، ولم تشر إلى وجود تأثيرات للأنماط أو للمحلات. وتتفق مواضع الترتيب هنا مع الفترات الزمنية الثلاث التي دُرست فيها طرق العرض، ويمكن لها أن تعكس تأثيرات موسمية بالإضافة إلى نتائج أحداث أو وقائع خاصة، مثل وجود طقس حار بصورة غير عادية في أحد الفترات.

جدول (١٤-٢٩) جدول تحليل تصميم مربع لاتيني ناقل

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
الأنماط	SSP	$r - 1$	MSP	$\sigma^2 + r\sigma_p^2 + nr \frac{\sum \rho_i^2}{r-1}$
مواضع الترتيب	SSO	$r - 1$	MSO	$\sigma^2 + nr \frac{\sum \sigma_j^2}{r-1}$
المعالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR	$\sigma^2 + nr \frac{\sum \tau_i^2}{r-1}$
عناصر (ضمن الأنماط)	SSS	$r(n-1)$	MSS	$\sigma^2 + r\sigma_p^2$
الخطأ	SSRem	$(r-1)(nr-2)$	MSRem	σ^2
المجموع الكلي	SSTO	$nr^2 - 1$		

استخدام مربعات لاتينية مستقلة

إذا لم تكن تأثيرات مواضع الترتيب ثابتة تقريباً من أجل جميع العناصر (محلات، إلخ). فلا يكون التصميم الناقل فعالاً. وقد يكون من المفضل عندئذٍ وضع العناصر في مجموعات متجانسة بالنسبة لتأثيرات مواضع الترتيب ثم استخدام مربعات لاتينية مستقلة لكل مجموعة. فلنفترض أننا نزيد تطبيق أربع معالجات، كل منها على ثمانية عناصر، أربعة ذكور وأربع إناث، ويتوقع المحرّب أن تأثير التعب سيكون قوياً بالنسبة للإناث ومعتدلاً، فقط، للذكور. فمن المستحسن عندئذٍ استخدام مربعين لاتينيين مستقلين، أحدهما لعناصر الذكور والآخر لعناصر الإناث.

جدول (١٥-٢٩) تصميم مربع لاتيني ناقل - مثال مبيعات الطماح

(أ) البيانات (مرمزة)

نمط i	عمل	فترة أسبوعين (j)		
		1	2	3
1	$m = 1$	9(B)	12(C)	15(A)
	$m = 2$	4(B)	12(C)	9(A)
2	$m = 1$	12(A)	14(B)	3(C)
	$m = 2$	13(A)	14(B)	3(C)
3	$m = 1$	7(C)	18(A)	6(B)
	$m = 2$	5(C)	20(A)	4(B)

(ب) تحليل تباين

مصدر التغير	SS	df	MS
أنماط	.33	2	.17
مواضع الترتيب	233.33	2	116.67
طرق العرض	189.00	2	94.50
محلات (ضمن الأنماط)	21.00	3	7.00
الخطأ	20.33	8	2.54
المجموع الكلي	464.0	17	

جدول (١٦-٢٩): توضيح لتصميم مربع لاتيني ناقل مضاعف

نمط i	عمل	فترة أسبوعين		
		1	2	3
1	1	A	B	C
	2	B	C	A
	3	C	A	B
	4	A	C	B
2	5	B	A	C
	6	C	B	A

تأثيرات محمولة. عندما تتوقع وجود تأثيرات محمولة من معالجة إلى أخرى، أي إذا لم يكن هناك تأثير لموضع الترتيب، فقط، بل للمعالجة السابقة، أيضا، فيمكن موازنة هذه التأثيرات المحمولة باختيار مربع لاتيني تكون فيه كل معالجة لاحقة لكل معالجة أخرى عددا متساويا من المرات. وكمثال على مربع لاتيني من هذا النوع في حالة $r = 4$ نجد:

عناصر	فترة			
	1	2	3	4
1	A	B	D	C
2	B	C	A	D
3	C	D	B	A
4	D	A	C	B

ونلاحظ أن المعالجة A تتبع كلا من المعالجات الأخرى مرة واحدة، وكذلك الأمر بالنسبة لبقية المعالجات. وهذا التصميم مناسب للحالات التي لا تستمر فيها التأثيرات المحمولة لأكثر من فترة زمنية واحدة.

وعندما يكون r فرديا يمكن الوصول إلى توازن في التابع باستخدام زوج من المربعات اللاتينية يتميز بأن تتابع المعالجات في أحدهما معاكس لتتابعها في الآخر.

وفي الحقيقة، من المستحسن عادة استخدام زوج كهذا من المربعات، حتى لو كان r زوجيا، وذلك كي يصبح عدد درجات الحرية المصاحبة لـ $MSRem$ كبيرا بصورة معقولة. ويدعى تصميم كهذا أحيانا تصميم مربع لاتيني ناقص مضاعف. ويحتفظ هذا النوع من التصميم بمزايا استخدام متغيري جميع في مربع لاتيني، ويسمح للمحرر، في الوقت نفسه، بموازنة وقياس التأثيرات المحمولة.

وفي توضيح عرض التفاح المذكور سابقا حيث درمنا ثلاث طرق عرض في ستة محلات، يمكن أن يكون المربعان اللاتينيان كما هو مبين في الجدول (٢٩-١٦) وينبغي تقسيم المحلات أولا إلى مجموعتين، ثم تخصيصها عشوائيا إلى المربعين اللاتينيين.

(٢٩-١٦) تأثيرات عشوائية لتغير تجميع

إذا كان ينبغي النظر إلى فصول متغير تجميع في صفوف أو في أعمدة على أنها اختيار عشوائي من مجتمع، فلا يعود نموذج المربع اللاتيني بتأثيرات مثبتة (29.1) قابلا للتطبيق.

متغيرا التجميع كلاهما عشوائيان

لنعتبر الحالة التي يكون فيها متغير التجميع في صفوف عناصر ، ومتغير التجميع في أعمدة مشاهدا ، وننظر إلى العناصر والمشاهدين الذين تشملهم الدراسة كعينتين عشوائيتين من مجتمعين مناسبين. ففي هذه الحالة، ومفترضين تأثيرات مثبتة للمعالجات، يكون النموذج التجميعي لتصميم مربع لاتيني كمايلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \varepsilon_{(ijk)} \quad (29.30)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

ρ_i مستقلة و $N(0, \sigma_\rho^2)$

κ_j مستقلة و $N(0, \sigma_\kappa^2)$

τ_k ثوابت خاضعة للقيود $\sum \tau_k = 0$

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$\rho_i, \kappa_j, \varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة متشعبة متشعبة.

$k = 1, \dots, r, j = 1, \dots, r, i = 1, \dots, r$

ويبقى تحليل التباين كما كان في نموذج تأثيرات مثبتة لمتغيري التجميع. ونحصل هنا على توقع متوسط المربعات لمتغيري التجميع بوضع حدود التباين، بدلا من مجاميع مربعات التأثيرات مقسومة على درجات الحرية، في الجدول (٢٩-٣). وبعد ذلك نقوم بجميع اختبارات وتقديرات تأثيرات المعالجات كما لو كانت تأثيرات متغيري التجميع مثبتة.

أحد متغيري التجميع عشوائي والآخر مثبت.

عندما يكون لأحد متغيري التجميع تأثيرات عشوائية وللآخر تأثيرات مثبتة، يصبح النموذج التجميعي بتأثيرات مثبتة للمعالجات خليطا من النموذجين (29.1) و (29.30). ومن جديد سوف لا يوجد تفسير في تحليل التباين أو في اختبارات وتقديرات تأثيرات المعالجات؟ وكمثال يكون فيه هذا النموذج المختلط مناسباً ،

نذكر دراسة قياسات متكررة، يكون فيها متغير التجميع في صفوف عناصر ، ومتغير التجميع في أعمدة هو موضع الترتيب للمعالجة.

(١٢-٢٩) مربعا يودين واللاتيني الإغريقي.

عندما لا يمكن استخدام تصميم المربع اللاتيني لأن عدد فصول الأعمدة أقل من عدد فصول الصفوف، فسيكون تصميم مربع يودين مفيدا . لنعتبر دراسة قياسات متكررة تشمل أربع معالجات وأربعة عناصر (متغير تجميع الصفوف). لنفرض الآن إمكانية إعطاء العنصر ثلاث معالجات، فقط، بسبب تأثيرات تعب جذية، وبالتالي لا يمكن أن يكون لمتغير التجميع في أعمدة (موضع الترتيب للمعالجات) إلا ثلاثة فصول. ونبين في الجدول (١٧-٢٩) تصميم مربع يودين المناسب لحالة كهذه. لاحظ أن هذا المخطط سيصبح مربعا لاتينيا بإضافة العمود (A, B, C, D). ولاحظ، أيضا، أن كل معالجة تقع مرة واحدة في كل موضع ترتيب، وأن كل زوج من المعالجات تظهران معا عددا متساويا من المرات ضمن العناصر. وهذه خواص متوفرة في كل مربعات يودين. وتحليل تصاميم مربع يودين أكثر تعقيدا من تحليل المربعات اللاتينية، إذ لا تُطبق جميع المعالجات في كل فصل من فصول متغير التجميع في صفوف. وتبقي العودة إلى مرجع كالمرجع 29.1 عند استخدام تصميم مربع يودين.

جدول (١٧-٢٩) توضيح لتصميم مربع يودين الوضع المرتب للمعالجة، العنصر

عنصر	معالجة وضع مرتب		
	1	2	3
1	A	B	C
2	D	A	B
3	C	D	A
4	E	C	C

وتصميم المربع اللاتيني - الإغريقي هو امتداد لتصميم المربع اللاتيني، وذلك عند الحاجة إلى استخدام ثلاثة متغيرات تجميع في الوقت نفسه. ويوضح الجدول (١٨-٢٩) تصميم مربع لاتيني - إغريقي في حالة $r = 4$ ، وتمثل الرموز $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ والمستويات الأربعة لمتغير تجميع ثالث. وهكذا فإن الخلية المقابلة للفصل الأول لكل من متغيرات التجميع الثلاثة ستلقى المعالجة A، وهكذا.

متغير تجميع في أعمدة

متغير تجميع في صفوف	1	2	3	4
1	$\alpha:A$	$\beta:B$	$\gamma:C$	$\delta:D$
2	$\beta:C$	$\alpha:D$	$\delta:A$	$\gamma:B$
3	$\delta:B$	$\gamma:A$	$\beta:D$	$\alpha:C$
4	$\gamma:D$	$\delta:C$	$\alpha:B$	$\beta:A$

ونلاحظ أن مستويات متغير التجميع الثالث تظهر مرة في كل صف ومرة في كل عمود، وأنها تظهر مرة واحدة ، فقط، مع كل معالجة. وفي التطبيق العملي تُستخدم تصاميم المربع اللاتيني - الإغريقي أقل بكثير من استخدام التصاميم الأخرى التي ناقشناها. وناقش المرجع [29.1] تحليل تصاميم المربع اللاتيني - الإغريقي.

مراجع ورد ذكرها

[29.1] Cochran, W.G., and G.M. Cox, *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

مسائل

(٢٩-١) شرح عالم في العلوم السلوكية سبب الاستخدام الواسع لتصاميم المربع اللاتيني: «في كثير من الأحيان نحتاج في العلوم السلوكية إلى استخدام تصاميم قياسات متكررة. وذلك لأن التشتت كبير بين العناصر البشرية. وبما أنه قد يوجد تأثير للترتيب في هذه الحالة، فإننا نستخدم تصاميم المربع اللاتيني لإلقاء أي انحياز يعود إلى تأثيرات الترتيب» علق.

(٢٩-٢) أ = مستخدماً تباديل عشوائية، اختر عشوائياً مربعاً لاتينياً 3 × 3. اعرض جميع الخطوات.

ب = مستخدماً تباديل عشوائية، اختر عشوائياً مربعاً لاتينياً 6 × 6. اعرض جميع الخطوات.

(٢٩-٣) مبيعات الأدوات المعدنية. نفذ رجل صناعة دراسة استطلاعية صغيرة لتأثير سعر أحد متحاته على مبيعات هذا المنتج في محلات الخردوات (محلات بيع الأدوات المعدنية). وبما أن الانتقال المتكرر من سعر إلى آخر ضمن المحل نفسه يمكن أن يلتبس على العملاء، فقد استخدم سعر واحد، فقط، في مخزن

واحد خلال فترة الدراسة وهي ستة شهور. وقد استُخدم 16 محلا في الدراسة. ولتخفيض تشتت الخطأ التحريبي بحيث يتوفر محل واحد لكل حجم مبيعات - فصل من فصول الموقع الجغرافي، فقد حُصِّصَت مستويات الأسعار الأربعة (1.79 \$ A، 1.69 \$ B، 1.49 \$ D، 1.59 \$ C) إلى المحلات وفقا لتصميم المربع اللاتيني المبين أدناه. وفيما يلي بيانات المبيعات (بآلاف الدولارات) خلال فترة الستة أشهر:

فصل الموقع الجغرافي (f)

حجم المبيعات i	شمال شرق	شمال غرب	جنوب شرق	جنوب غرب
الأصغر 1	1.2(B)	1.5(C)	1.0(A)	1.7(D)
2	1.4(A)	1.9(A)	1.6(B)	1.5(C)
3	2.8(C)	2.1(C)	2.7(D)	2.0(A)
الأكبر 4	3.4(D)	2.5(A)	2.9(C)	2.7(C)

أ - أوجد الرواسب لنموذج المربع اللاتيني (29.1) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية لخص نتائج حول صلاحية النموذج (29.1) هنا.

ب - نفذ اختبار توكي للتجميعية. استخدم $\alpha = 0.1$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة P للاختبار.

(٢٩-٤) بالإشارة إلى مسألة مبيعات الأدوات المعدنية (٢٩-٣). افترض أن نموذج المربع اللاتيني (29.1) مناسب.

أ - جهز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقترنة للمعالجات. ماذا يقترح الرسم حول تأثيرات المستويات الأربعة للأسعار على المبيعات.

ب - اختبر ما إذا كانت مستويات الأسعار تؤثر في حجم المبيعات. استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة P للاختبار؟

جـ - حلل طبيعة تأثير السعر على المبيعات عن طريق القيام بمقارنات ثنائية بين متوسطات المعالجات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. لخص نتائجك.

د - هل يبدو أن هناك علاقة خطية بين مستوى السعر ومتوسط المبيعات؟ هل يمكنك أن تختبر رسمياً وجود العلاقة الخطية؟ اشرح.

(٢٩ - ٥) بالإشارة إلى مسألتي مبيعات الأدوات المعدنية (٢٩-٣) و(٢٩-٤).

أ - احسب المقاييس الثلاثة للفعالية المقترنة في (29.18)

ب - هل كان تصميم القطاع العشوائي سيكون مناسباً هنا؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما هو متغير التحميم الأفضل؟.

(٢٩-٦) تقارير موجزة. قامت استشارية نظم معلومات إدارية بدراسة محدودة لخمسة تقارير يومية موجزة (A: أكثر قدر من التفاصيل، B, D, C, E: أقل قدر من التفاصيل). وقد استخدمت خمسة مندوبي مبيعات في الدراسة. وقد أعطى نوعاً واحداً من التقارير اليومية لمدة شهر ثم طُلب منه أن يضع رتبة تصنيف لفائدة التقرير على سلم 25 درجة. (0: لافائدة، 25: مفيد للغاية). وفوق فترة خمسة أشهر، استلم كل مندوب نوعاً من التقارير لمدة شهر وذلك وفقاً لتصميم المربع اللاتيني المبين أدناه. وفيما يلي الدرجات التي تمثل رتبة التصنيف المعطاة لفائدة التقرير.

شهر (i)

منسوب (i)	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز
هاريسون	21(D)	8(A)	17(C)	9(B)	16(E)
سميث	5(A)	10(E)	3(B)	12(C)	15(D)
كار ميكائيل	20(C)	10(B)	15(E)	22(D)	12(A)
لويب	4(B)	17(D)	3(A)	9(E)	10(C)
مونش	17(E)	16(C)	20(D)	7(A)	11(B)

أ - أوجد الرواسب لنموذج المربع اللاتيني (29.1) ورسومها في مقابل القيم التوقعية. جهاز، أيضا، احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك حول صلاحية النموذج (29.1) هنا.

ب - نفذ اختبار توكي للتجمعية؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟.

(٧-٢٩) بالإشارة إلى مسألة التقارير الموجزة (٦-٢٩). افترض أن نموذج المربع اللاتيني (29.1) مناسب.

أ - جهاز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدرة للمعالجات. ماذا يقترح الرسم حول تأثيرات الأنواع الخمسة من التقارير.

ب - اختر ما إذا كانت الأنواع الخمسة من التقارير تختلف في متوسط فالتنها؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟

ج - حلل فعالية الأنواع الخمسة من التقارير بالقيام بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عاظمي 95 بالمائة. لخص نتائجك.

(٨-٢٩) بالإشارة إلى مسألتي التقارير الموجزة (٦-٢٩)، (٧-٢٩).

أ - احسب المقاييس الثلاثة للفعالية المقدرة في (29.18).

ب - كم كان استخدام تصميم المربع اللاتيني هنا فعالا؟.

(٩-٢٩) بالإشارة إلى مسألتي مبيعات المواد المعدنية (٦-٢٩)، (٧-٢٩). افترض أن $\sigma = 15$.

ماهي قوة اختبار تأثيرات المعالجات في المسألة (٤-٢٩) ب إذا كان $\tau_1 = -0.4$ ، $\tau_2 = 0$ ، $\tau_3 = 1$ ، و $\tau_4 = 3$ ؟.

(١٠-٢٩) بالإشارة إلى مسألتي التقارير الموجزة (٦-٢٩)، (٧-٢٩). افترض أن $\sigma = 1.4$.

ماهي قوة اختبار تأثيرات المعالجات في المسألة (٧-٢٩) ب إذا كان $\tau_1 = -2$ ،

$\tau_2 = -1$ ، $\tau_3 = 0$ ، $\tau_4 = 1.5$ ، $\tau_5 = 1.5$ ؟.

(١١-٢٩) **تفاعل عقارين**. تمت دراسة استطلاعية حول تأثيرات تفاعل عقارين لحفز النمو في فتيات قصيرات القامة نتيجة لتأخر معين. ومن المعروف أن تأثير كل عقار بمفرده هو تأثير متواضع، إلا أن المركب من العقارين معا لم يدرس سابقا أبدا. وكان من المرغوب التجميع وفقا لكل من العنصر والفترة الزمنية، وقد تم وفقا لذلك الحصول على قياسات متكررة للمعالجات المختلفة مطبقة على العنصر نفسه. وقد استخدم تصميم المربع اللاتيني 4×4 ، المبين أدناه، ومن أجل أربعة عناصر، وأربع فترات زمنية، وأربع معالجات. وتألفت الفترات الزمنية الأربع من شهر واحد لكل منها، مفصولة بشهر لم تعط خلاله أي معالجة. وكانت المعالجات الأربع، A: لمعالجة (بلاسيبو)، B: العقار X لوحده، C: العقار Y لوحده، D: العقارين X و Y معا. وكان المتغير التابع هو الفرق بين معدلي النمو (بالستمر للشهر الواحد) خلال فترة المعالجة والفترة الأساس قبل بدء المعالجة. وفيما يلي نتائج الدراسة:

الفترة (١)

العنصر i	1	2	3	4
1	.02(A)	.15(B)	.45(D)	.18(C)
2	.27(B)	.24(C)	-.01(A)	.58(D)
3	.11(C)	.35(D)	.14(B)	-.03(A)
4	.48(D)	.04(A)	.18(C)	.22(B)

- أ - أوجد الرواسب في (29.5) وارسمها مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمتها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك.
- ب - نفذ اختبار توكي للتجميعية، مفترضا أن جميع التأثيرات مثبتة ومتجاهلا البنية العاملية للمعالجات؟ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P للاختبار؟.

(١٢-٢٩) بالإشارة إلى مسألة **تفاعل عقارين** (١١-٢٩)، افترض أن نموذج المربع اللاتيني (29.1) مناسب، بعد تعديله بحيث يكون للعناصر تأثيرات عشوائية

واستيعاب بنية عملية للمعاملات (العامل: μ ، المقار X : العامل B : المقار Y).

أ - اعرض النموذج الذي سيستخدم.

ب - اختر تأثيرات التفاعل بين المقارين . استخدم $\alpha = 0.15$. اعرض

البدايل، وقاعدة القرار، والنتيجة . ماهي القيمة P للاختبار؟.

ج - قدر متضادة التفاعل:

$$L = \left(\frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1 \right) - \left(\mu_4 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} \right) = \mu_2 - \mu_1 - \mu_4 + \mu_3$$

مستخدما معامل ثقة 90% . فسر نتيجتك.

(١٣-٢٩) بالإشارة إلى مسألة مبيعات المواد المعدنية (٣-٢٩).

أ - ضع نموذج انحدار مكافئ لنموذج المربع اللاتيني (29.1) مستخدما

0,1,1 كمفتريات مؤشرة.

ب - اختر باستخدام أسلوب الانحدار ما إذا كان مستوى السعر يؤثر في

متوسط المبيعات. استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدايل، وقاعدة القرار

والنتيجة.

ج - أوجد باستخدام أسلوب الانحدار 95 بالمائة فترة ثقة لـ $\pi_3 - \pi_4 = D$.

فسر تقديرك بفترة.

د - لنفرض أن الملاحظة $Y_{232} = 1.6$ مفقودة.

(i) استخدم أسلوب الانحدار لاختبار ما إذا كان مستوى السعر يؤثر

في متوسط المبيعات، اضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند

$\alpha = 0.05$. اعرض البدايل، وقاعدة القرار، والنتيجة.

(ii) استخدم أسلوب الانحدار لتقدير $\pi_1 - \pi_2 = D$ مستخدما 95%

فترة ثقة.

(١٤-٢٩) بالإشارة إلى مسألة التكاليف الموزعة (٦-٢٩). لنفرض أن الملاحظتين

$Y_{114} = 21$ و $Y_{453} = 10$ مفقودتان.

أ - استخدم أسلوب الانحدار لاختبار ما إذا كانت الأنواع الخمسة من

التقارير مختلفة في متوسط فعاليتها، استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.
 اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة.
 ب - استخدم أسلوب الانحدار لتقدير $\sigma_1 - \sigma_2 = D$ باستخدام 99% فرة ثقة.

(١٥-٢٩) **دعايات التلفاز.** تمت دراسة لتحديد ما إذا كان حجم الصوت في دعاية تلفازية يؤثر في التذكّر وما إذا كان هذا التأثير يختلف باختلاف المنتج. وقد اختير اثنان وثلاثون عنصراً، اثنان في كل من ١٦ فئة معرفة وفقاً للعمر (فصل 1 = الأحداث سنا، 2؛ 3؛ 4: الأكبر سنا) ووفقاً للوضع التعليمي (فصل 1: أدنى مستوى تعليمي 2، 3، 4 أعلى مستوى تعليمي). وقد تم تعريض كل عنصر إلى واحدة من أربع دعايات تلفازية (A: صوت مرتفع، منتج X؛ B: صوت منخفض، منتج X؛ C: صوت مرتفع، منتج Y؛ D: صوت منخفض، منتج Y) وفقاً لتصميم المربع اللاتيني المين أدناه. انطلوت الدراسة على دعايتين مختلفتين، واحدة لكل منتج. وخلال الأسبوع الذي تلا ذلك، طُلب من العناصر تذكّر كل شيء يمكنهم تذكره عن الدعاية. وقد بنيت الدرجات على عدد نقاط التعلم التي ذكرت. بعد معايرتها بصورة مناسبة. وفيما يلي النتائج:

فصل العمر i	المسرى التعليمي			
	1	2	3	4
1	(D)	(A)	(C)	(B)
	83	64	78	76
	86	69	75	74
	(B)	(C)	(A)	(D)
2	70	81	64	87
	76	75	60	81
	(C)	(B)	(D)	(A)
	67	67	76	64
3	74	61	81	57
	(A)	(D)	(B)	(C)
	56	72	63	64
	60	67	67	66

أ - أوجد الرواسب لنموذج المربع اللاتيني (29.1) وارسمها مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضاً، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك حول صلاحية النموذج المستخدم هنا.

ب - نفذ اختباراً رسمياً لما إذا كانت تأثيرات متخيري التحميم والمعالجات تجميعية أم لا، تجاهل البنية العاملة للمعالجات. استخدم مستوى المعنوية 0.01. α - اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. احسب القيمة P - للاختبار.

(١٦-٢٩) بالإشارة إلى مسألة دهانيات التفلاز (١٥-٢٩). افترض أن النموذج المناسب هنا هو نموذج المربع اللاتيني (29.1) بعد تعديله بحيث يسمح بمعالجات عاملية (عامل A : حجم الصوت، عامل B : المنتج).
أ - اعرض النموذج المستخدم.

ب - اعرض تأثيرات تفاعل المنتج - حجم الصوت؛ استخدم 0.01 = α .
اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - للاختبار؟
ج - اختبر التأثيرات الرئيسة للصوت والتأثيرات الرئيسة للمنتج. ومن أجل كل اختبار استخدم 0.01 = α ، واعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P - لكل اختبار؟

د - لدراسة طبيعية التأثيرات الرئيسة للصوت وللمنتج. قدر الفرق بين متوسطي المستويين لكل عامل. استخدم طريقة بونفيروني و 95% معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

(١٧-٢٩) ضعف الذاكرة. في تجربة لدراسة ضعف الذاكرة بثلاثة استبيانات مختلفة (A, B, C)، سئل تسعة عناصر في ثلاثة أوقات مختلفة يفصل بين وقت والذي يليه ثلاثة أشهر، عن عدد الرحلات إلى مركز تسويق خلال الأشهر الثلاثة الماضية. واستُخدم في كل مرة استبيان مختلف. واستُخدم

تصميم المربع اللاتيني المئين أدناه لتحديد ترتيب الاستبيان لكل عنصر، مع تخصيص ثلاثة عناصر عشوائيا لكل من أنماط ترتيب المعالجات. وفيما يلي البيانات حول عدد الرحلات إلى مركز التسويق كما أفاد بها العنصر.

فترة زمنية (j)

نمط i	عنصر	1	2	3
1	m = 1	40(C)	18(A)	30(B)
	m = 2	35(C)	25(A)	37(B)
	m = 3	31(C)	22(A)	28(B)
2	m = 1	10(B)	43(C)	33(A)
	m = 2	18(B)	49(C)	37(A)
	m = 3	15(B)	48(C)	29(A)
3	m = 1	7(A)	19(B)	59(C)
	m = 2	11(A)	24(B)	51(C)
	m = 3	19(A)	21(B)	62(C)

أوجد الرواسب لنموذج المربع اللاتيني الناقل (29.28) وارسمها في مقابل القيم التوقعية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك حول صلاحية النموذج (29.28) هنا.

(١٨-٢٩) بالإشارة إلى مسألة ضعف اللباكرة (١٧-٢٩). افترض أن نموذج المربع

اللاتيني الناقل (29.28) مناسب.

- أ - اختبر تأثيرات نمط ترتيب المعالجات، والفترة الزمنية، والاستبيان. ومن أجل كل اختبار، استخدم مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ واعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P لكل اختبار.
- ب - حلل التأثيرات الرئيسة للاستبيانات بتقدير جميع المقارنات الثنائية لموسطات المعالجات. استخدم طريقة توكي و 95% معامل ثقة عالي. لخص نتائجك.

تمارين

- (١٩-٢٩) استنبط توقع متوسطات المربعات في الجدول (٣-٢٩) الخاصة بنموذج المربع اللاتيني (29.1) مستخدما القاعدة (٢٧ - ٤).
- (٢٠-٢٩) استنبط توقع متوسطات المربعات لنموذج المربع اللاتيني (29.21) مع n من التكرارات، مستخدما القاعدة (٢٧-٤).
- (٢١-٢٩) استنبط توقع متوسطات المربعات لنموذج المربع اللاتيني (29.27) مع n من التكرارات، مستخدما القاعدة (٢٧-٤).
- (٢٢-٢٩) استنبط توقع متوسطات المربعات في الجدول (١٤-٢٩) لنموذج المربع اللاتيني الناقل (29.28) مع n من العناصر لكل نمط ترتيب للمعالجات وذلك باستخدام القاعدة (٢٧ - ٤).

الملحق ١

جداول

جدول (١-١) الاحتمالات المتجمعة للتوزيع الطبيعي المعياري.

العدد في صلب الجدول هو المساحة A تحت المنحنى الطبيعي المعياري من $-\infty$ إلى $Z(A)$ معينات مختارة، الاحتمال التجمع A



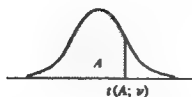
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9266	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

احتمال متجمع

معينات مختارة

A	.90	.95	.975	.98	.99	.995	.999
$z(A)$	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090

جدول (أ - ٧) قيم التوزيع t

العدد في سلب الجدول هو $t(A; v)$ حيث $P(t(v) \leq t(A; v)) = A$ 

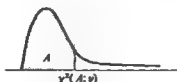
v	A						
	.60	.70	.80	.85	.90	.95	.975
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

تمة جدول (أ) ٢٠٠٠ مبيعات التوزيع

p	x						
	.98	.985	.99	.9925	.995	.9975	.9995
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

جدول (٣-١) قيم التوزيع χ^2

العدد في صلب الجدول هو $\chi^2(A; v)$ حيث $P(\chi^2(v) \leq \chi^2(A; v)) = A$



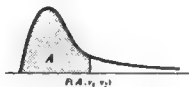
v	A									
	.005	.010	.025	.050	.100	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.004933	0.009877	0.020707	0.054129	0.105371	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010000	0.020000	0.050600	0.103823	0.211614	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.93	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.73	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Reprinted, with permission, from C.M. Thompson. "Table of Percentage Points of the Chi-Square Distribution." *Biometrika* 32 (1941), pp. 188-89.

جدول (١-٤) قيمات التوزيع F

العدد في صلب الجدول $F(A; v_1, v_2)$ حيث $P\{F(v_1, v_2) \leq F(A; v_1, v_2)\} = A$

مقياسات التوزيع F



$$F(A; v_1, v_2) = \frac{1}{F(1-A; v_2, v_1)}$$

تكملة جدول (١-٤) مئينات التوزيع F

د.ج. المقام A	د.ج. البسط								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 .50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03
.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241
.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963
.99	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022
.995	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091
.999	405,280	500,000	540,380	562,500	576,400	585,940	592,870	598,140	602,280
2 .50	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33
.90	8.53	9.00	9.16	9.26	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199
.999	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4
3 .50	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17
.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
.95	10.1	9.53	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
.975	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9
.999	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9
4 .50	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10
.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.03	4.01	3.98	3.95	3.94
.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1
.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5
5 .50	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06
.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8
.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	27.2
6 .50	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.02	1.03	1.04
.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4
.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7
7 .50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
.99	12.2	9.55	8.45	7.83	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3

تمة جدول (١-٤) مبيعات التوزيع

د. ح. المقام	د. ح. البسط								
	10	12	15	20	24	30	60	120	∞
1 .50	2.04	2.07	2.09	2.12	2.13	2.15	2.17	2.18	2.20
.90	60.2	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	62.8	63.1	63.3
.95	242	244	246	248	249	250	252	253	254
.975	969	977	985	993	997	1,001	1,010	1,014	1,018
.99	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,313	6,339	6,366
.995	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,253	25,359	25,464
.999	605,620	610,670	615,760	620,910	623,500	626,100	631,740	633,970	636,620
2 .50	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.43	1.44
.90	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
.95	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
.975	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
.99	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
.995	199	199	199	199	199	199	199	199	200
.999	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3 .50	1.18	1.20	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
.90	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
.95	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.57	8.55	8.53
.975	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9
.99	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.3	26.2	26.1
.995	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.1	42.0	41.8
.999	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.5	124.0	123.5
4 .50	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.18	1.18	1.19
.90	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
.95	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
.975	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.36	8.31	8.26
.99	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
.995	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.6	19.5	19.3
.999	48.1	47.4	46.8	46.1	45.8	45.4	44.7	44.4	44.1
5 .50	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.14	1.15
.90	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
.95	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.43	4.40	4.37
.975	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.12	6.07	6.02
.99	10.1	9.99	9.72	9.55	9.47	9.38	9.20	9.11	9.02
.995	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.4	12.3	12.1
.999	26.9	26.4	25.9	25.4	25.1	24.9	24.3	24.1	23.8
6 .50	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12
.90	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.76	2.74	2.72
.95	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.74	3.70	3.67
.975	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	4.96	4.90	4.85
.99	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88
.995	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.12	9.00	8.88
.999	18.4	18.0	17.6	17.1	16.9	16.7	16.2	16.0	15.7
7 .50	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10
.90	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.51	2.49	2.47
.95	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.30	3.27	3.23
.975	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.25	4.20	4.14
.99	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65
.995	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.31	7.19	7.08
.999	14.1	13.7	13.3	12.9	12.7	12.5	12.1	11.9	11.7

قائمة جداول (٤-١) قيمات التوزيع F

د.ح. المقام	د.ح. البسط									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8										
.50	0.499	0.757	0.860	0.915	0.948	0.971	0.988	1.00	1.01	
.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	
.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	
.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	
.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	
.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	
.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8	
9										
.50	0.494	0.749	0.852	0.906	0.939	0.962	0.978	0.990	1.00	
.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	
.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	
.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	
.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	
.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	
.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1	
10										
.50	0.490	0.743	0.845	0.899	0.932	0.954	0.971	0.983	0.992	
.90	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	
.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	
.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	
.99	10.0	7.36	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	
.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	
.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.96	
12										
.50	0.484	0.735	0.835	0.888	0.921	0.943	0.959	0.972	0.981	
.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	
.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	
.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	
.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	
.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	
.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	
15										
.50	0.478	0.726	0.826	0.878	0.911	0.933	0.949	0.960	0.970	
.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	
.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	
.975	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	
.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	
.995	10.8	7.70	6.48	5.90	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	
.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	
20										
.50	0.472	0.718	0.816	0.868	0.900	0.922	0.938	0.950	0.959	
.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	
.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	
.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	
.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	
.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	
.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	
24										
.50	0.469	0.714	0.812	0.863	0.895	0.917	0.932	0.944	0.953	
.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	
.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	
.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	
.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	
.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	
.999	14.0	9.34	7.35	6.39	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	

تمة جدول (١-٤) مبيعات التوزيع F

د.ح. المقام	د.ح. البسط								
	10	12	15	20	24	30	60	120	∞
8									
.50	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09
.90	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
.95	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.01	2.97	2.93
.975	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.78	3.73	3.67
.99	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.03	4.95	4.86
.995	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.18	6.06	5.95
.999	11.5	11.2	10.8	10.5	10.3	10.1	9.73	9.53	9.33
9									
.50	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.07	1.07	1.08
.90	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.21	2.18	2.16
.95	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.79	2.75	2.71
.975	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.45	3.39	3.33
.99	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31
.995	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.41	5.30	5.19
.999	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.19	8.00	7.81
10									
.50	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07
.90	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.11	2.08	2.06
.95	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.62	2.58	2.54
.975	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.20	3.14	3.08
.99	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91
.995	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.86	4.75	4.64
.999	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.12	6.94	6.76
12									
.50	0.999	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.05	1.05	1.06
.90	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.96	1.93	1.90
.95	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.38	2.34	2.30
.975	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.85	2.79	2.72
.99	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.54	3.45	3.36
.995	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.12	4.01	3.90
.999	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.76	5.59	5.42
15									
.50	0.977	0.989	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05
.90	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76
.95	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.16	2.11	2.07
.975	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.52	2.46	2.40
.99	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.05	2.96	2.87
.995	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.48	3.37	3.26
.999	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.64	4.48	4.31
20									
.50	0.966	0.977	0.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.03
.90	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.68	1.64	1.61
.95	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.95	1.90	1.84
.975	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.22	2.16	2.09
.99	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.61	2.52	2.42
.995	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	2.92	2.81	2.69
.999	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.70	3.54	3.38
24									
.50	0.961	0.972	0.983	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03
.90	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
.95	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
.975	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.08	2.01	1.94
.99	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.40	2.31	2.21
.995	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.66	2.55	2.43
.999	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.29	3.14	2.97

تتمة جدول (٤-١) قيمات التوزيع F

د.ح. المقام	د.ح. البسط								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30 .50	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.927	0.939	0.948
.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
60 .50	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.917	0.928	0.937
.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
.975	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
.999	12.0	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
120 .50	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.912	0.923	0.932
.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
.999	11.4	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38
∞ .50	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.907	0.918	0.927
.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88
.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62
.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10

تتمة جدول (١-٤) منتهات التوزيع F

د.ج. المقام	د.ج. البسط								
	10	12	15	20	24	30	60	120	∞
30 .50	0.955	0.966	0.978	0.989	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02
.90	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.54	1.50	1.46
.95	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.74	1.68	1.62
.975	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	1.94	1.87	1.79
.99	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.21	2.11	2.01
.995	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.42	2.30	2.18
.999	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	2.92	2.76	2.59
60 .50	0.945	0.956	0.967	0.978	0.983	0.989	1.00	1.01	1.01
.90	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.40	1.35	1.29
.95	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.53	1.47	1.39
.975	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.67	1.58	1.48
.99	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.84	1.73	1.60
.995	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	1.96	1.83	1.69
.999	3.54	3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.25	2.08	1.89
120 .50	0.939	0.950	0.961	0.972	0.978	0.983	0.994	1.00	1.01
.90	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.32	1.26	1.19
.95	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.43	1.35	1.25
.975	2.16	2.05	1.95	1.82	1.76	1.69	1.53	1.43	1.31
.99	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.66	1.53	1.38
.995	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.75	1.61	1.43
.999	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	1.95	1.77	1.54
∞ .50	0.934	0.945	0.956	0.967	0.972	0.978	0.989	0.994	1.00
.90	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.24	1.17	1.09
.95	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.32	1.22	1.09
.975	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.39	1.27	1.09
.99	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.47	1.32	1.09
.995	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.53	1.36	1.09
.999	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.66	1.45	1.09

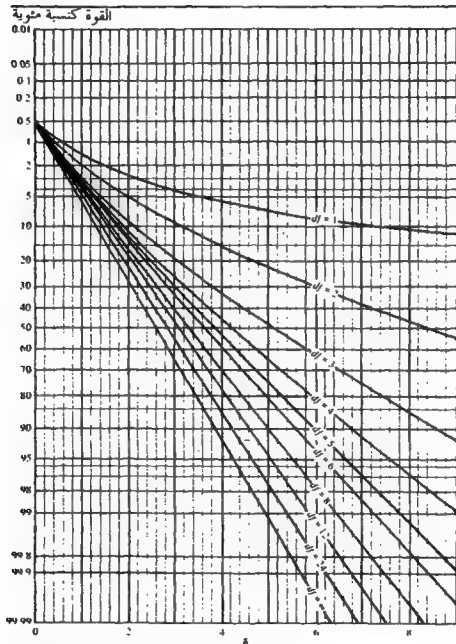
Reprinted from Table 5 of Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*,

المصدر:

Volume 2, 1972, published by the Cambridge University Press, on behalf of The Biometrika Society, by permission of the authors and publishers.

تمة جدول (٥-١) دالة القوة للاختبار t ذي الجانبين

$$\alpha = .01$$



المصدر : Reprinted, with permission, from D.B. Owen, *Handbook of Statistical Tables* (Reading, Mass. : Addison Wesley Publishing, 1962), pp. 32, 34. Courtesy of U.S. Atomic Energy Commission.

جدول (٦-١) حذا اختبار دورين - واتسون

مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$

n	p - 1 = 1		p - 1 = 2		p - 1 = 3		p - 1 = 4		p - 1 = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

تكملة جدول (٦-١) حدًا اختبار دورين - واتسون

مستوى الأهمية $\alpha = 0.01$

n	p - 1 = 1		p - 1 = 2		p - 1 = 3		p - 1 = 4		p - 1 = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

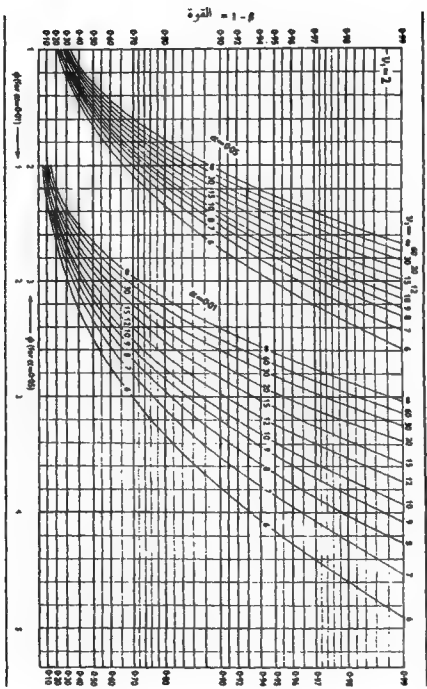
المصدر: Reprinted, with permission, from J. Durbin and G.S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II", *Biometrika* 38 (1951), pp. 159-78.

جدول (٧-١) جدول التحويل z لمعامل الارتباط

r ρ	z' ζ	r ρ	z' ζ	r ρ	z' ζ	r ρ	z' ζ
.00	.0000	.25	.2554	.50	.5493	.75	.973
.01	.0100	.26	.2661	.51	.5627	.76	.996
.02	.0200	.27	.2769	.52	.5763	.77	1.020
.03	.0300	.28	.2877	.53	.5901	.78	1.045
.04	.0400	.29	.2986	.54	.6042	.79	1.071
.05	.0500	.30	.3095	.55	.6184	.80	1.099
.06	.0601	.31	.3205	.56	.6328	.81	1.127
.07	.0701	.32	.3316	.57	.6475	.82	1.157
.08	.0802	.33	.3428	.58	.6625	.83	1.188
.09	.0902	.34	.3541	.59	.6777	.84	1.221
.10	.1003	.35	.3654	.60	.6931	.85	1.256
.11	.1104	.36	.3769	.61	.7089	.86	1.293
.12	.1206	.37	.3884	.62	.7250	.87	1.333
.13	.1307	.38	.4001	.63	.7414	.88	1.376
.14	.1409	.39	.4118	.64	.7582	.89	1.422
.15	.1511	.40	.4236	.65	.7753	.90	1.472
.16	.1614	.41	.4356	.66	.7928	.91	1.528
.17	.1717	.42	.4477	.67	.8107	.92	1.589
.18	.1820	.43	.4599	.68	.8291	.93	1.658
.19	.1923	.44	.4722	.69	.8480	.94	1.738
.20	.2027	.45	.4847	.70	.8673	.95	1.832
.21	.2132	.46	.4973	.71	.8872	.96	1.946
.22	.2237	.47	.5101	.72	.9076	.97	2.092
.23	.2342	.48	.5230	.73	.9287	.98	2.298
.24	.2448	.49	.5361	.74	.9505	.99	2.647

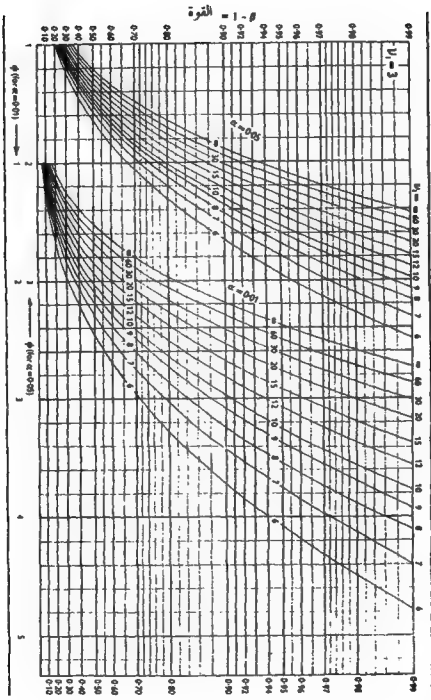
المصدر: : Abridged from Table 14 of Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, volume 1, 1966, published by the Cambridge University Press, on behalf of The Biometrika Society, by permission of the authors and publishers.

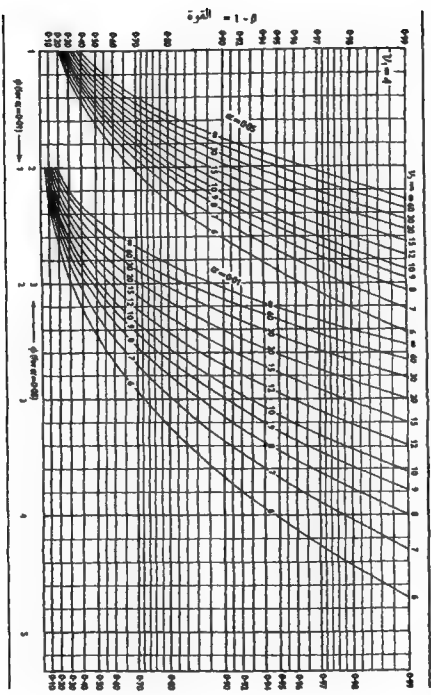
جدول (٨-١) دالة القوة لتحويل نماذج (توزيع كاتوانات) دالة لتحويل نماذج عامل (



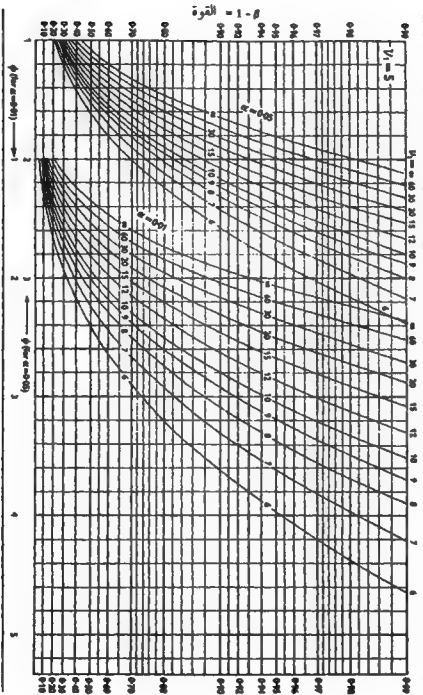
الملحق (١) جدول

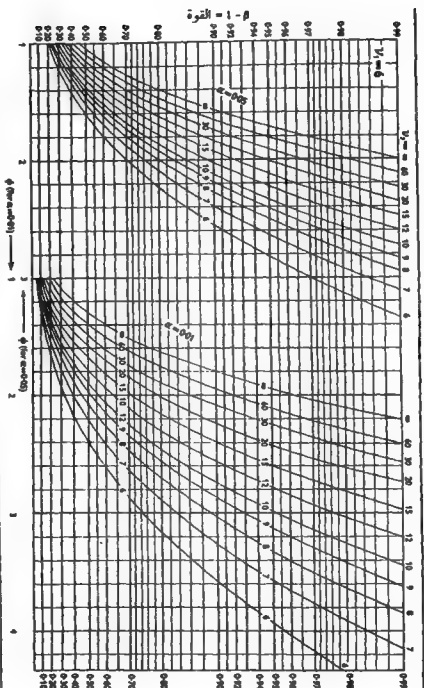
كلمة جدول (١) دالة القوة لفصل نماذج (نموذج) حقيقة لمعلمات عامل





تمت بحمدك (٨ - ١) دالة القوة لتعاطل تباين (نموذج) تأثيرات عشوائية عاملي





العدد في صلب الجدول هو $q(1 - \alpha, r, \gamma) = 1 - \alpha$ حيث $q(1 - \alpha, r, \gamma) = P\{q(r, \gamma) \leq q(1 - \alpha, r, \gamma)\}$

$$1 - \alpha = .90$$

r	r																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	8.03	13.4	16.4	18.5	20.2	21.5	22.6	23.6	24.5	25.3	25.9	26.5	27.1	27.6	28.1	28.5	29.0	29.3	29.7	
2	4.13	5.73	6.77	7.54	8.14	8.63	9.05	9.41	9.72	10.0	10.3	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	11.4	11.5	11.7	
3	3.33	4.47	5.20	5.74	6.16	6.51	6.81	7.06	7.29	7.49	7.67	7.83	7.98	8.12	8.25	8.37	8.48	8.58	8.66	
4	3.01	3.98	4.59	5.03	5.39	5.68	5.93	6.14	6.33	6.49	6.65	6.78	6.91	7.02	7.13	7.23	7.33	7.41	7.50	
5	2.85	3.72	4.26	4.56	4.84	5.06	5.26	5.46	5.65	5.82	5.97	6.10	6.22	6.34	6.44	6.54	6.63	6.71	6.79	
6	2.75	3.56	4.07	4.44	4.73	4.97	5.17	5.34	5.50	5.64	5.76	5.87	5.98	6.07	6.16	6.25	6.32	6.40	6.47	
7	2.68	3.45	3.93	4.28	4.55	4.78	4.97	5.14	5.28	5.41	5.53	5.64	5.74	5.83	5.91	5.99	6.06	6.13	6.19	
8	2.63	3.37	3.83	4.17	4.43	4.65	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.80	5.87	5.93	6.00	
9	2.59	3.32	3.76	4.08	4.34	4.54	4.72	4.87	5.01	5.13	5.23	5.33	5.42	5.51	5.58	5.66	5.72	5.79	5.85	
10	2.56	3.27	3.70	4.02	4.26	4.47	4.64	4.78	4.91	5.03	5.13	5.23	5.32	5.40	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	
11	2.54	3.23	3.66	3.96	4.20	4.40	4.57	4.71	4.84	4.95	5.05	5.14	5.23	5.31	5.38	5.45	5.51	5.57	5.63	
12	2.52	3.20	3.62	3.92	4.16	4.35	4.51	4.65	4.78	4.89	4.99	5.08	5.16	5.24	5.31	5.37	5.44	5.49	5.55	
13	2.50	3.18	3.59	3.88	4.12	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.93	5.02	5.10	5.18	5.25	5.31	5.37	5.43	5.48	
14	2.49	3.16	3.56	3.85	4.08	4.27	4.42	4.56	4.68	4.79	4.88	4.97	5.05	5.12	5.19	5.26	5.32	5.37	5.43	
15	2.48	3.14	3.54	3.83	4.05	4.23	4.39	4.52	4.64	4.75	4.84	4.93	5.01	5.08	5.15	5.21	5.27	5.32	5.38	
16	2.47	3.12	3.52	3.80	4.02	4.21	4.36	4.49	4.61	4.71	4.81	4.89	4.97	5.04	5.11	5.17	5.23	5.28	5.33	
17	2.46	3.11	3.50	3.78	4.00	4.18	4.33	4.46	4.58	4.68	4.77	4.86	4.93	5.01	5.07	5.13	5.19	5.24	5.30	
18	2.45	3.10	3.49	3.77	3.97	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.74	4.83	4.90	4.98	5.04	5.10	5.16	5.21	5.26	
19	2.45	3.09	3.47	3.75	3.97	4.14	4.29	4.42	4.53	4.63	4.72	4.80	4.88	4.95	5.01	5.07	5.13	5.18	5.23	
20	2.44	3.08	3.46	3.74	3.95	4.12	4.27	4.40	4.51	4.61	4.70	4.78	4.85	4.92	4.99	5.05	5.10	5.16	5.20	
24	2.42	3.05	3.42	3.69	3.90	4.07	4.21	4.34	4.44	4.54	4.63	4.71	4.78	4.85	4.91	4.97	5.02	5.07	5.12	
30	2.40	3.02	3.39	3.65	3.85	4.02	4.16	4.28	4.38	4.47	4.56	4.64	4.71	4.77	4.83	4.89	4.94	4.99	5.05	
40	2.38	2.99	3.35	3.60	3.80	3.96	4.10	4.22	4.32	4.41	4.49	4.56	4.63	4.69	4.75	4.81	4.86	4.90	4.95	
60	2.36	2.96	3.31	3.56	3.75	3.91	4.04	4.16	4.25	4.34	4.42	4.49	4.56	4.62	4.67	4.73	4.78	4.82	4.86	
120	2.34	2.93	3.28	3.52	3.71	3.86	3.99	4.10	4.19	4.28	4.35	4.42	4.48	4.54	4.60	4.65	4.69	4.74	4.78	
∞	2.33	2.90	3.24	3.48	3.66	3.81	3.93	4.04	4.13	4.21	4.28	4.35	4.41	4.47	4.52	4.57	4.61	4.65	4.69	

(٩-١) قيمت توزيع الدى المتفرع

1 - α = .95																				
F																				
p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6	
2	4.50	6.31	6.80	7.18	7.47	7.68	7.84	7.97	8.08	8.17	8.25	8.32	8.38	8.44	8.49	8.54	8.58	8.62	8.66	
3	3.00	4.10	4.35	4.54	4.68	4.79	4.88	4.96	5.03	5.09	5.14	5.19	5.23	5.27	5.31	5.35	5.38	5.42	5.45	
4	2.35	3.00	3.16	3.29	3.40	3.49	3.57	3.64	3.70	3.75	3.79	3.83	3.87	3.90	3.93	3.96	3.99	4.02	4.05	
5	1.94	2.40	2.52	2.63	2.72	2.79	2.85	2.90	2.95	2.99	3.03	3.06	3.09	3.12	3.15	3.18	3.21	3.24	3.26	
6	1.63	2.00	2.09	2.17	2.24	2.30	2.35	2.39	2.43	2.46	2.49	2.52	2.55	2.58	2.61	2.63	2.66	2.68	2.70	
7	1.36	1.64	1.71	1.77	1.82	1.86	1.90	1.93	1.96	1.98	2.01	2.03	2.05	2.07	2.09	2.11	2.13	2.15	2.17	
8	1.15	1.36	1.41	1.45	1.48	1.51	1.54	1.56	1.58	1.60	1.62	1.64	1.65	1.67	1.68	1.69	1.71	1.72	1.73	
9	1.00	1.19	1.23	1.26	1.28	1.30	1.32	1.34	1.35	1.37	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	1.46	
10	0.88	1.05	1.08	1.11	1.13	1.15	1.17	1.18	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	
11	0.78	0.93	0.96	0.98	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	
12	0.70	0.83	0.86	0.88	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	
13	0.63	0.75	0.77	0.79	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	
14	0.57	0.68	0.70	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	
15	0.51	0.61	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79	
16	0.46	0.55	0.57	0.58	0.59	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	0.73	
17	0.41	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	
18	0.37	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60	0.61	0.62	
19	0.33	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	
20	0.29	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	
24	0.22	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	
26	0.19	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	
30	0.15	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	
40	0.10	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	
60	0.06	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	
120	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.53	4.58	4.63	4.67	4.71	4.75	4.78	4.81	4.84	4.87	

[illegible]

جدول (١) - جدول تحديد حجم العينة في تجربة تحليل تباين (فرد ج تأثيرات مدية استويات عام)

		القيمة $1 - \beta = .70$									
		$\Delta \sigma^2 = 1.0$	$\Delta \sigma^2 = 1.25$	$\Delta \sigma^2 = 1.50$	$\Delta \sigma^2 = 1.75$	$\Delta \sigma^2 = 2.0$	$\Delta \sigma^2 = 2.5$	$\Delta \sigma^2 = 3.0$			
r	α	σ^2		σ^2		σ^2		σ^2		σ^2	
		σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2
2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
3	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
4	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
5	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
6	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
7	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
8	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
9	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
10	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01

الملحق (٢) جدول

القيمة $1 - \beta = .80$

		القيمة $1 - \beta = .80$									
		$\Delta \sigma^2 = 1.0$	$\Delta \sigma^2 = 1.25$	$\Delta \sigma^2 = 1.50$	$\Delta \sigma^2 = 1.75$	$\Delta \sigma^2 = 2.0$	$\Delta \sigma^2 = 2.5$	$\Delta \sigma^2 = 3.0$			
r	α	σ^2		σ^2		σ^2		σ^2		σ^2	
		σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2	σ^2
2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
3	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
4	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
5	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
6	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
7	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
8	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
9	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
10	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01

جدول 1 - $\beta = 90$																				
		$\Delta/r = 1.0$		$\Delta/r = 1.25$		$\Delta/r = 1.50$		$\Delta/r = 1.75$		$\Delta/r = 2.0$		$\Delta/r = 2.5$		$\Delta/r = 3.0$						
r	a	a										a								
		.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01			
2	14	18	23	32	9	12	15	21	7	9	11	13	4	6	7	10	3	4	5	6
3	17	22	27	37	11	15	18	24	8	11	12	15	5	7	9	12	4	5	6	7
4	20	25	30	40	13	16	20	27	10	12	14	16	6	8	10	13	5	6	7	9
5	21	27	32	45	14	18	22	30	11	14	16	17	7	9	10	13	5	6	7	9
6	22	29	34	46	15	19	23	31	11	14	17	17	7	9	10	13	5	6	7	9
7	23	31	36	48	16	20	24	33	11	14	17	17	7	9	10	13	5	6	7	9
8	24	32	38	50	17	21	25	34	12	15	18	18	8	10	11	14	5	6	7	9
9	27	33	40	52	17	22	26	34	13	16	18	18	8	10	11	14	5	6	7	9
10	28	33	41	54	18	23	27	35	13	16	19	19	8	10	11	15	5	7	8	10

القيمة $1 - \beta = 95$

		$\Delta/r = 1.0$										$\Delta/r = 1.25$										$\Delta/r = 1.50$										$\Delta/r = 1.75$										$\Delta/r = 2.0$										$\Delta/r = 2.5$										$\Delta/r = 3.0$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
		α										α										α										α										α										α										α										α										α																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
r	a	α										α										α										α										α										α										α										α										α										α																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																		
		.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2

Reprinted, with permission, from T.L. Bracker, M.A. Moran, and W.J. Zimmer, "Tables of Sample Sizes in the Analysis of Variance," *المجلد: Journal of Quality Technology* 2 (1970), pp. 156-64. Copyright American Society for Quality Control, Inc.

جدول (١١ - ١) جدول $\lambda \sqrt{n} / \sigma$ لتحديد حجم العينة من أجل إلهاد "المفضل" متوسط بين متوسطات r من المجموعات.

عدد المجموعات r	احتمال التحديد الصحيح $(1 - \alpha)$		
	.90	.95	.99
2	1.8124	2.3262	3.2900
3	2.2302	2.7101	3.6173
4	2.4516	2.9162	3.7970
5	2.5997	3.0552	3.9196
6	2.7100	3.1591	4.0121
7	2.7972	3.2417	4.0861
8	2.8691	3.3099	4.1475
9	2.9301	3.3679	4.1999
10	2.9829	3.4182	4.2456

المصدر: Reprinted, with permission, from R.E. Bechhofer, "A Single-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with Known Variances," *The Annals of Mathematical Statistics* 25 (1954), pp. 16-39.

جدول (١٧-١) مئينات توزيع الاحصاء H

العدد في صلب الجدول هو $H(1 - \alpha; r, df)$ حيث $P\{H \leq H(1 - \alpha; r, df)\} = 1 - \alpha$

$1 - \alpha = .95$

	r											
df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	39.0	87.5	142	202	266	333	403	475	550	626	704	
3	15.4	27.8	39.2	50.7	62.0	72.9	83.5	93.9	104	114	124	
4	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.1	44.6	48.0	51.4	
5	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5	28.2	29.9	
6	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6	19.7	20.7	
7	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3	15.1	15.8	
8	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7	12.2	12.7	
9	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91	10.3	10.7	
10	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66	9.01	9.34	
12	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00	7.25	7.48	
15	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59	5.77	5.93	
20	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37	4.49	4.59	
30	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29	3.36	3.39	
60	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30	2.33	2.36	
∞	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	

$1 - \alpha = .99$

	r											
df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	199	448	729	1,036	1,362	1,705	2,063	2,432	2,813	3,204	3,605	
3	47.5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361	
4	23.2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120	
5	14.9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60	
6	11.1	15.5	19.1	22	25	27	30	32	34	36	37	
7	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20	22	23	24	26	27	
8	7.30	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9	19.8	21	
9	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3	16.0	16.6	
10	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9	13.4	13.9	
12	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9	10.2	10.6	
15	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5	7.8	8.0	
20	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	5.8	5.9	
30	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	
60	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7	
∞	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	

المصدر: Reprinted, with permission, from H.A. David, "Upper 5 and 1% Points of the Maximum F-Ratio", *Biometrika* 39 (1952), pp. 422-24.

جدول (١- ١٣) مربعات لاتينية قياسية مختارة

3×3						4×4																	
1			1			1			1														
A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C	A B C			
B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A	B C A			
C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B	C A B			
5×5			6×6			7×7																	
A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E			
B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C	B A D E C			
C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D	C E A B D			
D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A	D E C B A			
E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B	E C D A B			
8×8			9×9																				
A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H	A B C D E F G H			
B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A	B C D E F G H A			
C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B	C D E F G H A B			
D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C	D E F G H A B C			
E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D	E F G H A B C D			
F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E	F G H A B C D E			
G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F	G H A B C D E F			
H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G	H A B C D E F G			

الملحق ب

مجموعات من البيانات

مجموعة بيانات (ب - ١) SENIC

الهدف الرئيس من دراسة فعالية التحكم باتان مستشفى (مشروع SENIC) هو تحديد ما إذا كانت برامج مسح وضبط الانتانات قد خفضت من معدلات الانتانات المكتسبة من مستشفى في مستشفيات الولايات المتحدة. وتتألف مجموعة البيانات هذه من عينة عشوائية من 113 مستشفى اختيرت من بين الـ 338 مستشفى التي تناولها المسح.

ويضمن كل سطر من مجموعة البيانات رقم تسلسل وأحد عشر متغيراً لمستشفى مفردة. والبيانات المقدمة هنا خاصة بفترة الدراسة ١٩٧٦/٧٥م، والمتغيرات الـ ١٢ هي:

رقم المتغير	اسم للمتغير	وصف المتغير
١	رقم تسلسل	1 - 113
٢	طول فترة الإقامة	متوسط فترة الإقامة لجميع المرضى في مستشفى (بالأيام)
٣	العمر	متوسط عمر المرضى (بالسنوات)
٤	مخاطرة الإصابة	تقدير لاحتمال اكتساب انتان في المستشفى في المتوسط (كنسبة مئوية)
٥	نسبة الزرع الروتيني	نسبة عدد حالات الزرع إلى عدد المرضى بدون إشارات أو أعراض انتان مكتسب من المستشفى، مضروبة بمائة.
٦	نسبة تصوير الصدر	نسبة عدد الصور التي تمّت بأشعة X إلى عدد المرضى بدون إشارات أو أعراض ذات الرئة الروتيني بأشعة X

مضروبة بمائة.

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
٧	عدد الأسرة	متوسط عدد الأسرة في المستشفى خلال فترة الدراسة
٨	الانتماء إلى مدرسة طبية	نعم = ١ لا = ٢
٩	المنطقة	منطقة جغرافية حيث: $1 = NE, 2 = NC, 3 = S, 4 = W$
١٠	متوسط التعداد اليومي	متوسط عدد المرضى اليومي في مستشفى خلال فترة الدراسة
١١	عدد الممرضات	العدد المتوسط للممرضات التطبيقات المجازات والمسجلات المتفرغات، خلال فترة الدراسة (عدد المتفرغات + نصف عدد المتفرغات جزئياً)
١٢	التسهيلات والخدمات اليومية	النسبة المئوية لـ 35 من التسهيلات والخدمات الممكنة التي يوفرها المستشفى

المصدر: Special Issue, "The SENIC Project". *American Journal of Epidemiology* 111 (1980), pp. 465-653.

Data obtained from: Robert W. Haley, M.D., Hospital Infections Program, Center for Infectious Diseases, Centers for Disease Control, Atlanta, Georgia 30333.

1	٢	3	4	٥	٦	7	8	9	10	11	12
1	7.13	55.7	4.1	9.0	39.6	279	2	4	207	241	60.0
2	8.82	58.2	1.6	3.8	51.7	80	2	2	51	52	40.0
3	8.34	56.9	2.7	8.1	74.0	107	2	3	82	54	20.0
4	8.95	53.7	5.6	18.9	122.8	147	2	4	53	148	40.0
5	11.20	56.5	5.7	34.5	88.9	180	2	1	134	151	40.0
6	9.76	50.9	5.1	21.9	97.0	150	2	2	147	106	40.0
7	9.68	57.8	4.6	16.7	79.0	186	2	3	151	129	40.0
8	11.18	45.7	5.4	60.5	85.8	640	1	2	399	360	60.0
9	8.67	48.2	4.3	24.4	90.8	182	2	3	130	118	40.0
10	8.84	56.3	6.3	29.6	82.6	85	2	1	59	66	40.0
11	11.07	53.2	4.9	28.5	122.0	768	1	1	591	656	80.0
12	8.30	57.2	4.3	6.8	83.8	167	2	3	105	59	40.0
13	12.78	56.8	7.7	46.0	116.9	322	1	1	252	349	57.1
14	7.58	56.7	3.7	20.8	88.0	97	2	2	59	79	37.1
15	9.00	56.3	4.2	14.6	76.4	72	2	3	61	38	17.1
16	11.08	50.2	5.3	18.6	63.6	387	2	3	326	405	57.1
17	8.28	48.1	4.5	26.0	101.8	108	2	4	84	73	37.1
18	11.62	53.9	6.4	25.5	99.2	133	2	1	113	101	37.1
19	9.06	52.8	4.2	6.9	75.9	134	2	2	103	125	37.1
20	9.35	53.8	4.1	15.9	80.9	833	2	3	547	519	77.1
21	7.53	42.0	4.2	23.1	98.9	95	2	4	47	49	17.1
22	10.24	49.0	4.8	36.3	112.6	195	2	2	163	170	37.1
23	9.78	52.3	5.0	17.6	95.9	270	1	1	240	198	57.1
24	9.84	62.2	4.8	12.0	82.3	600	2	3	468	497	57.1
25	9.20	52.2	4.0	17.5	71.1	298	1	4	244	236	57.1
26	8.28	49.5	3.9	12.0	113.1	546	1	2	413	436	57.1
27	9.31	47.2	8.5	30.2	101.3	170	2	1	124	173	37.1
28	8.19	52.1	3.2	10.8	59.2	176	2	1	156	88	37.1
29	11.65	54.5	4.4	18.6	96.1	248	2	1	217	189	37.1
30	9.89	50.5	8.9	12.7	103.6	167	2	2	113	106	37.1
31	11.03	49.9	5.0	19.7	102.1	318	2	1	270	335	57.1
32	9.84	53.0	5.2	17.7	72.6	210	2	2	200	239	54.3
33	11.77	54.1	5.3	17.3	56.0	196	2	1	164	165	34.3
34	13.59	54.0	6.1	24.2	111.7	312	2	1	258	169	54.3
35	9.74	54.4	6.3	11.4	76.1	221	2	2	170	172	54.3
36	10.33	55.8	5.0	21.2	104.3	266	2	1	181	149	54.3
37	9.97	58.2	2.8	16.5	76.5	90	2	2	69	42	34.3
38	7.84	49.1	4.6	7.1	87.9	60	2	3	50	45	34.3
39	10.47	53.2	4.1	5.7	69.1	196	2	2	168	153	54.3
40	8.16	60.9	1.3	1.9	58.0	73	2	3	49	21	14.3
41	8.48	51.1	3.7	12.1	92.8	166	2	3	145	118	34.3
42	10.72	53.8	4.7	23.2	94.1	113	2	3	90	107	34.3
43	11.20	45.0	3.0	7.0	78.9	130	2	3	95	56	34.3
44	10.12	51.7	5.6	14.9	79.1	362	1	3	313	264	54.3
45	8.37	30.7	5.5	15.1	84.8	115	2	2	96	88	34.3
46	10.16	54.2	4.6	8.4	51.5	831	1	4	581	629	74.3
47	19.56	59.9	6.5	17.2	113.7	306	2	1	273	172	51.4
48	10.90	57.2	5.5	10.6	71.9	593	2	2	446	211	51.4
49	7.67	51.7	1.8	2.5	40.4	106	2	3	93	35	11.4
50	8.88	51.5	4.2	10.1	86.9	305	2	3	238	197	51.4
51	11.48	57.6	5.6	20.3	82.0	252	2	1	207	251	51.4
52	9.23	51.6	4.3	11.6	42.6	620	2	2	413	420	71.4
53	11.41	61.1	7.6	16.6	97.9	535	2	3	330	273	51.4
54	12.07	43.7	7.8	52.4	105.3	157	2	2	115	76	31.4
55	8.63	54.0	3.1	8.4	56.2	76	2	1	39	44	31.4
56	11.15	56.5	3.9	7.7	73.9	281	2	1	217	199	51.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
57	7.14	59.0	3.7	2.6	75.8	70	2	4	37	35	31.4
58	7.65	47.1	4.3	16.4	65.7	318	2	4	265	314	51.4
59	10.73	50.6	3.9	19.3	101.0	445	1	2	374	345	51.4
60	11.46	56.9	4.5	15.6	97.7	191	2	3	153	132	31.4
61	10.42	58.0	3.4	8.0	59.0	119	2	1	67	64	31.4
62	11.18	51.0	5.7	18.8	55.9	595	1	2	546	392	68.6
63	7.93	64.1	5.4	7.5	98.1	68	2	4	42	49	28.6
64	9.66	52.1	4.4	9.9	98.3	83	2	2	66	95	28.6
65	7.78	45.5	5.0	20.9	71.6	489	2	3	391	329	48.6
66	9.42	50.6	4.3	24.8	62.8	508	2	1	421	528	48.6
67	10.02	49.5	4.4	8.3	93.0	265	2	2	191	202	48.6
68	8.58	55.0	3.7	7.4	95.9	304	2	3	268	218	48.6
69	9.61	52.4	4.5	6.9	87.2	487	2	3	404	220	48.6
70	8.03	54.2	3.5	24.3	87.3	97	2	1	65	55	88.6
71	7.39	51.0	4.2	14.6	88.4	72	2	2	38	67	28.6
72	7.08	52.0	2.0	12.3	56.4	87	2	3	52	57	28.6
73	9.53	51.5	5.2	15.0	65.7	298	2	3	241	193	88.6
74	10.05	52.0	4.5	36.7	87.5	184	1	1	144	151	68.6
75	8.45	38.8	3.4	12.9	85.0	235	2	2	143	124	48.6
76	6.70	48.6	4.5	13.0	80.8	76	2	4	51	79	28.6
77	8.90	49.7	2.9	12.7	86.9	52	2	1	37	35	28.6
78	10.23	53.2	4.9	9.9	77.9	752	1	2	595	446	68.6
79	8.88	55.8	4.4	14.1	76.8	237	2	2	165	182	48.6
80	10.30	59.6	5.1	27.8	88.9	175	2	2	113	75	45.7
81	10.79	44.2	2.9	2.6	56.6	441	1	2	320	196	65.7
82	7.94	49.5	3.5	6.2	92.3	195	2	2	139	116	45.7
83	7.63	52.1	5.5	11.4	61.1	197	2	4	109	110	45.7
84	8.77	54.5	4.7	5.2	47.0	143	2	4	85	87	25.7
85	8.09	56.9	1.7	7.6	56.9	92	2	3	61	61	45.7
86	9.05	51.2	4.1	20.5	79.8	195	2	3	127	112	45.7
87	7.91	52.8	2.9	11.9	79.5	477	2	3	349	188	65.7
88	10.39	54.6	4.3	14.0	88.3	353	2	2	223	200	65.7
89	9.36	54.1	4.8	18.3	90.6	165	2	1	127	158	45.7
90	11.41	50.4	5.8	23.8	73.0	424	1	3	359	335	45.7
91	8.86	51.3	2.9	9.5	87.5	100	2	3	65	53	25.7
92	8.93	56.0	2.0	6.2	72.5	95	2	3	59	56	25.7
93	8.92	53.9	1.3	2.2	79.5	56	2	2	40	14	5.7
94	8.15	54.9	5.3	12.3	79.8	99	2	4	55	71	25.7
95	9.77	50.2	5.3	15.7	89.7	154	2	2	123	144	25.7
96	8.54	56.1	2.5	27.0	82.5	98	2	1	57	75	45.7
97	8.66	52.8	3.8	6.8	69.5	246	2	3	178	177	45.7
98	12.01	52.8	4.8	10.8	96.9	298	2	1	237	115	45.7
99	7.95	51.8	2.3	4.6	54.9	163	2	3	128	93	42.9
100	10.15	51.9	6.2	16.4	59.2	568	1	3	452	371	62.9
101	9.76	53.2	2.6	6.9	80.1	64	2	4	47	55	22.9
102	9.89	45.2	4.3	11.8	106.7	190	2	1	141	112	42.9
103	7.14	57.6	2.7	13.1	92.6	92	2	4	40	50	22.9
104	13.95	65.9	6.4	15.6	133.5	356	2	1	308	182	62.9
105	9.44	52.5	4.5	10.9	58.5	297	2	3	230	263	42.9
106	10.80	63.9	2.9	1.6	57.4	130	2	3	69	62	22.9
107	7.14	51.7	1.4	4.1	45.7	115	2	3	90	19	22.9
108	8.02	55.0	2.1	3.8	46.5	91	2	2	44	32	22.9
109	11.80	53.8	5.7	9.1	116.9	571	1	2	441	469	62.9
110	9.50	49.3	5.8	42.0	70.9	98	2	3	68	44	22.9
111	7.70	56.9	4.4	12.2	67.9	129	2	4	85	134	62.9
112	17.94	56.2	5.9	26.4	91.8	835	1	1	791	407	62.9
113	9.41	59.5	3.1	20.6	91.7	29	2	3	20	22	22.9

مجموعة بيانات (ب - ٧) مساحات حضرية إحصائية قياسية في الولايات المتحدة الأمريكية SMSA

تقدم مجموعة البيانات هذه معلومات حول ١٤١ مساحة حضرية إحصائية قياسية ضخمة في الولايات المتحدة (SMSA). وتشمل المساحة الإحصائية الحضرية القياسية مدينة (أو مدن) بحجم سكاني محدد وتشكل من مدينة مركزية والمقاطعة (أو المقاطعات) التي تقع فيها المدينة، بالإضافة إلى مقاطعات مجاورة عندما تحقق العلاقات الاجتماعية والاقتصادية بين المقاطعات المركزية والمقاطعات المجاورة معايير محددة من التكامل والمميزات الحضرية. ويمكن أن تتضمن SMSA عددا من المدن يصل إلى ثلاثة مدن، كما يمكن أن تعتبر حدود ولاية.

ويتضمن كل سطر من مجموعة البيانات رقم تسلسلي كما يقدم معلومات حول ١١ من المتغيرات الأخرى الخاصة بمساحة بمفردها (SMSA). وتعلق المعلومات بصورة عامة بالعامين ١٩٧٦ و ١٩٧٧ والمتغيرات الـ ١٢ هي:

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
١	رقم تسلسل	١ - ١٤١
٢	مساحة الأرض	بالأميال المربعة
٣	عدد السكان	كما هو مقدّر عام ١٩٧٧ م (بالآلاف)
٤	النسبة المئوية من السكان في مدن مركزية	النسبة المئوية من سكان الـ SMSA عام ١٩٧٦ م في مدينة أو مدن مركزية.
٥	النسبة المئوية لسكان	النسبة المئوية من سكان الـ SMSA عام ١٩٧٦ م ممن أعمارهم ٦٥ سنة فأكثر
٦	عدد الأطباء العاملين	عدد الأطباء غير الاتحاديين الناشطين مهنيا حتى ٣١ ديسمبر ١٩٧٧ م.
٧	عدد الأسرة في مستشفى	العدد الكلي للأسيرة، وأسيرة الأطفال وأسيرة الأطفال الشبيهة بالسلّة خلال عام ١٩٧٧ م.

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
٨	النسبة المئوية للمتخرجين من المرحلة الثانوية	النسبة المئوية من السكان البالغين (أشخاص أعمارهم ٢٥ سنة فأكثر) الذين أتموا ١٢ سنة تعليم أو أكثر وفقا لتعداد عام ١٩٧٠ السكاني
٩	القوة العاملة المدنية	العدد الكلي للأشخاص في القوة العاملة المدنية (أشخاص أعمارهم ١٦ سنة فأكثر مصنفون كمعاملين أو كعاطلين عن العمل) في ١٩٧٧ م (بالآلاف)
١٠	الدخل الشخصي الإجمالي	الدخل الراهن الإجمالي الذي يتلقاه المقيمون في الـ SMSA من جميع المصادر عام ١٩٧٦ م قبل اقتطاع ضريبة الدخل والضرائب الشخصية للضمان الاجتماعي وبرامج التأمين الاجتماعي الأخرى (عمالين الدولارات)
١١	عدد الجرائم الخطرة	العدد الكلي للجرائم الخطرة في ١٩٧٧، بما في ذلك جرائم القتل، الاغتصاب، السرقة، الاعتداء، السطو على المنازل، اللصوصية وسرقة السيارات، كما أفادت عنها وكالات الأمن.
١٢	منطقة جغرافية	تصنيف المنطقة الجغرافية هو التصنيف المستعمل في مكتب التعداد في الولايات المتحدة، حيث:
4 = W و 3 = S، 2 = NC، 1 = NE		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1384	9387	78.1	12.3	25427	69678	50.1	4083.9	72100	709234	1
2	4069	7031	44.0	10.0	15389	39499	62.0	3353.6	52737	499813	4
3	3719	7017	43.9	9.4	13326	43292	53.9	3305.9	54542	393162	2
4	3553	6794	37.4	10.7	9726	33731	50.6	2046.3	33216	198102	1
5	3916	4370	29.9	8.0	6402	24167	52.2	1966.7	32906	294466	2
6	2480	3182	31.5	10.3	8502	16751	46.1	1514.5	26573	255162	4
7	3815	3033	23.1	8.7	7360	16941	48.3	1541.9	25463	177355	3
8	1218	2648	0.0	8.0	5255	22137	62.9	1213.3	21524	127567	1
9	8360	2673	46.3	8.2	4047	14347	53.4	1321.2	18350	193125	3
10	6784	2512	60.1	6.3	4562	14333	51.7	1272.7	18221	162976	3
11	4935	2380	21.8	11.0	4071	17752	47.8	1061.2	16120	137479	2
12	3049	2294	19.5	12.1	4005	21149	53.4	987.5	15826	99989	1
13	2259	2147	38.6	9.3	3141	16485	44.4	966.8	14246	139214	3
14	4647	2037	31.5	9.2	3918	12815	65.1	1032.2	14342	112642	2
15	1008	1949	16.4	10.3	4004	16704	55.9	935.5	15953	104446	1
16	1519	1950	31.8	10.5	4694	12543	54.6	906.0	14484	102816	2
17	4326	1832	23.6	7.3	3064	9976	50.4	867.2	12107	106482	3
18	782	1801	28.4	7.8	3119	8656	70.5	915.2	12591	113821	4
19	4261	1683	48.6	9.7	3396	7552	85.3	644.3	10392	112359	4
20	4651	1464	30.8	7.7	3380	8517	67.4	729.2	10375	116881	4
21	2042	1441	24.5	16.5	4071	10039	51.9	681.7	10166	116304	3
22	4226	1427	38.1	9.0	3285	5392	47.8	699.8	10918	91399	4
23	1456	1427	44.7	10.4	2484	8535	56.8	710.4	10104	65495	2
24	2045	1380	37.2	21.4	1949	8863	50.7	543.2	7889	89257	3
25	2149	1375	29.8	10.6	2530	8354	48.4	617.6	9037	68319	2
26	1590	1313	30.1	10.9	2296	9988	50.4	565.7	8411	67965	1
27	27293	1306	25.3	12.3	2018	4323	57.4	510.6	7989	99292	4
28	3341	1293	35.8	10.1	2289	7593	59.9	656.3	9106	61510	2
29	9155	1254	53.8	11.1	2280	4450	60.1	575.2	7746	107370	4
30	1300	1217	47.4	6.8	2794	4989	69.0	410.8	9215	76570	4
31	3072	1144	68.0	9.3	2181	7497	56.0	549.6	7736	61381	2
32	1967	1133	51.1	8.0	2520	8447	45.8	440.5	7034	69285	3
33	3650	1121	34.6	11.1	2358	6224	62.9	539.3	7792	77316	4
34	2440	1087	49.4	8.4	1874	7706	59.9	510.7	6458	62603	2
35	2527	1025	78.7	8.4	1740	7464	44.5	391.1	5582	62694	3
36	2946	970	26.9	10.3	2053	6604	56.3	450.4	6946	54854	1
37	3434	929	28.9	8.3	1844	3215	65.1	422.6	5909	72410	4
38	1392	887	37.2	9.8	1579	4087	46.5	394.8	5705	45642	3
39	2298	886	76.2	9.0	1644	7473	48.2	394.6	5185	52094	3
40	1219	864	31.7	20.6	1396	6158	55.4	352.8	5879	48109	3
41	1708	833	24.0	8.0	1062	5315	54.2	347.5	5489	52606	2
42	8545	822	29.7	7.3	1604	3485	67.6	349.3	4655	49111	4
43	3358	805	35.1	11.3	1649	5512	44.9	359.1	4041	42786	3
44	2624	794	30.4	12.2	1532	4730	55.2	354.5	5094	30771	1
45	2187	777	47.0	10.2	1098	4342	51.9	335.4	5142	46213	2
46	3214	774	47.7	9.4	1285	3459	48.3	401.7	4924	34941	3
47	3481	769	48.5	9.7	1496	5620	59.4	362.3	4798	44513	3
48	4080	773	59.6	9.9	1597	7496	47.3	380.9	4400	33936	3
49	594	723	100.0	6.0	1240	2819	66.0	319.9	5181	46984	4
50	3199	694	80.4	8.7	983	4749	50.8	292.4	4127	43810	3
51	903	661	37.3	9.6	968	4064	55.6	293.3	4102	34725	2
52	2419	647	27.8	9.9	1250	2870	57.8	284.8	3840	30829	1
53	938	644	48.1	7.4	614	3016	50.0	280.9	4177	35104	2
54	1951	629	28.4	14.5	994	4843	47.9	271.5	3647	14868	1
55	1490	624	33.1	11.9	827	3618	47.4	300.2	4144	19090	1
56	5677	610	55.8	10.5	760	3883	56.2	292.0	4035	32146	3
57	1525	597	55.7	8.3	751	3234	44.9	318.5	3777	37470	3
58	2528	593	19.2	10.2	798	3135	55.4	274.1	3489	44442	3
59	312	594	19.5	7.5	769	2463	55.0	298.7	4352	29104	1
60	1377	492	63.8	8.7	1254	5160	62.7	272.4	3725	32271	2
61	1420	576	32.6	9.5	833	2950	54.0	280.8	3553	26445	2
62	47	544	41.9	11.9	745	3352	36.3	254.9	3915	29157	1
63	1023	541	35.1	10.0	639	3144	52.1	234.1	3437	22111	2
64	2115	526	19.9	9.1	674	2296	38.8	253.3	2942	30684	3
65	1182	514	32.4	7.4	518	2515	52.4	214.8	3427	35201	2
66	1165	516	14.3	8.4	746	4277	54.0	237.1	3724	31558	3
67	479	492	6.9	10.9	787	5160	60.1	218.4	3483	24781	1
68	1553	487	56.0	8.0	2207	4931	52.0	237.2	2991	24269	3
69	2023	477	22.1	21.8	752	2317	55.7	184.2	3283	36418	3
70	2766	474	67.9	7.7	679	3873	56.3	224.0	2598	29067	3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
71	5966	472	39.5	9.6	737	1907	52.7	246.6	3087	38205	4
72	1863	448	50.4	7.7	674	2989	63.8	194.8	2747	25159	4
73	192	452	60.5	10.8	617	1789	44.1	212.6	3158	27161	1
74	2240	455	67.0	10.3	1123	2547	63.1	183.6	2598	41649	4
75	2277	455	39.5	7.5	512	1788	61.9	221.1	2853	20053	2
76	1630	449	61.9	10.7	724	4395	50.0	198.0	2445	17596	3
77	1617	435	71.0	6.9	518	2031	54.1	197.9	2617	31339	3
78	1057	435	90.7	6.1	479	2551	51.1	165.4	2012	25450	3
79	1624	429	13.4	11.0	802	2930	55.4	207.8	2885	14985	1
80	1676	423	36.8	9.2	305	3297	60.7	156.3	2609	26266	4
81	2818	425	48.5	9.3	540	2694	42.3	172.8	2162	22574	3
82	2846	408	24.9	10.7	427	2864	39.1	169.1	1987	10425	3
83	4883	402	72.4	7.3	873	2236	64.9	185.2	2353	28171	4
84	964	401	24.9	10.6	427	3192	52.2	174.7	2646	15981	2
85	2109	403	41.2	10.3	520	2539	45.2	183.1	2308	16240	3
86	2449	395	68.4	9.6	681	2864	63.2	207.4	2651	25149	2
87	2418	385	31.7	6.1	836	2159	48.0	145.6	1992	25044	3
88	1445	374	30.3	6.8	598	6456	50.6	164.7	2201	26428	3
89	1704	375	52.1	10.5	379	2491	55.6	173.2	2462	18599	2
90	1750	370	49.3	9.7	446	3472	58.2	176.5	2429	16529	2
91	1489	369	58.8	9.5	911	5720	56.5	175.1	2264	26032	3
92	8152	363	22.3	9.1	405	1234	51.7	165.8	2257	28351	4
93	2207	364	57.3	9.7	356	2167	45.3	165.9	2331	19130	3
94	7874	360	44.4	6.9	398	1365	65.2	174.2	2410	33687	4
95	455	364	75.2	6.6	425	3879	51.6	163.0	2088	15423	3
96	1803	362	35.3	10.4	483	2137	53.7	168.9	2666	16405	2
97	2363	356	53.1	10.6	565	2717	49.8	146.4	1994	19212	3
98	1435	352	13.4	11.7	342	1076	44.7	156.8	2165	11273	1
99	946	348	16.4	11.1	244	1455	43.9	163.8	2178	8116	1
100	1136	333	58.6	9.7	448	2630	60.1	171.4	2394	20465	2
101	2458	327	39.0	12.2	365	5430	49.9	136.9	1842	9325	1
102	228	317	31.1	10.2	667	3179	52.8	156.5	2264	19410	1
103	1758	310	56.8	11.3	565	2081	65.3	131.2	1939	17379	4
104	1198	313	55.1	8.0	1171	3877	71.2	172.3	2038	18676	2
105	1412	311	39.2	11.3	488	1837	49.4	154.2	2090	25714	4
106	2871	306	19.9	11.3	470	2531	58.8	133.1	1782	11161	1
107	842	302	26.3	13.4	423	1929	43.3	145.5	2010	7499	1
108	1526	303	71.7	7.7	413	1636	47.1	125.8	1692	20038	3
109	1758	297	33.2	11.6	296	2652	45.3	114.4	1641	12447	3
110	1651	296	64.6	8.9	774	5431	86.1	136.9	1724	14448	3
111	1493	294	64.8	8.9	863	3289	53.7	154.7	1787	15871	3
112	1680	294	59.8	9.5	471	4652	80.9	116.1	1851	18651	4
113	2710	288	43.7	6.2	357	1277	72.8	110.9	1639	18173	4
114	1975	291	46.5	12.4	405	2894	51.5	135.8	1853	12787	2
115	1920	291	49.8	7.8	283	1306	53.2	126.9	1553	12315	3
116	1404	289	38.5	10.0	299	1766	56.2	138.6	1776	17175	2
117	2737	287	65.0	10.3	602	1462	71.3	131.4	1980	18208	4
118	1780	287	18.8	8.0	739	3581	45.9	120.4	1616	14536	3
119	909	277	43.2	11.5	307	1309	54.2	131.9	1762	13722	2
120	1858	277	24.3	13.7	354	1442	44.3	116.9	1507	19133	3
121	3324	275	49.7	8.4	373	929	62.5	120.5	1918	14776	4
122	1697	274	23.8	7.2	336	1610	51.0	105.9	1354	19317	3
123	813	272	46.0	9.8	293	1693	58.4	119.9	1648	10402	1
124	7397	267	47.3	12.1	355	2042	56.2	113.7	1654	12273	2
125	1165	268	43.7	9.4	450	2070	57.5	129.4	1719	16226	2
126	802	264	52.4	9.8	392	1425	52.2	129.6	1816	13230	2
127	1770	268	14.8	12.2	285	2404	44.1	106.7	1537	4205	1
128	495	264	50.7	7.8	238	1177	52.6	119.5	1641	8398	2
129	1255	261	26.0	10.7	458	1646	51.6	113.0	1725	10208	3
130	1148	269	45.3	11.1	891	5790	34.0	227.0	2510	29237	1
131	1509	263	37.6	12.8	1087	4900	51.4	319.8	2982	29058	1
132	2013	254	61.7	9.7	273	1484	50.9	106.7	1412	14446	3
133	711	250	42.4	6.1	1411	3859	47.5	131.0	1790	16428	2
134	471	251	46.3	8.6	219	1128	47.0	105.3	1458	13474	2
135	4552	249	54.4	9.1	329	719	61.9	118.0	1386	15596	4
136	1400	242	50.8	8.0	290	1271	45.7	104.6	1351	10381	3
137	1511	236	38.7	10.7	348	1093	58.4	127.2	1452	14476	4
138	1543	232	39.6	8.1	139	481	30.3	90.6	769	8436	3
139	1011	233	37.8	10.5	264	944	70.7	93.2	1237	14018	3
140	813	232	13.4	10.9	371	4355	58.0	97.0	1589	8420	1
141	654	231	28.8	3.9	140	1296	55.1	66.9	1148	15884	3

مجموعات بيانات (ب - ٣) تجربة تأثيرات المخدرات

تقدم هذه المجموعة من البيانات نتائج مأخوذة من تجربة تُرست فيها آثار المخدر على سلوك الفئران. السلوك المدروس هو معدل ضغط فأر محروم من الماء لذراع رافعة كي يحصل على الماء. وقد نُفذت التجربة في جزئين. ويحدد المتغير ٢ جزئي الدراسة (1,2).

في الجزء I من الدراسة استخدم ١٢ من الفئران البيضاء الذكور من السلالة نفسها ولها تقريبا الوزن نفسه. ويحدد المتغير ٣ كل فأر (1,2,...,12)، وقبل التجربة دُرّب كل فأر على ضغط ذراع رافعة للحصول على الماء حتى بلوغ معدل مستقر للضغط. ودُرّس في هذه التجربة عاملان - المعدل الابتدائي لضغط الذراع (عامل A) واستخدم المخدر (عامل B). وقد صُنّفت الفئران الـ ١٢ إلى إحدى ثلاث مجموعات وفقا للمعدل الابتدائي لضغط الذراع (1, 2, 3). المستوى الأول هو معدل بطيء المستوى، الثاني معدل معتدل، والمستوى الثالث معدل سريع، وقد عُرِفَت المستويات بحيث يصنّف ثلث الفئران إلى كل من المستويات الثلاثة.

ودُرّست أربعة مستويات لجرعة المخدر، بما في ذلك المستوى 0 المؤلف من محلول ملحي. ويحدد المتغير ٥ جرعة المخدر (1,2,3,4). وكل مستويات الجرعة محددة بدلالة المليليغرام من المخدر لكل كيلو غرام من وزن الفأر.

وبعد ساعة من حقن المخدر بدأ دورة تجريبية يتلقى الفأر خلالها الماء في كل مرة بعد الضغط الثاني للذراع. وسنرمز لهذا البرنامج التنفيذي بالرمز 2 - FR. وقد تلقى كل فأر المستويات الأربعة من الجرعات بعزيب عشوائي. وقد أعطيت كل جرعة مخدر مرتين لكل فأر بما أتاح وحدتي مشاهدة لكل معالجة. ويحدد المتغير ٦ وحدة المشاهدة (1,2).

وقد عُرِفَ متغير الاستجابة بأنه عدد المرات، الكلي لضغط الذراع مقسوما على الزمن المنصرم بالتواني خلال دورة تجريبية لمعالجة معينة. وللتفسير ٧ هو متغير الاستجابة.

وفي الجزء الثاني من الدراسة استخدم ١٢ فأرا ذكرا أبيض آخر من السلالة نفسها والوزن نفسه تقريبا المستخدم في الجزء I. ويحدد المتغير 2 هذا الجزء من الدراسة والمتغير ٣ يحدد الفئران الـ ١٢ الإضافية (13,24). والتصميم التجريبي للجزء II من

الدراسة كان متطابقا بالضبط مع الجزء 1، باستثناء أن كل فأر يتلقى الماء في كل مرة بعد الضغط الخامس للذراع. وسنرمز لهذا البرنامج التنفيذي بالرمز 5 - FR. ويحدد المتغير ٢ البرنامج التنفيذي باعتبار أن الجزء 1 من الدراسة استخدم البرنامج 2 - FR بينما استخدم جزؤها الثاني البرنامج 5 - FR. وهكذا يشكل البرنامج التنفيذي عاملا آخر (العامل C) تمت دراسته في التجربة المركبة مجزئتها. ونلخص فيما يلي المتغيرات لهذا التصميم التجريبي:

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
١	رقم تسلسلي	1 - 192
٢	جزء الدراسة (العامل C : برنامج تنفيذي)	الجزء الأول 2 - FR : 1 الجزء الثاني 2 - FR : 2
٣	هوية الفأر	1 - 24
٤	المعدل الابتدائي لضغط الذراع (عامل A)	بطيء: 1 معتدل: 2 سريع: 3
٥	مستوى الجرعة (مغ/كغ) (عامل B)	محلول ملحي 0 : 1 2 : 0.5 3 : 1.0 4 : 1.8
٦	وحدة مشاهدة	1, 2
٧	متغير الاستجابة - معدل ضغط الذراع (عدد المرات الكلي لضغط الذراع مقسوما على الزمن المنصرم بالثواني)	

المصدر: T.G. Heffner, R.B. Drawbaugh, and M.J. Zigmond, "Amphetamine and Operant Behavior in Rats: Relationship between Drug Effect and Control Response Rate," *Journal of Comparative and Physiological Psychology* 86 (1974), pp. 1031-43.

تعريف مصادر SMSA

1 NEW YORK, NY	48 NASHVILLE, TN	95 NEWPORT NEWS, VA
2 LOS ANGELES, CA	49 HONOLULU, HI	96 PEORIA, IL
3 CHICAGO, IL	50 JACKSONVILLE, FL	97 SHREVEPORT, LA
4 PHILADELPHIA, PA	51 AKRON, OH	98 YORK, PA
5 DETROIT, MI	52 SYRACUSE, NY	99 LANCASTER, PA
6 SAN FRANCISCO, CA	53 GARY, IN	100 DES MOINES, IA
7 WASHINGTON, DC	54 NORTHEAST, PA	101 UTICA, NY
8 NASSAU, NY	55 ALLENTOWN, PA	102 TRENTON, NJ
9 DALLAS, TX	56 TULSA, OK	103 SPOKANE, WA
10 HOUSTON, TX	57 CHARLOTTE, NC	104 MADISON, WI
11 ST. LOUIS, MO	58 ORLANDO, FL	105 STOCKTON, CA
12 PITTSBURG, PA	59 NEW BRUNSWICK, NJ	106 BINGHAMTON, NY
13 BALTIMORE, MD	60 OMAHA, NE	107 READING, PA
14 MINNEAPOLIS, MN	61 GRAND RAPIDS, MI	108 CORPUS CHRISTI, TX
15 NEWARK, NJ	62 JERSEY CITY, NJ	109 HUNTINGTON, WV
16 CLEVELAND, OH	63 YOUNGSTOWN, OH	110 JACKSON, MS
17 ATLANTA, GA	64 GREENVILLE, SC	111 LEXINGTON, KY
18 ANAHEIM, CA	65 FLINT, MI	112 VALLEJO, CA
19 SAN DIEGO, CA	66 WILMINGTON, DE	113 COLORADO SPRINGS, CO
20 DENVER, CO	67 LONG BRANCH, NJ	114 EVANSVILLE, IN
21 MIAMI, FL	68 RALEIGH, NC	115 HUNTSVILLE, AL
22 SEATTLE, WA	69 W. PALM BEACH, FL	116 APPLETON, WI
23 MILWAUKEE, WI	70 AUSTIN, TX	117 SANTA BARBARA, CA
24 TAMPA, FL	71 FRESNO, CA	118 AUGUSTA, GA
25 CINCINNATI, OH	72 OXNARD, CA	119 SOUTH BEND, IN
26 BUFFALO, NY	73 PATERSON, NJ	120 LAKELAND, FL
27 RIVERSIDE, CA	74 TUCSON, AZ	121 SALINAS, CA
28 KANSAS CITY, MO	75 LANSING, MI	122 PENSACOLA, FL
29 PHOENIX, AZ	76 KNOXVILLE, TN	123 ERIE, PA
30 SAN JOSE, CA	77 BATON ROUGE, LA	124 DULUTH, MN
31 INDIANAPOLIS, IN	78 EL PASO, TX	125 KALAMAZOO, MI
32 NEW ORLEANS, LA	79 HARRISBURG, PA	126 ROCKFORD, IL
33 PORTLAND, OR	80 TACOMA, WA	127 JOHNSTOWN, PA
34 COLUMBUS, OH	81 MOBILE, AL	128 LORAIN, OH
35 SAN ANTONIO, TX	82 JOHNSON CITY, TN	129 CHARLESTON, WV
36 ROCHESTER, NY	83 ALBUQUERQUE, NM	130 SPRINGFIELD, MA
37 SACRAMENTO, CA	84 CANTON, OH	131 WORCESTER, MA
38 LOUISVILLE, KY	85 CHATANOOGA, TN	132 MONTGOMERY, AL
39 MEMPHIS, TN	86 WICHITA, KS	133 ANN ARBOR, MI
40 FT. LAUDERDALE, FL	87 CHARLESTON, SC	134 HAMILTON, OH
41 DAYTON, OH	88 COLUMBIA, SC	135 EUCENE, OR
42 SALT LAKE CITY, UT	89 DAVENPORT, IA	136 MACOM, GA
43 BIRMINGHAM, AL	90 FORT WAYNE, IN	137 MODESTO, CA
44 ALBANY, NY	91 LITTLE ROCK, AR	138 MCALLEN, TX
45 TOLEDO, OH	92 BAKERSFIELD, CA	139 MELBOURNE, NY
46 GREENSBORO, NC	93 BEAUMONT, TX	140 POUCHKEEPSIE, NY
47 OKLAHOMA CITY, OK	94 LAS VEGAS, NV	141 FAYETTEVILLE, NC

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	.81	49	1	1	1	1	2	.84
2	1	1	1	2	1	.80	50	1	1	1	2	2	.85
3	1	1	1	3	1	.82	51	1	1	1	3	2	.88
4	1	1	1	4	1	.50	52	1	1	1	4	2	.58
5	1	2	1	1	1	.77	53	1	2	1	1	2	.72
6	1	2	1	2	1	.78	54	1	2	1	2	2	.73
7	1	2	1	3	1	.79	55	1	2	1	3	2	.74
8	1	2	1	4	1	.51	56	1	2	1	4	2	.42
9	1	3	1	1	1	.80	57	1	3	1	1	2	.73
10	1	3	1	2	1	.82	58	1	3	1	2	2	.76
11	1	3	1	3	1	.83	59	1	3	1	3	2	.75
12	1	3	1	4	1	.52	60	1	3	1	4	2	.48
13	1	4	1	1	1	.95	61	1	4	1	1	2	.89
14	1	4	1	2	1	.95	62	1	4	1	2	2	.90
15	1	4	1	3	1	.91	63	1	4	1	3	2	.97
16	1	4	1	4	1	.60	64	1	4	1	4	2	.67
17	1	5	2	1	1	1.03	65	1	5	2	1	2	1.11
18	1	5	2	2	1	1.13	66	1	5	2	2	2	1.02
19	1	5	2	3	1	1.04	67	1	5	2	3	2	1.12
20	1	5	2	4	1	.82	68	1	5	2	4	2	.75
21	1	6	2	1	1	.96	69	1	6	2	1	2	1.01
22	1	6	2	2	1	.93	70	1	6	2	2	2	1.05
23	1	6	2	3	1	1.02	71	1	6	2	3	2	.95
24	1	6	2	4	1	.63	72	1	6	2	4	2	.72
25	1	7	2	1	1	.98	73	1	7	2	1	2	1.05
26	1	7	2	2	1	1.00	74	1	7	2	2	2	1.07
27	1	7	2	3	1	.98	75	1	7	2	3	2	1.05
28	1	7	2	4	1	.74	76	1	7	2	4	2	.79
29	1	8	2	1	1	1.17	77	1	8	2	1	2	1.12
30	1	8	2	2	1	1.20	78	1	8	2	2	2	1.13
31	1	8	2	3	1	1.18	79	1	8	2	3	2	1.11
32	1	8	2	4	1	.91	80	1	8	2	4	2	.83
33	1	9	3	1	1	1.20	81	1	9	3	1	2	1.28
34	1	9	3	2	1	1.24	82	1	9	3	2	2	1.17
35	1	9	3	3	1	1.27	83	1	9	3	3	2	1.21
36	1	9	3	4	1	.96	84	1	9	3	4	2	.91
37	1	10	3	1	1	1.25	85	1	10	3	1	2	1.21
38	1	10	3	2	1	1.23	86	1	10	3	2	2	1.31
39	1	10	3	3	1	1.30	87	1	10	3	3	2	1.22
40	1	10	3	4	1	1.01	88	1	10	3	4	2	.93
41	1	11	3	1	1	1.23	89	1	11	3	1	2	1.16
42	1	11	3	2	1	1.20	90	1	11	3	2	2	1.15
43	1	11	3	3	1	1.18	91	1	11	3	3	2	1.23
44	1	11	3	4	1	.95	92	1	11	3	4	2	1.02
45	1	12	3	1	1	1.31	93	1	12	3	1	2	1.40
46	1	12	3	2	1	1.42	94	1	12	3	2	2	1.33
47	1	12	3	3	1	1.41	95	1	12	3	3	2	1.35
48	1	12	3	4	1	1.08	96	1	12	3	4	2	1.20

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
97	2	13	1	1	1	2.18	145	2	13	1	1	2	2.26
98	2	13	1	2	1	2.44	146	2	13	1	2	2	2.40
99	2	13	1	3	1	1.92	147	2	13	1	3	2	1.99
100	2	13	1	4	1	.92	148	2	13	1	4	2	.99
101	2	14	1	1	1	2.02	149	2	14	1	1	2	1.96
102	2	14	1	2	1	2.20	150	2	14	1	2	2	2.18
103	2	14	1	3	1	1.75	151	2	14	1	3	2	1.81
104	2	14	1	4	1	.82	152	2	14	1	4	2	.78
105	2	15	1	1	1	2.06	153	2	15	1	1	2	2.10
106	2	15	1	2	1	2.28	154	2	15	1	2	2	2.24
107	2	15	1	3	1	1.86	155	2	15	1	3	2	1.92
108	2	15	1	4	1	.80	156	2	15	1	4	2	.88
109	2	16	1	1	1	2.28	157	2	16	1	1	2	2.35
110	2	16	1	2	1	2.46	158	2	16	1	2	2	2.49
111	2	16	1	3	1	1.90	159	2	16	1	3	2	1.95
112	2	16	1	4	1	.90	160	2	16	1	4	2	.96
113	2	17	2	1	1	2.62	161	2	17	2	1	2	2.68
114	2	17	2	2	1	2.58	162	2	17	2	2	2	2.64
115	2	17	2	3	1	2.21	163	2	17	2	3	2	2.17
116	2	17	2	4	1	1.03	164	2	17	2	4	2	.96
117	2	18	2	1	1	2.60	165	2	18	2	1	2	2.66
118	2	18	2	2	1	2.60	166	2	18	2	2	2	2.62
119	2	18	2	3	1	2.34	167	2	18	2	3	2	2.28
120	2	18	2	4	1	1.14	168	2	18	2	4	2	1.23
121	2	19	2	1	1	2.39	169	2	19	2	1	2	2.43
122	2	19	2	2	1	2.41	170	2	19	2	2	2	2.48
123	2	19	2	3	1	2.09	171	2	19	2	3	2	2.16
124	2	19	2	4	1	.90	172	2	19	2	4	2	.84
125	2	20	2	1	1	2.70	173	2	20	2	1	2	2.66
126	2	20	2	2	1	2.64	174	2	20	2	2	2	2.70
127	2	20	2	3	1	2.23	175	2	20	2	3	2	2.27
128	2	20	2	4	1	1.02	176	2	20	2	4	2	.98
129	2	21	3	1	1	2.98	177	2	21	3	1	2	2.94
130	2	21	3	2	1	2.64	178	2	21	3	2	2	2.70
131	2	21	3	3	1	2.34	179	2	21	3	3	2	2.44
132	2	21	3	4	1	1.28	180	2	21	3	4	2	1.33
133	2	22	3	1	1	3.10	181	2	22	3	1	2	3.20
134	2	22	3	2	1	2.85	182	2	22	3	2	2	2.91
135	2	22	3	3	1	2.40	183	2	22	3	3	2	2.45
136	2	22	3	4	1	1.35	184	2	22	3	4	2	1.39
137	2	23	3	1	1	2.80	185	2	23	3	1	2	2.84
138	2	23	3	2	1	2.48	186	2	23	3	2	2	2.53
139	2	23	3	3	1	2.16	187	2	23	3	3	2	2.23
140	2	23	3	4	1	1.01	188	2	23	3	4	2	1.07
141	2	24	3	1	1	3.21	189	2	24	3	1	2	3.31
142	2	24	3	2	1	2.92	190	2	24	3	2	2	2.98
143	2	24	3	3	1	2.56	191	2	24	3	3	2	2.47
144	2	24	3	4	1	1.40	192	2	24	3	4	2	1.51

مقتراعات من المراجع

المراجع المختارة مصنفة في خمسة أصناف:

- ١ - كتب المخذار عامة.
 - ٢ - تشخيصات وبناء نماذج.
 - ٣ - حسابات إحصائية.
 - ٤ - كتب عامة في التصميم التجريبي وتحليل التباين.
 - ٥ - مواضيع متفرقة.
- ١ - كتب المخذار عامة.

Allen, D. M., and F. B. Cady. *Analyzing Experimental Data by Regression*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

Bowerman, B. L.; R. T. O'Connell; and D. A. Dickey. *Linear Statistical Models: An Applied Approach*. Boston: Duxbury Press, 1986.

Brook, R. J., and G. C. Arnold. *Applied Regression Analysis and Experimental Design*. New York: Marcel Dekker, 1985.

Chatterjee, S., and B. Price. *Regression Analysis by Example*. New York: John Wiley & Sons, 1977.

Cohen, J., and P. Cohen. *Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for the Behavioral Sciences*. 2nd ed. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1983.

Daniel, C., and F. S. Wood. *Fitting Equations to Data*. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1980.

Draper, N.R., and H. Smith. *Applied Regression Analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1981.

Dunn, O. J., and V. A. Clark. *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Edwards, A. L. *An Introduction to Linear Regression and Correlation*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1984.

Edwards, A. L. *Multiple Regression and the Analysis of Variance and Covariance*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1985.

- Gunat, R. F., and R. L. Mason. *Regression Analysis and Its Application*. New York: Marcel Dekker, 1980.
- Kleinbaum, D. G.; L. L. Kupper; and K. E. Muller. *Applied Regression Analysis and Other Multivariate Methods*. 2nd ed. Boston: PWS-Kent Publishing Co., 1988.
- Mendenhall, W., and T. Sincich. *A Second Course in Business Statistics: Regression Analysis*. 2nd ed. San Francisco: Dellen Publishing Co., 1986.
- Montgomery, D. C., and E. A. Peck. *Introduction to Linear Regression Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1982.
- Mosteller, F., and J. W. Tukey. *Data Analysis and Regression*. Reading, Pa.: Addison-Wesley Publishing, 1977.
- Myers, R. H. *Classical and Modern Regression with Applications*. Boston: Duxbury Press, 1986.
- Pedhazur, E. J. *Multiple Regression in Behavioral Research*. 2nd ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1982.
- Seber, G. A. F. *Linear Regression Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1977.
- Weisberg, S. *Applied Linear Regression*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- Younger, M. S. *A First Course in Linear Regression*. 2nd ed. Boston: Duxbury Press, 1985.

٧- تشخيصات وبناء نماذج.

- Allen, D. M. "Mean Square Error of Prediction as a Criterion for Selecting Variables." *Technometrics* 13 (1971), pp. 469-75.
- Ancombe, F. J., and J. W. Tukey. "The Examination and Analysis of Residuals." *Technometrics* 5 (1963), pp. 141-60.
- Atkinson, A. C. *Plots, Transformations and Regression*. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- Barnett, V., and T. Lewis. *Outliers in Statistical Data*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- Belsley, D. A.; E. Kuh; and R. E. Welsch. *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- Box, G. E. P., and D. R. Cox. "An Analysis of Transformations." *Journal of the Royal Statistical Society B* 26 (1964), pp. 211-43.
- Box, G. E. P., and N. R. Draper. *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- Box, G. E. P., and P. W. Tidwell. "Transformations of the Independent Variables." *Technometrics* 4 (1962), pp. 531-50.
- Chatterjee, S., and A. S. Hadi. *Sensitivity Analysis in Linear Regression*. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- Cook, R. D., and S. Weisberg. *Residuals and Influence in Regression*. London: Chapman and Hall, 1982.
- Durbin, J., and G. S. Watson. "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II." *Biometrika* 38 (1951), pp. 159-78.
- Flack, V. F., and P. C. Chang. "Frequency of Selecting Noise Variables in Subset-Regression Analysis: A Simulation Study." *The American Statistician* 41 (1987), pp. 84-86.
- Freedman, D. A. "A Note on Screening Regression Equations." *The American Statistician* 37 (1983), pp. 152-55.

- Glaser, R. E. "Bartlett's Test of Homogeneity of Variances." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 1, ed. S. Kotz and N. L. Johnson. New York: John Wiley & Sons, 1982, pp. 189-91.
- Hogglin, D. C., and R. Welsch. "The Hat Matrix in Regression and ANOVA." *The American Statistician* 32 (1978), pp. 17-22.
- Hocking, R. R. "The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression." *Biometrics* 32 (1976), pp. 1-49.
- Hoerl, A. E., and R. W. Kennard. "Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems." *Technometrics* 12 (1970), pp. 69-82.
- Mallows, C. L. "Some Comments on C_p ." *Technometrics* 15 (1973), pp. 661-75.
- Mansfield, E. R., and M. D. Conerly. "Diagnostic Value of Residual and Partial Residual Plots." *The American Statistician* 41 (1987), pp. 107-16.
- Mantel, N. "Why Stepdown Procedures in Variable Selection." *Technometrics* 12 (1970), pp. 621-25.
- Pope, P. T., and J. T. Webster. "The Use of an F-Statistic in Stepwise Regression Procedures." *Technometrics* 14 (1972), pp. 327-40.
- Rousseeuw, P. J., and A. M. Leroy. *Robust Regression and Outlier Detection*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- Snee, R. D. "Validation of Regression Models: Methods and Examples." *Technometrics* 19 (1977), pp. 415-28.
- Stone, M. "Cross-Validatory Choice and Assessment of Statistical Prediction." *Journal of the Royal Statistical Society B* 36 (1974), pp. 111-47.
- Theil, H., and A. L. Nagar. "Testing the Independence of Regression Disturbances." *Journal of the American Statistical Association* 56 (1961), pp. 793-806.

٣- حسابات إحصائية.

- Dixon, W. J., chief editor. *BMDP Statistical Software Manual*. vols. 1 and 2. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1988.
- IMSL, Inc. *STATLIBRARY User's Manual, Version 1.1*. Houston: IMSL, 1989.
- Kennedy, W. J., Jr., and J. E. Gentle. *Statistical Computing*. New York: Marcel Dekker, 1980.
- MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.
- NAG, *The Generalized Linear Interactive Modelling (GLIM) System, Release 3.77*. Downers Grove, Ill.: Numerical Algorithms Group, Inc., 1986.
- SAS User's Guide: Statistics. Version 6 ed. Cary, N.C.: SAS Institute, 1987.
- SPSS^x User's Guide. 2nd ed. Chicago: SPSS, 1986.

٤- كتب عامة في التصميم التجريبي وتحليل البيانات.

- Anderson, V. L., and R. A. McLean. *Design of Experiments*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1974.
- Box, G. E. P.; W. G. Hunter; and J. S. Hunter. *Statistics for Experimenters*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

- Cochran, W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.
- Cox, D. R. *Planning of Experiments*. New York: John Wiley & Sons, 1958.
- Fisher, R. A. *The Design of Experiments*. 8th ed. New York: Hafner Publishing Co., 1966.
- Gill, J. L. *Design and Analysis of Experiments*, vols. I and II. Ames, Iowa: Iowa State University Press, 1978.
- Graybill, F. A. *Theory and Application of the Linear Model*. Boston: Duxbury Press, 1976.
- Hicks, C. R. *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*. 3rd ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1982.
- Hocking, R. R. *The Analysis of Linear Models*. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1985.
- John, P. W. M. *Statistical Design and Analysis of Experiments*. New York: Macmillan Co., 1971.
- Johnson, N. L., and F. C. Leone. *Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences*, vols. I and II. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1966.
- Kempthorne, O. *The Design and Analysis of Experiments*. New York: John Wiley & Sons, 1952.
- Keppel, G. *Design and Analysis: A Researcher's Handbook*. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.
- Kirk, R. E. *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences*. 2nd ed. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1982.
- Mendenhall, W. *Introduction to Linear Models and the Design and Analysis of Experiments*. Boston: Duxbury Press, 1968.
- Montgomery, D. C. *Design and Analysis of Experiments*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- Myers, J. L. *Fundamentals of Experimental Design*. 3rd ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1979.
- Peterson, R. G. *Design and Analysis of Experiments*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1985.
- Scheffé, H. *The Analysis of Variance*. New York: John Wiley & Sons, 1959.
- Searle, S. R. *Linear Models for Unbalanced Data*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- Seber, G. A. F. *The Linear Hypothesis*. 2nd ed. London: Charles Griffin, 1980.
- Steel, R. G. D., and J. H. Torrie. *Principles and Procedures of Statistics*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1980.
- Winer, B. J. *Statistical Principles in Experimental Design*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1971.

• - مواضيع متفرقة.

- Berkson, J. "Are There Two Regressions?" *Journal of the American Statistical Association* 45 (1950), pp. 164-80.
- Bishop, Y. M. M.; S. E. Fienberg; and P. W. Holland. *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975.
- Box, G. E. P. "Use and Abuse of Regression." *Technometrics* 8 (1966), pp. 625-29.

- Box, G. E. P., and G. M. Jenkins. *Times Series Analysis: Forecasting and Control*. Rev. ed. San Francisco: Holden-Day, 1976.
- Cox, D. R. "Notes on Some Aspects of Regression Analysis." *Journal of the Royal Statistical Society A* 131 (1968), pp. 265-79.
- Federer, W. T., and M. Zelen. "Analysis of Multifactor Classifications with Unequal Numbers of Observations." *Biometrics* 22 (1966), pp. 525-52.
- Fuller, W. A. *Measurement Error Models*. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- Gibbons, J. D. *Nonparametric Methods for Quantitative Analysis*. 2nd ed. Columbus, Ohio: American Sciences Press, 1985.
- Graybill, F. A. *Matrices with Applications in Statistics*. 2nd ed. Belmont, Calif.: Wadsworth, 1983.
- Greenhouse, S. W., and S. Geisser. "On Methods in the Analysis of Profile Data." *Psychometrika* 24 (1959), pp. 95-112.
- Hocking, R. R. "A Discussion of the Two-Way Mixed Model." *The American Statistician* 27 (1973), pp. 148-52.
- Hogg, R. V. "Statistical Robustness: One View of Its Use in Applications Today." *The American Statistician* 33 (1979), pp. 108-15.
- Huynh, H., and L. Feldt. "Estimation of the Box Correction for Degrees of Freedom from Sample Data in the Randomized Block and Split-plot Designs." *Journal of Educational Statistics* 1 (1976), pp. 69-82.
- Johnson, D. E., and F. A. Graybill. "Estimation of σ^2 in a Two-Way Classification Model with Interaction." *Journal of the American Statistical Association* 67 (1972), pp. 388-94.
- Johnson, R. A., and D. W. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1988.
- Koch, G. G.; J. D. Elashoff; and I. A. Amara. "Repeated Measurements—Design and Analysis." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 8, ed. S. Kotz and N. L. Johnson. New York: John Wiley & Sons, 1988, pp. 46-73.
- Miller, R. G., Jr. *Simultaneous Statistical Inference*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1981.
- Owen, D. B. *Handbook of Statistical Tables*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing, 1962.
- Pindyck, R. S., and D. L. Rubinfeld. *Econometric Models and Economic Forecasts*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1981.
- Satterthwaite, F. E. "An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components." *Biometrics Bulletin* 2 (1946), pp. 110-14.
- Searle, S. R. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York: John Wiley & Sons, 1982.
- Snedecor, G. W., and W. G. Cochran. *Statistical Methods*. 7th ed. Ames, Iowa: Iowa State University Press, 1980.

ثبته المسائل

• عربي - إنجليزي

• إنجليزي - عربي

أولاً: عربي - إنجليزي

Kruskal - Wallis rank test

Pseudo F -test

Median test

Single degree of freedom test

Tukey test for additivity

Cochran test

Roundoff errors

P- value

Total deviation

Selection bias

Measurement bias

Data

Experimental data

اختبار الرتب لكروسكال - واليس

اف كاذب

الوسيط

بلرجه حرية واحدة

توكي للتجميعية

كوكران

أخطاء تدوير الأرقام العشرية

القيمة بي

انحراف كلي

انحياز الاختيار

قياس

بيانات (معطيات)

تجريبية

Observational data	مشاهدة
Additive effects	تأثيرات تجميعية
Carry-over effects	محمولة
Main effect	تأثير رئيس
Variance	تباين
Analysis of variance	تحليل تباين
Analysis of covariance	تغاير
Residual analysis	راسب
Box transformation	تحويل بوكس
Sample size planning	تخطيط حجم العينة
Repeated measure design	تصميم القياسات المتكررة
Split plot design	الوحدة المنشطرة (المنقسمة)
Completely randomized design	تام العشوائية
Design of experiments	تجارب
Nested design	حاضن
Balanced nested design	متوازن
Randomized block design	تصميم قطاع عشوائي
Generalized randomized block design	معمم
Incomplete block design	غير تام
Partially hierarchical design	متسلسل جزئياً
Crossed - nested design	متصالب حاضن
Cross- over design	ناقل
Double cross- over design	مضاعف

Partially nested design	مضمن جزئيا
Latin square design	مربع لاتيني
Data snooping	تطفل على البيانات
Randomization	تعشية
Interaction	تفاعل
Transformable interactions	تفاعلات قابلة للتحويل
Important transformations	مهمة
First - order interaction	تفاعل المرتبة الأولى
Second- order interaction	الثانية
Orthogonal decomposition	تفكيك متعامد
Replication	تكرار
Compound symmetry	تناظر مركب
Proportional frequencies	تواترات متناسبة
Noncentral F- distribution	توزيع اف غير المركزي
Studentized range distribution	مدى معير تقديرا
Expected mean square	توقع متوسط مربعات
ANOVA table	جدول ثنائين
Homoscedasticity	خاصية التجانس
Heteroscedasticity	عدم التجانس
Sphericity	الكروية
Factorial study	دراسة عاملية

Multiple factor study	متعددة العوامل
Double-blind study	مضاعفة التعمية
Single blind study	وحيدة التعمية
Pooling sum of squares	دمج مجاميع المربعات
Residual	راسب
Standardized residual	معياري
Normal probability plot	رسم احتمال طبيعي
Line plot	خط
Residual sequence plot	راسب تساهي (تسلسلي)
Plots	رسوم (رسومات)
Quasi F-test	شبه اختبار اف
Method of unweighted means	طريقة المتوسطات غير المرجحة
Multiple comparison procedure	المقارنات المتعددة
Scheffe joint estimation procedure	شيفه للتقدير المشترك
Yates method	ياتس
Family	عائلة
Experimental factor	عامل تجريبي
Crossed factor	تصالب
Classification factor	تصنيف
Nested factor	مخضن

Efficiency of blocking

فعالية التقسيم الى قطاعات

Outlier

قاصية

Power test

قوة اختبار

Concomitant variable

متغير مصاحب (مرافق)

Mean

متوسط

Treatment mean square

مربعات معالجة

Factor level mean

مستوى عامل

Treatment means

متوسطات معالجة

Sum of products

بمجموع جداءات

Treatment sum of products

معالجة

Column sum of squares

مربعات العمود

Remainder sum of squares

الباقى

Row som of squares

السطر

Block sum of squares

القطاع

Interaction sum of squares

تفاعل

Total sum of squares

كلى

Treatment sum of squares

معالجة

Adjusted error sum of squares

معدل الخطأ

Total sum of products

جداءات كلى

Graeco-latin square

مربع اغريقي - لاتيني

Standard latin square

لاتيني قياسى

Youden square	يودين
Variance components	مركبات تباين
Factor level	مستوى عامل
Variance - covariance matrix	مصفوفة تباين - تغاير
Normal equations	معادلات ناظمية
Treatment	معالجة
Control treatment	حيادية
Kendall's coefficient of concordance	معامل الاتفاق لكانديل
Confidence coefficient	ثقة
Family confidence coefficient	عالي
Subsampling	معاينة جزئية
Noncentrality parameter	معلمة اللامركزية
Pairwise comparisons	مقارنات مثنى مثنى
Comparison	مقارنة
Unbiased estimator	مقدر غير منحاز

Analysis of variance model	نماذج تحليل تباين
Random factor effects model	نموذج تأثيرات عوامل عشوائية
Factor effect model	تأثير عامل
Random ANOVA model	تحاليل عشوائية
Mixed ANOVA model	مختلط
Unrestricted model	غير مقيد
Cell means model	متوسطات الخلايا
Random cell means model	عشوائي
Reduced model	مخفض
Components of variance model	مركبات التباين



Subplots

وحدات تجريبية جزئية

Experimental unit

وحدة تجريبية

لانيا: الإنجليزي - عربي

Additive effects	تأثيرات تجميعية
Adjusted error	خطأ معدل
Analysis of covariance	تحليل تباين
Analysis of variance	تحليل تباين
Analysis of variance models	نماذج تحليل تباين
ANOVA table	جدول تباين
Asymptotic normality	طبيعية مقارنة (تقريبية)
Balanced nested design	تصميم حاضن متوازن
Block	قطاع
Block sum of squares	مجموع مربعات القطاعات
Box transformation	تحويل بوكس
Carry over effect	تأثيرات محمولة
Cell means model	نموذج متوسطات الخلايا
Classification factor	عامل تصنيف
Chocran test	اختبار كوكران
Column sum of squares	مجموع مربعات الأعمدة
Comparison	مقارنة
Complete factor study	دراسة عاملية تامة
Completely randomized design	تصميم تام العشوائية
Component of variance model	نموذج مركبات التباين

Concomitant variable	متغير مصاحب (مرافق)
Confidence coefficient	معامل ثقة
Contrast	متضادة
Control treatment	معالجة حيادية
Crossed factor	عامل تصالب
Crossed - nested design	التصميم متصالب حاضن
Crossed over design	تصميم ناقل
Data snooping	تطفل على البيانات
Design of experiment	تصميم تجارب
Double - blind study	دراسة مضاعفة التعمية
Double cross - over design	تصميم ناقل مضاعف
Efficiency of blocking	فعالية التقسيم الى قطاعات
Expected mean square	توقع متوسط مربعات
Experimental factor	عامل تجريبي
Experimental unit	وحدة تجريبية
Extra sum of squares	مجموع مربعات إضافي
Factor	عامل
Factor effect model	نموذج تأثير عاملي
Factorial studies	دراسات عاملية
Factor level	مستوى عامل
Factor level mean	متوسط مستوى عامل
Family	عائلة
Family confidence coefficient	معامل ثقة عائلي

First - order interaction	٦	تفاعل من المرتبة الأولى
Generalized randomized block design	١١	تصميم قطاع عشوائي معمم
Graeco - Latin square	١١	مربع اغريقي لاتيني
Heteroscedastisity	١	خاصية عدم التجانس (التفاوت)
Homoscedastisity	١	خاصية التجانس
Important interactions	١	تفاعلات مهمة
Incomplete block design	١	تصميم قطاع غير تام
Interaction	١	تفاعل
Interaction sum of squares	١	مجموع مربعات تفاعل
Kendall - coefficient of concordance	١	معامل الاتفاق للكتل
Kruskal - Wallis rank test	١	اختبار الرتب لكروسكال والاس
Latin square design	١	تصميم المربع اللاتيني
Line plot	١	رسم خط
Main effect	١	تأثير رئيس
Mean	١	متوسط
Measurement bias	١	انحياز قياس
Median test	١	اختبار الوسيط
Measurement error	١	خطأ قياس
Method of unweighted means	١	طريقة المتوسطات غير المرجحة
Mixed ANOVA model	١	نموذج تباين مختلط

Multifactor study	دراسة متعددة العوامل
Multiple comparison procedures	طريقة المقارنات المتعددة
Nested design	تصميم حاضن
Nested factor	عامل محضن
Noncentral F- distribution	توزيع اف غير المركزي
Noncentrality parameter	معلمة اللامركزية
Normal equations	معادلات ناظمية
Normal probability plot	رسم احتمال طبيعي
Observation error sum of squares	مجموع مربعات خطأ الملاحظة
Observation unit	وحدة مشاهدة
Orthogonal decomposition	تفكيك متعامد
Outlier	قاصبة
P-value	القيمة-بي
Piecewise comparisons	مقارنات مثني مثني
Partially hierarchical design	تصميم متسلسل جزئيا
Partially nested design	تصميم محضن جزئيا
Plots	رسوم (رسومات)
Power of a test	قوة اختبار
Proportional frequencies	تواترات متناسبة
Pseudo F- test	اختبار اف كاذب
Press criterion	معيار بريس
Quasi F- test	شبه اختبار اف

Qualitative factor	عامل وصفي
Quantitative factor	عامل كمي
Random ANOVA model	نموذج نماين عشوائي
Random cell means model	نموذج متوسطات خلايا عشوائي
Random factor effects model	نموذج تأثيرات عوامل عشوائية
Randomization	تعشية
Randomized block design	تصميم قطاع عشوائي
Reduced model	نموذج مخفض
Remainder sum of squares	مجموع مربعات الباقي
Repeated measure design	تصميم القياسات المتكررة
Replication	تكرار
Residual	راسب
Residual analysis	تحليل راسب
Residual sequence plot	رسم راسب تابعي (تسلسلي)
Roundoff errors	أخطاء تدوير الأرقام العشرية
Row sum of squares	متوسط مربعات السطر
Scheffe joint estimation procedure	طريقة شيفه للتقدير المشترك
Second order interaction	تفاعل من المرتبة الثانية
Selection bias	التحيز الاختيار
Single blind study	دراسة وحيدة التعمية
Single degree of freedom test	اختبار بدرجة حرية واحدة
Single factor study	دراسة وحيدة العامل
Sphericity	خاصية الكروية
Split plot design	تصميم الوحدة للنشطرة (للقسمة)
Standardized residual	راسب معياري

Standard latin square	مربع لاتيني قياسي
Studentized range distribution	توزيع مدى معر تقديرا
Subplots	وحدات تجريبية جزئية
Subsampling	معينة جزئية
Sum of products	مجموع جداءات
Total deviation	انحراف كلي
Total sum of products	مجموع جداءات كلي
Total sum of squares	مجموع مربعات كلي
Transformable interactions	تفاعلات قابلة للتحويل
Treatment	معالجة
Treatment means	متوسطات معالجات
Treatment mean squares	متوسط مربعات معالجة
Treatment sum of products	مجموع جداءات معالجة
Treatment sum of squares	مجموع مربعات معالجة
Tukey test for additivity	اعتبار توكي للتحميمية
Unbalanced nested design	تصميم حاضن غير متوازن
Unbiased estimator	مقدر غير منحاز
Unrestricted model	نموذج غير مقيد
Variance components	مركبات تباين
Variance - covariance matrix	مصفوفة تباين تغاير
Yates method	طريقة ياتس
Youden square	مربع يودين

مكشاف الموضوعات

ا

اختبار

إف كاذب ٤٥٨

الرتب لكروسكال-والاس ١٦٨-١٧٩

الوسيط ١٨٢-١٨٥

بدرجة واحدة من الحرية ٩٩-١٠٠

توكي للتجميعية

تحليل تبين بعاملين ٣٧٧-٣٨١

تصميم قطاع عشوائي ٥٥٧-٥٥٩

مربع لاتيني ٧٩٠-٧٩٢

كوكران ٥٨٧-٥٨٨

ت

تأثيرات تجميعية

لعامل ٢٢٧-٢٣١

محمولة ٧٠٧-٧١٠

تحليل

تبين

تصميم قطاع عشوائي ٥٥٩-٥٦٢

قياسات مكررة ٧٢٢-٧٢٢، ٧٣٠-٧٣٤، ٧٤٠-٧٤٦

مربع لاتي، ٧٩٢-٧٩٤

ثلاثة عوامل ٤٣٨-٤٤١، ٤٦٠

عاملين ٢٩٧-٣١٩، ٣٤٧-٣٥٠، ٤٠١-٤٠٣

محضين ٦٤١-٦٤٥

عامل واحد ٧٩-٩٩، ١٠٥-١١٣، ١٩٤-١٩٩

تفاير ٤٧٣-٤٧٨

اختبار تساوي الميول ٤٩٤-٤٩٥

أسلوب التعديل

عامل واحد ٤٩٥-٥٠٨

عاملين ٥٠٩-٥١١

تجربة

عامل واحد ٤٩٥-٥٠٠

عاملين ٥٠٩-٥١١

تقدير التأثيرات

عامل واحد ٤٩٢-٤٩٥

عاملين ٥٠٩-٥١٦

قطاع عشوائي تام ٥٧١-٥٧٣

نموذج

عامل واحد ٤٧٨-٤٨٥

عاملين ٥٠٨

راسب

تحليل تباين ١٢٨-١٣٦، ٢٦٠-٢٦٢، ٤٣٧

تصميم قطاع عشوائي ٥٥٤-٥٥٧

قياسات مكررة ٧١٨-٧١٩، ٧٤٠-٧٤١

تحويل بوكس ١٣٩-١٤١

تخطيط حجم العينة

جداول تحليل التباين ٨٥١-٨٥٢

تصميم

قطاع عشوائي تام ٥٤٢-٥٤٨

قياسات مكررة ٧٠٧-٧١٠

محض ٦٢١-٦٢٤

ثلاثة عوامل متصلة محضنة ٦٨٨-٦٩٨

عاملان

اختبار إف ٦٣٧-٦٣٨

أسلوب الانحدار ٦٤٥-٦٤٨

تجزئة تباين ٦٣٠-٦٣٥

توفيق نموذج ٦٢٩

تحليل راسب ٦٣٩-٦٤١

تقدير تأثيرات ٦٤١-٦٤٥

غير متوازن ٦٤٥-٦٤٨

قاعدة إيجاد توقع متوسط مربعات ٦٨٠

مجموع مربعات ٦٧٦-٦٨١، ٦٩٨-٧٠٠

تطوير نموذج ٦٧٥-٦٧٦، ٦٩٨

متوازن ٦٣٥-٦٥٩

مربع اثريقي لاتيقي ٨١٦

لاتيقي ٧٧٣-٧٧٧

اختبار إف ٧٨٧-٧٨٩

توكي للجمعية ٧٩٠-٧٩٢

استخدام عدة مربعات ٨٠٤-٨٠٧، ٨١٢

أسلوب الانحدار ٧٩٨-٨٠٠

تجزئة تحاين ٧٨٦

تحليل راسب ٧٩٠

تخطيط حجم العينة ٧٩٦

تصميم ناقل ٨٠٩-٨١٢

تقدير تأثيرات ٧٩٣-٧٩٤

تكرارات ضمن الخلايا ٨٠١-٨٠٤

توفيق نموذج ٧٨٤-٧٨٦

توقع متوسط مربعات ٧٨٨

فعالية ٧٩٦-٧٩٨

قياسات مكررة ٨٠٧-٨١٣

كيفية التعشية ٧٧٧-٧٨٢

مشاهدات مفقودة ٨٠٠

معالجات عاملية ٧٩٤-٧٩٦

نموذج ٧٨٤، ٨١٥

يودين ٨١٥-٨١٦

تطفل على البيانات، ٨٦

تعشية ٥٣٦-٥٤٢

تفاعل ٢٣٣-٢٣٤

ثلاثة عوامل ٤٢٠-٤٢٦

عاملين ٤١٩

في تحليل التباين ٢٣١-٢٤٢

تفاعلات قابلة للتحويل ٢٣٧-٢٣٩

تفكيك متعامد ٢٥٣-٢٥٤

تكرار ٥٣٥

توزيع مدى معبر تقديرا ٨٨

د

دراسة

ثلاثة عوامل

اختبار إف ٤٣٤-٤٣٦، ٤٥٧، ٤٦٠-٤٦٠

أسلوب الانحدار ٤٥١-٤٥٢

تحليل راسب ٤٣٧

تجزئة ثنائين ٤٣٠-٤٣٣

تخطيط حجم العينة ٤٤٨-٤٥٠

تقدير التأثيرات ٤٣٨-٤٤١

توفيق نموذج ٤٢٨-٤٣١

توقع متوسط المربعات ٤٣٥، ٤٥٤-٤٥٥

حجوم عينات غير متساوية ٤٥١-٤٥٣

نموذج ٤٢٦-٤٢٧

عاملين

اختبار إف ٢٦٢-٢٦٨، ٣٢٨، ٣٤٦، ٣٩٨-٤٠٠

اختبار توكي للتجميعية ٣٧٧

أسلوب الاختبار الخطي العام ٣٨١-٣٨٥

أسلوب الانحدار ٢٦٨-٢٧٣

تحليل تفاير ٥٠٨-٥١٦

راسب ٢٦٠-٢٦٢

تجزئة نماذج ٢٥٢-٢٥٧

تخطيط حجم العينة ٣٢١

تقدير التأثيرات ٢٩٧-٣١٩، ٣٤٧-٣٥٠، ٤٠١-٤٠٣

توفيق نموذج ٢٥٢-٢٥٦

توقع متوسط المربعات ٢٥٧-٢٥٩، ٣٩٥-٣٩٨

خطة التحليل ٢٩٥-٢٩٦

مشاهدة واحدة لكل خلية ٣٦٩-٣٧٧

نموذج ٢٤٢-٢٤٦

نموذج بلا تفاعل ٣٥٥-٣٥٦

ر

رسم راسب تناهبي ١٣٣

ط

طريقة

متوسطات غير مرجحة ٣٤٦-٣٤٧

مقارنات متعددة ٨٥-٨٧

باتس ٥٩٧

ع

عامل

تجويي ٧

نصالب ٦٢١-٦٢٥

تصنيف ٧

كمي ٨

كيفي ٨

محضن ٦٢١-٦٢٥

ف

فعالية التقسيم الى قطاعات ٥٦٥-٥٦٩

ق

قوة اختيار

تحليل التباين

ثلاثة عوامل ٤٤٩

جداول ٨٤٣

عامل واحد ١٦٤-١٦٧

عاملين ٣٢٠-٣٢٢

قطاع تام عشوائي ٥٥٤

مربع لاتي ٧٨٩

م

متغير مصاحب ٤٧٥-٤٧٧

معالجة ٩-١٢

متوسطات ٢٢٣-٢٢٥

غير متساوية الأهمية ٢٧٥-٢٧٦، ٣١٢-٣١٤، ٣٨١-٣٩٠

متوسط مربعات ٣٢

مجموع مربعات ٢٧

جداءات ٤٩٨

مجموع مربعات

تفاعل ٢٥٤

سطر ٧٨٦

عمود ٧٨٦

قطاع ٥٥١

كلي ٢٧

معدل للخطأ ٤٩٩

Bibliotheca Alexandrina



0605119

ردمك : ٩٩٦٠-٣٧-١٣٧-٩ (مجموعة)
(٢ ج) ٩٩٦٠-٣٧-١٣٨-٧

ISBN: 9960-37-137-9 (Set)
9960-37-138-7 (Part 2)